

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS DE ORDEM
REDUZIDA APLICADA AO CONTROLE DE MÍSSEIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE

Rio de Janeiro
2013

c2013

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

Z34r Santos, Guilherme José de Sousa Síntese de Controladores Robustos de Ordem Reduzida Aplicada ao Controle de Misseis / Cap Guilherme José de Sousa Santos. - Rio de Janeiro : Instituto Militar de Engenharia, 2013. 109 p.: il. Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia - Rio de Janeiro, 2013. 1. Engenharia elétrica - dissertações. 2. Controle robusto 3. Valor Singular Estruturado 4. Otimização não-diferenciável I. Título II. Instituto Militar de Engenharia. CDD 621.3822
--

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

CAP GUILHERME JOSÉ DE SOUSA SANTOS

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS DE ORDEM
REDUZIDA APLICADA AO CONTROLE DE MÍSSEIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE

Aprovada em 29 de Janeiro 2013 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE do IME

Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE do IME

Prof. Geraldo Magela Pinheiro Gomes - Dr. ENSAE do IME

Prof. Tiago Roux de Oliveira - D.Sc. COPPE da UERJ

Rio de Janeiro
2013

À Adriana, minha esposa.

Aos meus pais, José Mariano e Maria Amélia, e
ao meu irmão, Leonardo.

AGRADECIMENTOS

Ao Grande Eu Sou, único e verdadeiro Senhor, sem o qual ainda estaríamos mortos em nossos delitos e pecados.

Ao Exército Brasileiro, por ter-me acolhido no Colégio Militar do Rio de Janeiro e no Instituto Militar de Engenharia, sendo o responsável direto pela minha formação profissional.

Ao meu orientador, Alberto Mota Simões, cuja inigualável competência possibilitou-me chegar ao fim desta jornada. Muito obrigado por toda a dedicação, companheirismo e compreensão dispensados.

Aos professores Geraldo Magela Pinheiro Gomes, Roberto Ades e Antonio Eduardo Carrilho da Cunha e aos servidores da Seção de Engenharia Elétrica, por contribuírem direta e indiretamente para o sucesso deste trabalho.

Ao professor Paulo César Pellanda, por sua colaboração na modelagem do sistema de míssil ar-ar.

Aos amigos Felipe Reis, Samir Ferreira, Raquel Aguiar e Anne Elise Peixoto, pelo apoio e precioso auxílio durante todo o período em que convivemos.

Aos meus pais, José Mariano Monteiro dos Santos e Maria Amélia Monteiro de Sousa Santos, e ao meu irmão, Leonardo Luiz de Souza Santos, por serem meu esteio em tudo.

Aos meus avós, Antonietta e Israel, Guilherme e Ana, que me deixaram como legado o exemplo de vida.

À minha esposa, Adriana de Miranda Reis Santos, pelo amor, respeito e cumplicidade, por ser o suporte das minhas vitórias e por enxugar minhas lágrimas nos momentos mais difíceis.

“Porque Deus amou o mundo de tal maneira que deu o seu Filho unigênito, para que todo aquele que nele crê não pereça, mas tenha a vida eterna.”
João 3:16

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	12
1 INTRODUÇÃO	16
1.1 Contexto e Motivação	16
1.2 Trabalhos Realizados - Organização do Documento	18
2 ANÁLISE DE ROBUSTEZ	20
2.1 Preliminares	20
2.2 Representação das Incertezas	21
2.3 Configuração Geral de Controle com Incerteza	22
2.4 Estabilidade Robusta da Estrutura $M\Delta$	25
2.5 Valor Singular Estruturado μ	27
2.6 Análise de Estabilidade Robusta Utilizando o Valor Singular Estruturado	29
2.7 Valor Singular Estruturado Oblíquo ν	30
2.8 Desempenho Robusto	31
2.8.1 Teste μ para Desempenho Robusto	31
2.9 Síntese μ	34
2.9.1 Iteração DK	34
3 SÍNTESE μ NÃO-DIFERENCIÁVEL DE CONTROLADORES	36
3.1 Quadro de Trabalho	36
3.2 Síntese μ Não-Diferenciável Complexa	37
3.3 Síntese μ Não-Diferenciável Mista	40
3.4 Generalização para Síntese ν	46
4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS	48
4.1 Problema de Controle de uma Planta Levemente Amortecida com Incertezas Paramétricas	48
4.2 Controle de um Sistema Massa-Mola-Amortecedor	53
4.2.1 Apresentação do Problema	53
4.2.2 Resultados	55
4.2.2.1 Síntese μ Complexa	55
4.2.2.2 Síntese μ Mista	57
4.3 Problema de Controle de um Míssil	61
4.3.1 Modelo do Míssil	62

4.3.2	Estrutura de Síntese e Especificações de Desempenho	63
4.3.3	Resultados e Simulações	64
4.3.3.1	Estabilidade Robusta	64
4.3.3.2	Pior Caso de Desempenho	65
5	CONCLUSÃO GERAL	73
5.1	Resumo da Contribuição	73
5.1.1	Sobre a Teoria e Metodologia	73
5.1.2	Estudos de Caso	73
5.2	Sugestões e Perspectivas Futuras	75
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
7	APÊNDICES	78
7.1	Apêndice 1: Conceitos e Definições da Álgebra Linear	79
7.1.1	Transformações Fracionais Lineares	79
7.1.2	Autovalores e Autovetores	82
7.1.3	Valores singulares	83
7.1.4	Fórmula de SCHUR	84
7.2	Apêndice 2: Critério de Nyquist Generalizado e Prova dos Teoremas 2.1 a 2.6	85
7.2.1	Critério de Nyquist Generalizado	85
7.2.2	Prova do Teorema 2.1.....	85
7.2.3	Prova do Teorema 2.2.....	86
7.2.4	Prova do Teorema 2.3.....	86
7.2.5	Prova do Teorema 2.4.....	86
7.2.6	Prova do Teorema 2.5.....	86
7.2.7	Prova do Teorema 2.6.....	87
7.3	Apêndice 3: Modelo do Míssil.....	89
7.3.1	Modelo Linear Invariante no Tempo	89
7.3.2	Modelo LFT.....	91

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Incerteza multiplicativa de entrada	21
FIG.2.2	Estrutura $N\Delta$	22
FIG.2.3	Configuração geral de controle	22
FIG.2.4	(a) Incerteza aditiva, (b) Incerteza multiplicativa de entrada, (c) Incerteza multiplicativa de saída, (d) Incerteza aditiva inversa, (e) Incerteza multiplicativa de entrada inversa, (f) Incerteza multiplicativa de saída inversa	24
FIG.2.5	Estrutura $M\Delta$	25
FIG.2.6	Sistema com realimentação negativa	26
FIG.2.7	Uso de multiplicador D, tal que $\Delta D = D\Delta$	27
FIG.2.8	Estrutura $M\Delta$ particionada para análise ν	31
FIG.2.9	Estrutura $G\hat{\Delta}$	32
FIG.2.10	Δ_p incluso na estrutura $N\Delta$	32
FIG.2.11	Estrutura $N\hat{\Delta}$	33
FIG.3.1	Interconexão para a síntese μ	36
FIG.3.2	Translação nos D -multiplicadores	39
FIG.3.3	Síntese μ mista com controlador aumentado	42
FIG.4.1	Limite superior de μ para Iteração DK	50
FIG.4.2	Limites de μ para $n_c = 0$	50
FIG.4.3	Limites de μ para $n_c = 1$	51
FIG.4.4	Limites de μ para $n_c = 2$	51
FIG.4.5	Limites de μ para $n_c = 3$	52
FIG.4.6	Limites de μ para $n_c = 4$	52
FIG.4.7	Sistema massa-mola-amortecedor	53
FIG.4.8	Interconexão para síntese do controlador	53
FIG.4.9	Diagrama de Bode para dinâmica não-modelada	54
FIG.4.10	Modelo incerto para k_1 (real <i>versus</i> complexo)	56
FIG.4.11	Limite superior de μ (Iteração DK)	56
FIG.4.12	Limite superior de μ (Iteração $D, G - K$)	58
FIG.4.13	Valor de μ para controlador e multiplicador de ordens de 0 a 4	59
FIG.4.14	Diagrama físico do míssil (PELLANDA, 2001)	61
FIG.4.15	Estrutura de interconexão e síntese para o míssil	63
FIG.4.16	Resposta ao degrau para o controlador K_∞	66
FIG.4.17	Resposta ao degrau para o controlador $K_{\mu 1}$	67
FIG.4.18	Resposta ao degrau para o controlador $K_{\mu 2}$	68
FIG.4.19	Resposta ao degrau para o controlador $K_{\mu 1}$ com novo $W_i(s)$	69

FIG.4.20	Resposta ao degrau para o controlador $K_{\mu 2}$ com novo $W_i(s)$	69
FIG.4.21	Sobreposição das respostas apresentadas nas FIG(s) 4.19 e 4.20	70
FIG.4.22	Acompanhamento de referência para o controlador $K_{\mu 1}$ com novo $W_i(s)$	71
FIG.4.23	Acompanhamento de referência para o controlador $K_{\mu 2}$ com novo $W_i(s)$	71
FIG.4.24	Ângulo de ataque para o controlador $K_{\mu 1}$ com novo $W_i(s)$	72
FIG.4.25	Ângulo de ataque para o controlador $K_{\mu 2}$ com novo $W_i(s)$	72
FIG.7.1	LFT inferior em função de K	79
FIG.7.2	LFT superior em função de Δ	80
FIG.7.3	Interconexão de LFTs resulta em uma LFT	80
FIG.7.4	Produto estrela entre Q e M , $R = Q * M$	81
FIG.7.5	Sistema com realimentação negativa	85
FIG.7.6	Representação LFT para o míssil	92

LISTA DE TABELAS

- TAB 4.1 - Margem paramétrica para controladores de ordens de 0 a 4
- TAB 4.2 - μ para controlador e multiplicador de ordens de 0 a 4

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

ARE	-	<i>Algebraic Riccati Equations</i>
dim	-	dimensão
DN	-	Desempenho Nominal
DR	-	Desempenho Robusto
DVS	-	Decomposição em Valores Singulares
EN	-	Estabilidade Nominal
ER	-	Estabilidade Robusta
EQ(s)	-	Equação(ões)
FIG(s)	-	Figura(s)
LFT	-	<i>Linear Fractional Transformations</i>
LMI	-	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LTI	-	<i>Linear Time-Invariant</i>
MIMO	-	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
SISO	-	<i>Single-Input Single-Output</i>
TAB	-	Tabela
TEO(s)	-	Teorema(s)

SÍMBOLOS

\triangleq	-	igual, por definição
\equiv	-	equivalente a
\forall	-	para todo
\Rightarrow	-	se, então
\Leftrightarrow	-	se, somente se
\square	-	fim de demonstração
$a \in A$	-	a pertence ao conjunto A
\mathbb{R}	-	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^{n \times m}$	-	matriz real com n linhas e m colunas
\mathbb{R}^n	-	vetor coluna real com n elementos
\mathbb{C}	-	conjunto dos números complexos
$\mathbb{C}^{n \times m}$	-	dimensão de matriz complexa com n linhas e m colunas
\mathbb{C}^n	-	vetor coluna complexo com n elementos

M^T	-	transposta da matriz M
M^*	-	adjunta da matriz M
M^H	-	transposta conjugada da matriz M
I_p	-	matriz identidade de ordem p
Tr	-	traço da matriz quadrada
det	-	determinante da matriz
Re	-	parte real de uma matriz
Im	-	parte imaginária de uma matriz
λ	-	autovalor
q	-	autovetor
ρ	-	raio espectral
\mathbb{H}^m	-	conjunto de matrizes hermitianas de ordem m
$X \prec 0$	-	matriz X é negativa definida
$X \preceq 0$	-	matriz X é negativa semidefinida
$X \succ 0$	-	matriz X é positiva definida
$X \succeq 0$	-	matriz X é positiva semidefinida
$X * Y$	-	produto estrela de Redheffer entre as matrizes X e Y
μ	-	valor singular estruturado
σ	-	valor singular
$\bar{\sigma}$	-	maior valor singular
$\underline{\sigma}$	-	menor valor singular
δ^j	-	j -ésima componente do vetor $\delta \in \mathbb{R}^n$
\mathcal{F}_u	-	LFT superior
\mathcal{F}_l	-	LFT inferior
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	-	representação em espaço de estados pelas matrizes A, B, C, D

RESUMO

Este trabalho trata da síntese de controladores robustos de ordem reduzida via otimização não-diferenciável. Mais especificamente, o principal objetivo é aplicar uma técnica recente de síntese μ , proposta por (APKARIAN, 2011), em problemas de controle de mísseis.

Problemas de síntese μ permanecem de difícil resolução devido a sua inerente não-convexidade. Dentre as numerosas técnicas existentes para se estimar soluções para esse problema, destacam-se as iterações DK e $D, G - K$ (YOUNG, 1996). Nesta abordagem, a síntese é decomposta em dois passos de minimização: uma síntese H_∞ , seguida de uma análise μ , ambas realizadas alternadamente, a partir de ferramentas numéricas eficientes. Este procedimento, no entanto, apresenta algumas limitações. Apesar de cada um desses passos de minimização ser convexo, a convexidade conjunta não é garantida. Além disso, a síntese H_∞ de ordem plena tradicionalmente utilizada implica a obtenção de um controlador de mesma ordem da planta de síntese, o que pode ser inconveniente quando esta apresenta ordem elevada.

Na técnica proposta em (APKARIAN, 2011), o problema de síntese μ é remodelado com base no limite superior do valor singular estruturado, utilizando-se um controlador aumentado de estrutura especial. Esta reformulação utiliza um método de otimização não-diferenciável em que os multiplicadores e o controlador são obtidos simultaneamente. Em virtude disto, é possível se obter controladores de ordem reduzida em relação à planta, além de não haver obrigatoriedade de os multiplicadores serem estáveis e de fase mínima. Esta técnica, aqui chamada de *Síntese μ Não-diferenciável com Multiplicadores Dinâmicos*, será usada com a finalidade de sintetizar controladores para mísseis que garantam estabilidade e desempenho robustos.

ABSTRACT

This work deals with synthesis of robust reduced controllers through the use of a technique of nonsmooth optimization. More specifically, the main goal is to apply a recent technique of μ synthesis, proposed in (APKARIAN, 2011), in missile control problems.

μ synthesis problems are still of difficult resolution due to its inherent nonconvexity. Among of numerous existing techniques to estimate solutions for this problem, the DK and $D, G - K$ Iterations (YOUNG, 1996) overtop all of them. In this approach, synthesis is decomposed in two minimization steps: a H_∞ synthesis, followed by an μ analysis, both realized alternately, with efficient numerical tools. This procedure, however, presents some limitations. Although each of these minimization steps is convex, the joint convexity is not guaranteed. Beyond this, the H_∞ synthesis of full order involves getting a controller of the same order of the plant, which may be inconvenient when this presents higher orders.

Through the technique proposed in (APKARIAN, 2011), μ synthesis problem may be recast with basis in the upper bound of the structured singular value, using an augmented controller of special structure. This reformulation employs a nonsmooth optimization method, in which multipliers and controller are obtained simultaneously. Owing to this, it is possible to obtain controllers of reduced order in comparison with the plant. In addition, there is no obligation in enforcing stable and minimum phase multipliers. This technique, here called *Nonsmooth μ Synthesis with Dynamic Multipliers*, will be used to synthesize controllers for missiles that will guarantee robust stability and performance.

1 INTRODUÇÃO

O comportamento de sistemas físicos reais é comumente descrito a partir de modelos matemáticos. Com o elevado grau de desenvolvimento da matemática atual, estes modelos podem ser bastante precisos. No entanto, tamanha precisão normalmente acarreta grande custo computacional, o que muitas vezes dificulta a tratabilidade de determinados sistemas. Desse modo, para fins de análise e projeto é frequentemente conveniente fazer-se uso de modelos mais simplificados com o intuito de se aproximar o comportamento do sistema sem comprometer sua tratabilidade.

A Teoria de Controle Robusto (ZHOU, 1996; SKOGESTAD, 2005) surgiu em decorrência desta limitação e da necessidade de se levar em consideração as inevitáveis incertezas e imprecisões inerentes ao modelo. Seu principal objetivo é possibilitar uma análise sistemática e o desenvolvimento de técnicas de projeto que sejam capazes de tratar incertezas.

A robustez de sistemas de controle a perturbações e incertezas é questão de suma importância no controle por realimentação, razão pela qual a área de Controle Robusto tem tido grande destaque na Teoria de Sistemas de Controle, sobretudo nas últimas quatro décadas. O ponto de partida da Teoria de Controle Robusto considera um modelo nominal e o conjunto de incertezas que o afeta. O sistema é considerado robusto se mantém suas características para toda classe de incertezas admissíveis. As principais características avaliadas são estabilidade e desempenho.

Um problema de controle robusto recai, basicamente, sobre as seguintes possibilidades: análise de robustez ou síntese de controladores robustos. Na primeira, sendo o controlador já conhecido, procede-se a avaliação das características do sistema em malha fechada na presença de um determinado conjunto de incertezas. Na segunda, busca-se sintetizar um controlador que assegure que o sistema em malha fechada atenda às especificações de robustez em estabilidade e desempenho requeridas. Esta dissertação abordará, principalmente, o problema da síntese de controladores robustos.

1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

Nos anos 60 foram publicados os primeiros trabalhos sobre a análise de estabilidade, cuja sustentação estava, principalmente, no Teorema do Ganho Pequeno (ZAMES, 1966). Os resultados apresentados garantiam condições necessárias e suficientes para a estabilidade de um conjunto de sistemas lineares, envolvendo uma perturbação linear invariante no tempo (LTI, do inglês *Linear Time Invariant*), limitada em norma e sem estrutura. Em situações práticas, porém, a planta está sujeita a incertezas tanto paramétricas quanto dinâmicas. Assim, com o passar do tempo percebeu-se que as técnicas até então existentes eram bastante conservadoras, pois a utilização de valores singulares implicava tratar incertezas mistas como uma única incerteza não-estruturada. Sintetizar

controladores que apresentem robustez na presença de incertezas mistas permanece sendo um dos maiores desafios para as teorias modernas de controle.

Com a finalidade de tentar reduzir o conservadorismo dos testes baseados em valores singulares, foi introduzido o conceito de valor singular estruturado (DOYLE, 1982), denotado pela letra grega μ . Essa grandeza tem como objetivo quantificar o tamanho da incerteza à qual um sistema pode ser submetido sem que atinja a instabilidade.

O valor singular estruturado é uma função que provê uma generalização do maior valor singular e do raio espectral que aparecem nos testes de robustez. A ideia central é estabelecer uma estrutura padrão para as incertezas, organizando-as em uma matriz bloco-diagonal. Com isso, por mais que individualmente as incertezas não possuam estrutura, a representação global da incerteza, em um sistema submetido a diversas classes de incertezas, é estruturada.

O foco, então, passou a ser a obtenção de μ , cujo cálculo do valor exato, porém, dependendo do tipo de incerteza que é tratada, é um problema de difícil solução (BLONDEL, 2000; FU, 1997). A alternativa normalmente empregada consiste em se obter uma aproximação para o valor de μ a partir de limites inferiores e superiores.

A síntese μ baseada no limite superior do valor singular estruturado é provavelmente o caminho mais explorado para se tentar resolver o problema do projeto de controladores robustos. Nesta abordagem, o verdadeiro indicador de robustez é substituído por limites superiores levemente conservadores. Enquadra-se nessa abordagem, a popular Iteração *DK*, na qual o problema de projeto é decomposto em análise e síntese, ambas cobertas por eficientes ferramentas numéricas.

A Iteração *DK* tradicional apresenta, porém, as seguintes potenciais fontes de fraqueza:

- a natureza biconvexa do problema de síntese sugere uma alternância entre as fases de análise e síntese até que mais nenhum progresso seja observado. No entanto, não há certificado de convergência.
- os multiplicadores devem ser computados ponto a ponto no domínio da frequência e ajustados de forma que sejam realizáveis em espaço de estados.
- ainda nesta mesma abordagem, os multiplicadores devem ser estáveis e de fase não-mínima, o que introduz certo conservadorismo e infla a dimensão do problema, aumentando a ordem do controlador.
- a fase de ajuste do controlador é baseada em técnicas de síntese H_∞ de ordem plena, como por exemplo a técnica baseada nas Equações Algébricas de Riccati (ARE, do inglês *Algebraic Riccati Equations*) de (DOYLE, 1989), ou via Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) de (BOYD, 1994). Desse modo, tanto a ordem da planta de síntese quanto a ordem dos multiplicadores irão inflar a ordem do controlador μ final.

Recentemente, em (APKARIAN, 2011) foi sugerida uma estratégia diferente de abordagem do problema, com o intuito de superar a maioria das dificuldades retromencionadas. A ordem e

estrutura do controlador são fixadas de antemão, bem como a ordem dos multiplicadores, sendo que ambos não são necessariamente estáveis.

Tanto a síntese μ complexa como a síntese μ mista baseadas no limite superior do valor singular estruturado podem ser reformuladas com programas de síntese com um controlador aumentado de estrutura especial. O controlador aumentado encapsula o controlador estruturado original juntamente com os multiplicadores. O problema de síntese pode, então, ser resolvido (localmente) através de uma recente técnica de otimização não-diferenciável (APKARIAN, 2006).

A síntese é realizada de uma só vez, o que significa que controlador e multiplicadores são obtidos simultaneamente. A técnica proposta é dotada de certificado local de convergência. Em virtude disto, pode superar o problema ocorrente nas terminações prematuras quando se utiliza a Iteração DK .

1.2 TRABALHOS REALIZADOS - ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Nesta dissertação, será discutida a aplicação da técnica de síntese μ de (APKARIAN, 2011) em problemas de projeto de controladores de ordem reduzida. Conforme será detalhado posteriormente, as sínteses μ complexa e mista, alicerçadas no limite superior de μ , podem ser reformuladas como um programa de síntese com um controlador aumentado de estrutura especial. O controlador aumentado encapsula o controlador estruturado original juntamente com os multiplicadores e, a partir daí, o problema de síntese pode ser resolvido localmente através de uma técnica de otimização não-diferenciável. A técnica de otimização empregada é dotada de certificado local de convergência e pode, portanto, superar eventuais terminações prematuras que ocorrem na biconvexa Iteração DK .

A dissertação está organizada em 4 capítulos, além desta Introdução. Os capítulos estão organizados como se segue:

- O capítulo 2 apresenta alguns resultados fundamentais da Teoria de Controle Robusto. São abordados itens referentes à caracterização de incertezas, configuração geral de controle com incerteza, além do arranjo das estruturas $M\Delta$ e $N\Delta$. Desenvolve-se os conceitos de Estabilidade Robusta (ER), Desempenho Robusto (DR) e Pior Caso de Desempenho. Apresenta-se, ainda, a definição de valor singular estruturado, que pode ser usado tanto para a análise de Desempenho Robusto (dado o controlador), como para a síntese de um controlador que minimize uma dada condição- μ . São listadas, também, algumas propriedades de μ para incertezas complexas e mistas. Por fim, aborda-se a Iteração DK , que é um conhecido método para síntese de controladores robustos quando se trata com incertezas puramente complexas.
- O capítulo 3 trata da síntese μ não-diferenciável de controladores robustos. Diferentemente da Iteração $D, G - K$, que possui uma natureza biconvexa na sua formulação ao basear-se em dois passos de minimização convexos, a síntese μ não-diferenciável trabalha com um controlador aumentado que encapsula juntamente consigo os multiplicadores, possibilitando

que a síntese seja realizada de uma só vez. Para proceder esse encapsulamento, são feitas translações nos multiplicadores da interconexão geral de síntese. Os programas de síntese μ não-diferenciável complexa e mista são desenvolvidos a partir de um conjunto infinito de restrições do tipo desigualdade matricial.

- O capítulo 4 apresenta a aplicação numérica da síntese μ não-diferenciável a três exemplos. O primeiro refere-se à síntese de um controlador que maximize a margem paramétrica alcançável para uma planta levemente amortecida com incertezas reais paramétricas. O segundo trata da síntese de um controlador para atenuação do efeito de uma perturbação externa a um sistema massa-mola-amortecedor incerto. E, por fim, o terceiro e principal exemplo aborda a síntese de um controlador para um míssil ar-ar, de tal forma que, apesar das variações no ângulo de ataque e no número de *Mach*, haja estabilidade sobre toda a faixa de operação e acompanhamento de uma aceleração de referência.
- O capítulo 5 traz as conclusões tiradas a partir dos resultados obtidos ao longo deste trabalho, além de apontar perspectivas futuras.

2 ANÁLISE DE ROBUSTEZ

2.1 PRELIMINARES

O projeto de um sistema de controle é, em geral, baseado na utilização de um modelo matemático que aproxima o sistema físico a ser controlado. Diz-se que tal sistema de controle é robusto quando se mostra pouco sensível a diferenças entre o sistema real e o modelo usado no projeto. A ideia central da chamada análise de robustez é verificar se as especificações de projeto são satisfeitas mesmo para o pior caso de incertezas.

A análise de robustez envolve as seguintes etapas:

1. Determinação do conjunto de incertezas: encontrar uma representação matemática para as incertezas do modelo.
2. Verificação da Estabilidade Robusta: determinar se o sistema permanece estável para todo o conjunto de incertezas admissíveis.
3. Verificação de Desempenho Robusto: se a condição de Estabilidade Robusta é satisfeita, determinar se as especificações de desempenho são satisfeitas para todas as plantas do conjunto de incertezas.

As incertezas em um dado modelo podem ter diversas origens:

- Existência de parâmetros que são conhecidos apenas aproximadamente ou com uma margem de erro.
- Variação dos parâmetros no modelo linearizado devido a não-linearidades ou mudança nas condições de operação do sistema não-linear original.
- Imperfeições nos sensores de medição.
- Desconhecimento da estrutura e da ordem do modelo em altas frequências.
- Opção por se utilizar um modelo mais simples, por causa da complexidade computacional, ainda que haja um modelo bastante detalhado disponível. Desta forma, representam-se as dinâmicas negligenciadas como incertezas.
- Diferença entre o controlador implementado e o originalmente obtido na síntese.

As várias fontes de incertezas no modelo podem ser agrupadas em duas classes principais:

- a) **Incerteza paramétrica:** a ordem e a estrutura do modelo são conhecidas, porém alguns dos parâmetros são incertos.

- b) **Dinâmicas não-modeladas ou negligenciadas:** o modelo utilizado não é preciso devido à falta de pleno conhecimento de sua dinâmica (geralmente em altas frequências), seja por ausência de compreensão do processo físico, seja por negligência deliberada. Qualquer modelo de um sistema real irá, inevitavelmente, conter essa fonte de incerteza.

2.2 REPRESENTAÇÃO DAS INCERTEZAS

Incertezas paramétricas podem ser quantificadas assumindo-se que o parâmetro incerto é limitado dentro de uma região $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. Assim, um dado parâmetro α_p pode ser representado por:

$$\alpha_p = \bar{\alpha} (1 + r_\alpha \delta) \quad (2.1)$$

onde $\bar{\alpha}$ é o valor paramétrico médio, $r_\alpha = (\alpha_{max} - \alpha_{min}) / (\alpha_{max} + \alpha_{min})$ é a incerteza relativa no parâmetro e δ é um escalar real que satisfaça $|\delta| \leq 1$.

As incertezas referentes a dinâmicas negligenciadas e não-modeladas são mais difíceis de serem quantificadas. Essa classe de incertezas é particularmente melhor representada quando se considera uma abordagem no domínio da frequência, o que leva a perturbações complexas normalizadas $\Delta(s)$ de tal forma que $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$.

Há, ainda, uma terceira classe de incertezas, que representa uma ou mais fontes de incertezas paramétricas e/ou dinâmicas não-modeladas, combinadas em um único agrupamento de perturbações. O domínio da frequência também pode bem caracterizar este agrupamento.

Frequentemente, agrupam-se diversas incertezas em uma única *incerteza multiplicativa* da forma:

$$\Pi_i : G_p(s) = G(s)(1 + \omega_I(s)\Delta_I(s)); \quad \underbrace{|\Delta_I(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega,}_{\|\Delta_I\|_\infty \leq 1} \quad (2.2)$$

que pode ser representada pelo diagrama em blocos na FIG. 2.1.

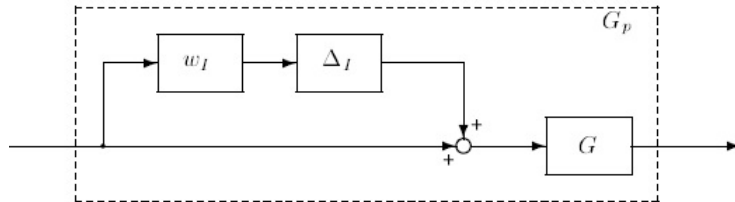


FIG. 2.1: Incerteza multiplicativa de entrada

Define-se uma estrutura geral para o bloco de incertezas utilizando-se a seguinte notação padrão:

$$\Delta = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_{m_r+1}^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_1^c I_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) : \delta_i^r \in \mathbb{R}, \delta_i^c \in \mathbb{C}, \Delta_i^C \in \mathbb{C}^{k_{m_r+m_c+i} \times k_{m_r+m_c+i}} \} . \quad (2.3)$$

Tipicamente, os escalares reais δ_i^r representam incertezas paramétricas, enquanto que os escalares complexos δ_i^c e os blocos complexos cheios Δ_i^C representam dinâmicas não-modeladas ou negligenciadas. Os inteiros m_r , m_c e m_C denotam o número de escalares reais repetidos, escalares complexos repetidos e blocos complexos cheios, respectivamente.

O bloco de incertezas Δ é dito complexo se é composto somente por escalares complexos ou blocos complexos cheios. É dito real se é composto somente por escalares reais. Finalmente, se possui simultaneamente incertezas complexas e reais, é dito misto.

2.3 CONFIGURAÇÃO GERAL DE CONTROLE COM INCERTEZA

O ponto inicial para análise de robustez é a representação de um sistema equivalente, no qual as incertezas são isoladas da parte nominal em uma matriz bloco-diagonal Δ , conforme a FIG. 2.2 e a estrutura em (2.3).

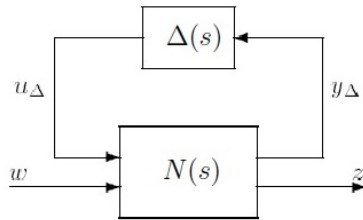


FIG. 2.2: Estrutura $N\Delta$

A transferência $N(s)$ está relacionada à planta generalizada $P(s)$ e ao controlador $C(s)$ através de uma Transformação Linear Fracionária Inferior (LFT, do inglês *Linear Fractional Transformation*) (Ver Seção 7.1.1 do Apêndice):

$$N(s) = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix} = \mathcal{F}_l(P, C) \triangleq P_{11} + P_{12}C(I - P_{22}C)^{-1}P_{21}. \quad (2.4)$$

Em geral, $N(s)$ representa a interconexão inferior da FIG. 2.3.

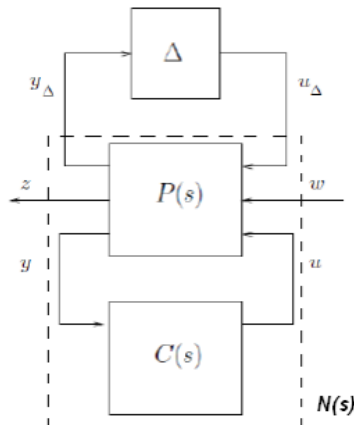


FIG. 2.3: Configuração geral de controle

Ao se desmembrar $N(s)$ como em (2.4), chega-se à planta generalizada $P(s)$, onde:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A estrutura $N\Delta$ é muito utilizada para síntese de controladores. A função de transferência de malha fechada incerta de w para z , $z = F(s) w$, está relacionada a $N(s)$ e $\Delta(s)$ por uma Transformação Linear Fracionária Superior:

$$F = \mathcal{F}_u(N, \Delta) \triangleq N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} \quad (2.6)$$

Para quantificar o desempenho, utiliza-se a norma H_∞ . A partir da estrutura $N\Delta$, podemos definir os problemas de análise de estabilidade e desempenho considerados neste trabalho (SKOGESTAD, 2005):

$$\text{Estabilidade Nominal (EN)} \Leftrightarrow N \text{ é internamente estável} \quad (2.7)$$

$$\text{Desempenho Nominal (DN)} \Leftrightarrow \|N_{22}\|_\infty < 1; \text{ e EN} \quad (2.8)$$

$$\text{Estabilidade Robusta (ER)} \Leftrightarrow F \text{ é estável, } \forall \Delta, \|\Delta\|_\infty \leq 1; \text{ e EN} \quad (2.9)$$

$$\text{Desempenho Robusto (DR)} \Leftrightarrow \|F\|_\infty < 1, \forall \Delta, \|\Delta\|_\infty \leq 1; \text{ e EN} \quad (2.10)$$

Assume-se que cada perturbação individual da EQ. (2.3) seja estável e normalizada. No caso de incertezas com bloco cheio, assume-se que:

$$\bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega, \quad (2.11)$$

onde Δ_i representa uma fonte específica de incerteza. Para uma perturbação escalar complexa, tem-se $|\delta_i(j\omega)| \leq 1, \forall \omega$, e para uma perturbação escalar real, $-1 \leq \delta_i \leq 1$. Como o maior valor singular de uma matriz bloco-diagonal é igual ao maior dos maiores valores singulares dos blocos individuais, segue então que, para $\Delta = \text{diag}\{\Delta_i\}$,

$$\bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega)) \leq 1, \forall \omega, \forall i \Leftrightarrow \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1. \quad (2.12)$$

Com o intuito de se simplificar o modelo de incertezas, pode-se substituir um grupo de incertezas paramétricas por uma única incerteza não-estruturada. Define-se incerteza *não-estruturada* como sendo a utilização de uma matriz Δ de perturbação complexa cheia, normalmente de dimensões compatíveis com as da planta, onde, em cada frequência, qualquer $\Delta(j\omega)$ satisfazendo $\bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega)) \leq 1$ é permitido.

Seis formas comuns de incerteza não-estruturada são mostradas na FIG. 2.4. Nas letras (a), (b) e (c) tem-se incertezas aditiva, multiplicativa de entrada e multiplicativa de saída, respectivamente.

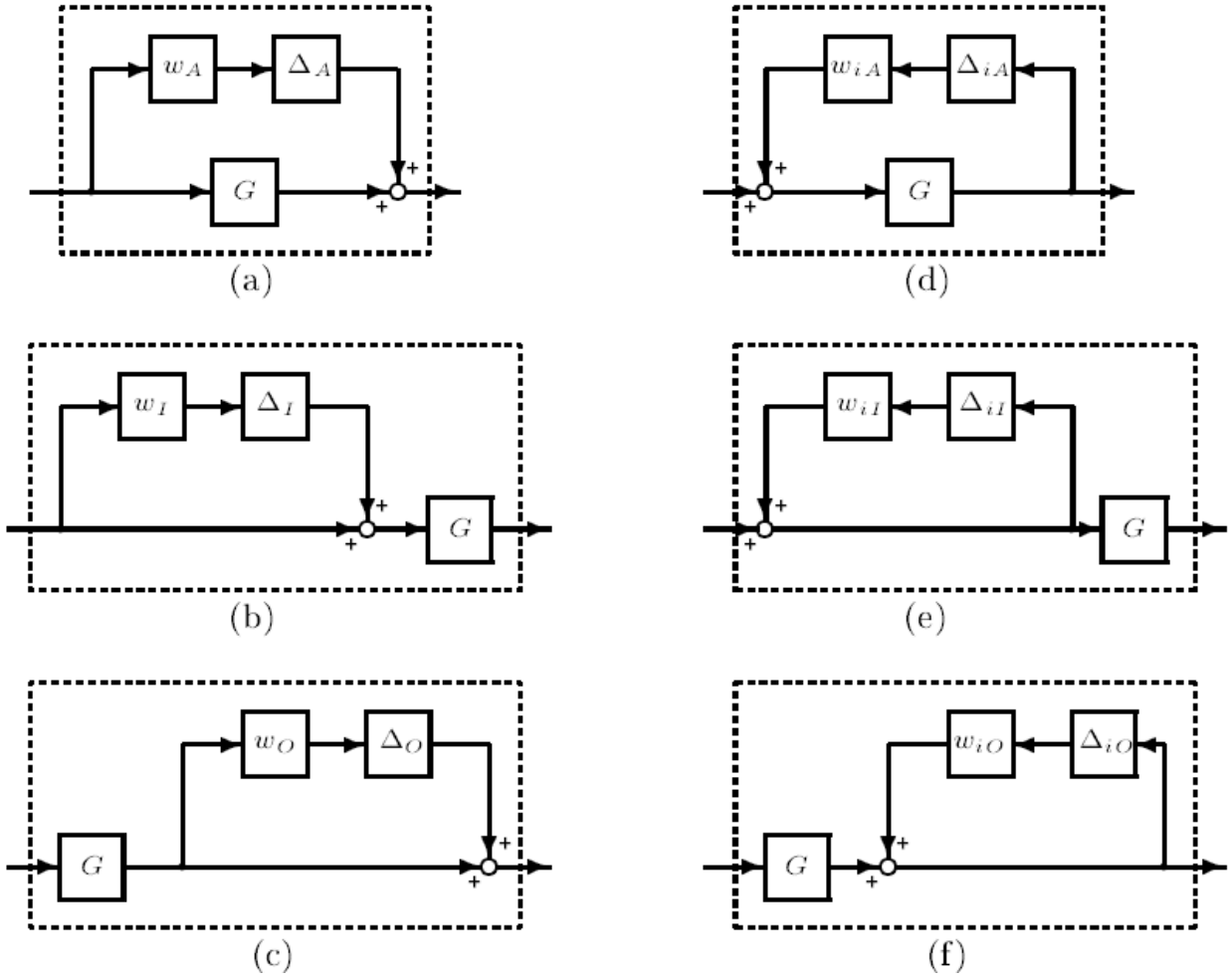


FIG. 2.4: (a) Incerteza aditiva, (b) Incerteza multiplicativa de entrada, (c) Incerteza multiplicativa de saída, (d) Incerteza aditiva inversa, (e) Incerteza multiplicativa de entrada inversa, (f) Incerteza multiplicativa de saída inversa

E nas letras (d), (e) e (f), tem-se incertezas aditiva inversa, multiplicativa de entrada inversa e multiplicativa de saída inversa, respectivamente.

Os conjuntos de incertezas mostrados na FIG. 2.4 são descritos pelas seguintes equações:

$$\Pi_A : G_p = G + E_A; E_a = w_A \Delta_A \quad (2.13)$$

$$\Pi_I : G_p = G(I + E_I); E_I = w_I \Delta_I \quad (2.14)$$

$$\Pi_O : G_p = G(I + E_O)G; E_O = w_O \Delta_O \quad (2.15)$$

$$\Pi_{iA} : G_p = G(I - E_{iA}G)^{-1}; E_{iA} = w_{iA} \Delta_{iA} \quad (2.16)$$

$$\Pi_{iI} : G_p = G(I - E_{iI})^{-1}; E_{iI} = w_{iI} \Delta_{iI} \quad (2.17)$$

$$\Pi_{iO} : G_p = G(I - E_{iO})^{-1}; E_{iO} = w_{iO} \Delta_{iO} \quad (2.18)$$

O sinal negativo na frente dos blocos E 's não tem grande relevância, tendo em vista que Δ pode assumir qualquer sinal em (2.13) a (2.18). Δ denota uma incerteza normalizada, ao passo que E representa a verdadeira incerteza.

Foram utilizadas ponderações escalares w , tal que $E = w\Delta = \Delta w$. Porém, por vezes, pode-se utilizar matrizes de ponderação, $E = W_2 \Delta W_1$, onde W_1 e W_2 são matrizes de transferências dadas.

2.4 ESTABILIDADE ROBUSTA DA ESTRUTURA $M\Delta$

Considere o sistema $N\Delta$ na FIG. 2.2, para o qual a função de transferência de w para z é dada pela EQ. (2.6). Para se analisar apenas a Estabilidade Robusta de F , pode-se rearranjar o sistema em uma estrutura $M\Delta$, conforme mostrado na FIG. 2.5, onde $M(s) = N_{11}(s)$ é a função de transferência da saída para a entrada das incertezas.

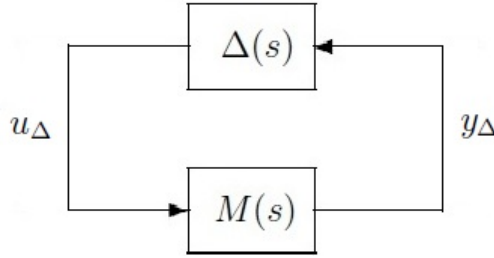


FIG. 2.5: Estrutura $M\Delta$

Suponha que o sistema é nominalmente estável, ou seja, com $\Delta = 0$. Isto significa que o todo de N é estável, e não somente N_{22} . Também assuma que Δ é estável. Vê-se, diretamente, a partir da EQ. (2.6) que a única fonte de instabilidade possível está no termo de realimentação $(I - N_{11}\Delta)^{-1}$. Então, quando há Estabilidade Nominal, a estabilidade do sistema na FIG. 2.2 pode ser inferida pela estabilidade da estrutura $M\Delta$ na FIG. 2.5, onde $M(s) = N_{11}(s)$.

Em virtude disto, torna-se importante encontrar condições para se checar a estabilidade da estrutura $M\Delta$. O teorema a seguir decorre do Teorema de Nyquist Generalizado (Ver Seção 7.2.1 do Apêndice) e pode ser aplicado a qualquer conjunto convexo de incertezas. As provas de todos os teoremas apresentados encontram-se na Seção 7.2 do Apêndice.

Teorema 2.1 (Condição de Estabilidade do Determinante (SKOGESTAD, 2005)). *Assuma que o sistema nominal $M(s)$ e o bloco de incertezas $\Delta(s)$ da FIG. 2.5 são estáveis. Considere o conjunto convexo de incertezas Δ de tal forma que, se Δ' é admissível, então $c\Delta'$ também o é, onde c é qualquer **real** escalar, tal que $|c| \leq 1$. Então, o sistema $M\Delta$ da FIG. 2.5 é estável para todo Δ admissível (ER) se e somente se:*

$$\text{O Diagrama de Nyquist de } \det(I - M\Delta(j\omega)) \text{ não envolve a origem, } \forall \Delta, \forall \omega \quad (2.19)$$

$$\Leftrightarrow \det(I - M\Delta(j\omega)) \neq 0, \forall \omega, \forall \Delta \quad (2.20)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i(M\Delta) \neq 1, \forall i, \forall \omega, \forall \Delta \quad (2.21)$$

O teorema a seguir é um caso especial do TEO. 2.1 e se aplica na presença de incertezas puramente complexas.

Teorema 2.2 (Condição do Raio Espectral para Incertezas Complexas (SKOGESTAD, 2005)). *Assuma que o sistema nominal $M(s)$ e o bloco de incertezas $\Delta(s)$ são estáveis. Considere o conjunto de incertezas Δ de tal forma que, se Δ' é admissível, então $c\Delta'$ também o é, onde c é qualquer **complexo** escalar, tal que $|c| \leq 1$. Então, o sistema- $M\Delta$ da FIG. 2.5 é estável para todo Δ admissível (ER) se e somente se:*

$$\rho(M\Delta(j\omega)) < 1, \forall \omega, \forall \Delta \quad (2.22)$$

ou equivalentemente:

$$\text{ER} \Leftrightarrow \max_{\Delta} \rho(M\Delta(j\omega)) < 1, \forall \omega \quad (2.23)$$

No caso ainda mais particular de incertezas não-estruturadas, temos o Teorema do Ganho Pequeno, conforme enunciado a seguir:

Teorema 2.3 (Teorema do Ganho Pequeno (SKOGESTAD, 2005)). *Considere o sistema MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) em malha fechada, com realimentação negativa, mostrado na FIG. 2.6 e assumo que não ocorram cancelamentos internos de polos do semiplano da direita na matriz de transferência $L(s)$, isto é, $L(s)$ não possui modos instáveis escondidos. Considere a*

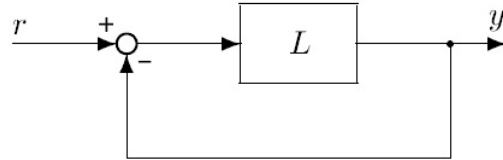


FIG. 2.6: Sistema com realimentação negativa

função de transferência de malha aberta $L(s)$ estável. Então, o sistema em malha fechada é estável se:

$$\|L(j\omega)\| < 1, \forall \omega, \quad (2.24)$$

onde $\|L\|$ denota qualquer norma de matriz que satisfaça $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Este teorema não considera informação de fase e, portanto, é independente do sinal da realimentação. Além disso, qualquer norma pode ser utilizada, inclusive, o valor singular $\bar{\sigma}(L)$.

Baseado nesse teorema, sendo $L(s) = M(s)\Delta(s)$, conclui-se que, para $\|\Delta(s)\|_{\infty} \leq 1$:

$$\text{ER} \Leftrightarrow \bar{\sigma}(M(j\omega)) \cdot \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1, \forall \omega, \forall \Delta. \quad (2.25)$$

No caso de incerteza estruturada, a condição na EQ. (2.25) torna-se apenas suficiente para Estabilidade Robusta. Sendo Δ bloco-diagonal, e portanto estruturado, pode-se chegar a uma

condição de Estabilidade Robusta menos conservadora que a obtida em (2.25), utilizando-se o fato de que a estabilidade independe da presença de multiplicadores estáveis. Para tanto, introduz-se o multiplicador $D(s)$, tal que $\Delta(s)D(s) = D(s)\Delta(s)$. Reescalonam-se, então, as entradas e saídas de M e Δ , inserindo-se matrizes D e D^{-1} em ambos os lados como mostrado na FIG 2.7.

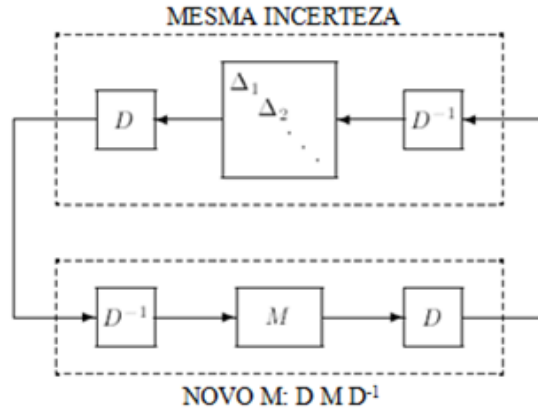


FIG. 2.7: Uso de multiplicador D , tal que $\Delta D = D \Delta$

O reescalonamento acima não tem qualquer efeito sobre a estabilidade. Isto significa que a EQ. (2.25) também se aplica se substituirmos M por $D M D^{-1}$. Sendo assim, tem-se:

$$\text{ER se } \bar{\sigma}(D M D^{-1}) < 1, \forall \omega. \quad (2.26)$$

Isto vale para qualquer D que comute com Δ . Portanto, uma condição para Estabilidade Robusta menos conservadora pode ser obtida através da minimização, em cada frequência, do maior valor singular escalonado. Assim, tem-se:

$$\text{ER se } \min_{D(\omega) \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D(\omega) M(j\omega) D(\omega)^{-1}) < 1, \forall \omega, \quad (2.27)$$

onde \mathcal{D} é o conjunto de matrizes com estrutura compatível com a de Δ , ou seja, tal que $\Delta D = D \Delta$. Note que quando Δ é uma matriz cheia, pode-se escolher $D = dI$ e tem-se $\bar{\sigma}(D M D^{-1}) = \bar{\sigma}(M)$. Nesse caso, da EQ. (2.27) reencontramos a EQ. (2.25) e a condição se torna necessária.

Entretanto, quando Δ é estruturado, ganha-se mais graus de liberdade em D , e, assim, $\bar{\sigma}(D M D^{-1})$ pode ser significativamente menor que $\bar{\sigma}(M)$. Há que se ressaltar, ainda, que a EQ. (2.27) é essencialmente uma versão escalonada do Teorema do Ganho Pequeno. Em suma, a estrutura $M \Delta$ da FIG. 2.5 é estável para todas as matrizes Δ bloco-diagonais que satisfazem $\|\Delta(j\omega)\|_{\infty} \leq 1, \forall \omega$ se:

$$\min_{D(\omega) \in \mathcal{D}} \|D(\omega) M(j\omega) D(\omega)^{-1}\|_{\infty} < 1, \forall \omega, \quad (2.28)$$

onde D é compatível com a estrutura de Δ .

2.5 VALOR SINGULAR ESTRUTURADO μ

O valor singular estruturado μ provê uma generalização do maior valor singular $\bar{\sigma}$ e do raio espectral ρ . Utiliza-se o valor singular estruturado para se chegar a condições necessárias e suficientes

para Estabilidade Robusta e Desempenho Robusto.

Seja, novamente, a estrutura $M\Delta$ mostrada na FIG. 2.5. Da condição de estabilidade do determinante na EQ. (2.20), tem-se que:

$$\text{ER} \Leftrightarrow \det(I - M\Delta(j\omega)) \neq 0, \forall \omega, \forall \Delta \quad (2.29)$$

A motivação para a definição da grandeza μ é responder a seguinte questão: dada uma matriz $M \in \mathbb{C}^{p \times q}$, qual é o menor $\Delta \in \mathbb{C}^{q \times p}$ (medido através do maior valor singular $\bar{\sigma}(\Delta)$) tal que $\det(I - M\Delta) = 0$? Ou seja, qual o menor Δ que leva o sistema à instabilidade?

Definição 2.1 (Valor Singular Estruturado μ (SKOGESTAD, 2005)). *Seja M uma matriz complexa e seja Δ o conjunto de matrizes complexas com estrutura bloco-diagonal dada pela EQ. (2.3). A função real não-negativa $\mu(M)$, chamada de valor singular estruturado é definida por:*

$$\mu(M) \triangleq \left(\min_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0 \} \right)^{-1}, \quad (2.30)$$

com $\mu(M) \triangleq 0$ se não existe $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ tal que $\det(I - M\Delta) = 0$.

Claramente, percebe-se que $\mu(M)$ depende não somente de M , mas também da estrutura admissível para Δ . Tal dependência é, por vezes, explicitada através do uso da notação $\mu_{\Delta}(M)$.

Para o caso em que Δ é não-estruturado (matriz cheia), o menor Δ que leva à singularidade possui $\bar{\sigma}(\Delta) = 1/\bar{\sigma}(M)$ e tem-se $\mu(M) = \bar{\sigma}(M)$.

Um valor de $\mu = 1$ significa que existe uma incerteza com $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$ que é grande o suficiente para fazer com que $(I - M\Delta)$ seja singular. Valores elevados de μ indicam pouca robustez, pois, neste caso, há alguma pequena incerteza que torna $(I - M\Delta)$ singular. Inversamente, valores reduzidos de μ indicam boa robustez.

Dois propriedades de μ que valem tanto para incertezas reais como complexas são (SKOGESTAD, 2005):

- $\mu(\alpha M) = |\alpha| \mu(M)$, para qualquer escalar α real.
- Seja $\mathbf{\Delta} = \text{diag} \{ \Delta_1, \Delta_2 \}$ um conjunto bloco-diagonal de incertezas. Considere a partição da matriz M de acordo com as dimensões de Δ_1 e Δ_2 . Então:

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) \geq \max \{ \mu_{\Delta_1}(M_{11}), \mu_{\Delta_2}(M_{22}) \} \quad (2.31)$$

Para chegar ao resultado obtido na EQ. (2.31), considere $\det(I - \frac{1}{\mu} M\Delta)$ onde $\mu = \mu_{\mathbf{\Delta}}(M)$ e utilize a Fórmula de Schur (Ver Seção 7.1.4 do Apêndice), com $A_{11} = I - \frac{1}{\mu} M_{11}\Delta_1$ e $A_{12} = I - \frac{1}{\mu} M_{22}\Delta_2$.

Em outras palavras, a EQ. (2.31) mostra que a característica de robustez em relação a duas incertezas tomadas juntas é, no mínimo, tão ruim quanto a pior incerteza considerada sozinha, ou seja, não é possível melhorar Estabilidade Robusta incluindo-se outra incerteza.

As próximas propriedades listadas valem somente para incertezas complexas e permitem estabelecer limites para μ :

- **Limite inferior.** Para incerteza complexa escalar repetida, $\Delta = \delta I$, com $\delta \in \mathbb{C}$, $\mu(M) = \rho(M)$.
- **Limite superior.** Para incerteza complexa cheia, $\Delta = \mathbb{C}^{n \times n}$ (incerteza não-estruturada), $\mu(M) = \bar{\sigma}(M)$.

Em virtude disto, pode-se concluir que para incertezas complexas, em geral, μ é limitado inferiormente pelo raio espectral de M e superiormente pelo maior valor singular de M :

$$\rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M). \quad (2.32)$$

- **Limite superior menos conservador.** Seja \mathcal{D} o conjunto de matrizes D que comutam com Δ , isto é, tal que $D\Delta = \Delta D$. Então, tem-se

$$\mu(M) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (2.33)$$

O problema de minimização em (2.33) admite uma formulação convexa, podendo-se, assim, determinar o mínimo global. Apesar de o resultado acima ter sido obtido para incertezas complexas, este também permanece válido para incertezas reais ou mistas, tendo em vista que perturbações complexas incluem perturbações reais como caso especial. Evidências numéricas sugerem que o limite superior é pouco conservador no caso de quatro blocos ou mais (MEINSMA, 1997). Na literatura, o pior exemplo de que se tem conhecimento apresenta limite superior 15% maior que o valor exato de μ (BALAS, 1993).

2.6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE ROBUSTA UTILIZANDO O VALOR SINGULAR ESTRUTURADO

Considere a estabilidade da estrutura $M\Delta$ na FIG. 2.5 para o caso em que Δ é um conjunto de incertezas bloco-diagonais limitadas em norma. A partir da Condição de Estabilidade do Determinante, vista no TEO. 2.1, que se aplica tanto a incertezas complexas como reais, tem-se:

$$\text{ER} \Leftrightarrow \det(I - M\Delta(j\omega)) \neq 0, \quad \forall \omega, \forall \Delta, \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega. \quad (2.34)$$

O problema na EQ. (2.34) apresenta uma condição "sim/não", que dá origem ao uso mais comum de μ como um teste de robustez no domínio da frequência. O teorema a seguir explicita esta abordagem e fornece uma condição necessária e suficiente para que haja Estabilidade Robusta.

Teorema 2.4 (Estabilidade Robusta para Estrutura Bloco-Diagonal de Incertezas (SKOGESTAD, 2005)). *Assuma que o sistema nominal $M(s)$ e o bloco de incertezas $\Delta(s)$ sejam estáveis. Então, a estrutura $M\Delta$ (FIG. 2.5) é estável para todo Δ admissível, com $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1, \forall \omega$, se e somente se,*

$$\mu(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega. \quad (2.35)$$

Este teorema indica que é possível avaliar as propriedades de robustez em estabilidade de um sistema em malha fechada pesquisando-se o valor de μ em todo o domínio de frequência. O pico do valor singular estruturado determina o tamanho máximo admissível de incerteza para a qual se garante que o sistema em malha fechada mantém-se estável. Note que $\mu < 1, \forall \omega$, se, e somente se, $\max_{\omega} \mu < 1$.

A varredura de todo o domínio de frequência pode ter um alto custo computacional. Tendo em vista que μ pode ser descontínuo (YOUNG, 2001) e a fim de se tentar minimizar a perda de pontos importantes, utiliza-se uma grade de frequências suficientemente densa dentro de uma faixa considerada apropriada.

A EQ. (2.35) para Estabilidade Robusta pode ser reescrita como:

$$\text{ER} \Leftrightarrow \mu(M(j\omega)) \cdot \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega, \quad (2.36)$$

que pode ser interpretada como o *Teorema do Ganho Pequeno Generalizado*, onde também é levada em consideração a estrutura de Δ .

Pode-se argumentar se o TEO. 2.4 é realmente um teorema ou apenas uma releitura da definição de μ . Em todo caso, vê-se pela EQ. (2.35) que é trivial checar robustez em estabilidade desde que o valor de μ possa ser computado.

2.7 VALOR SINGULAR ESTRUTURADO OBLÍQUO ν

Para explicar de maneira sucinta o conceito do valor singular estruturado oblíquo ν , considere um valor de $\mu = 1,1$ em um problema de Estabilidade Robusta. Isso significa que todas as incertezas do sistema devem ser diminuídas em magnitude por um fator de 1,1 para que se garanta Estabilidade Robusta.

Mas se o desejo é fixar a faixa de variação de algumas incertezas, então o quão grande podem ser as outras antes que a instabilidade ocorra? O valor que quantifica o quão grande essas fontes de incertezas podem ser é definido como valor singular estruturado oblíquo.

A descrição matemática de ν é semelhante à de μ e é desenvolvida em relação à estrutura $M\Delta$ da FIG. 2.5. O bloco de incertezas Δ é dividido em dois sub-blocos, Δ_f (bloco contendo as incertezas com faixa de variação fixa) e Δ_v (bloco contendo as incertezas com faixa de variação livre).

Sejam Δ_f e Δ_v com a mesma estrutura geral de Δ , presente na EQ. (2.3). A matriz de transferência M é particionada de acordo com as dimensões de Δ_f e Δ_v .

Como Δ_f será limitado em norma, define-se uma nova estrutura de bloco, a bola unitária:

$$\mathbf{B}\Delta_f = \{\Delta_f \in \Delta_f : \bar{\sigma}(\Delta_f) \leq 1\} \quad (2.37)$$

A partir dessas considerações, é possível definir uma nova estrutura geral para o bloco de incertezas que será utilizado no cálculo de ν :

$$\Delta_c = \{\Delta_c = \text{diag}(\Delta_f, \Delta_v) : \Delta_f \in \mathbf{B}\Delta_f, \Delta_v \in \Delta_v\} \quad (2.38)$$

A estrutura $M\Delta$ para análise ν é vista na FIG. 2.8.

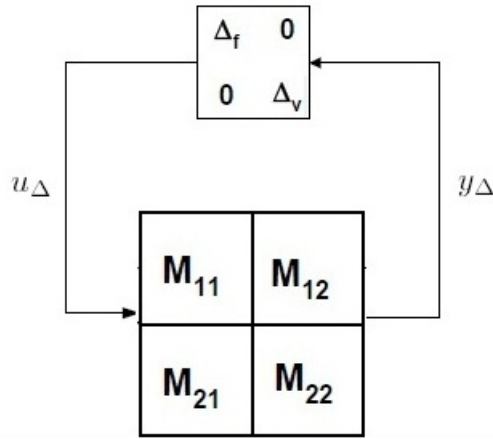


FIG. 2.8: Estrutura $M\Delta$ particionada para análise ν

Definição 2.2 (Valor singular estruturado oblíquo ν). *Seja M a matriz complexa que representa o valor da transferência $M(s)$ em $s = j\omega$ e, de maneira semelhante, seja Δ_c a representação do valor de $\Delta_c(s)$ em $s = j\omega$. O valor singular estruturado oblíquo $\nu(M)$ é definido como:*

$$\nu(M) = \left(\min_{\Delta_c \in \mathbf{\Delta}_c} \{ \bar{\sigma}(\Delta_v) \mid \det(I - \Delta_c M) = 0 \} \right)^{-1} \quad (2.39)$$

com $\nu(M) = 0$ se não existe $\Delta_c \in \mathbf{\Delta}_c$ tal que $\det(I - \Delta_c M) = 0$.

2.8 DESEMPENHO ROBUSTO

Muitas vezes, a Estabilidade Robusta não é a única propriedade que precisa ser avaliada em um sistema em malha fechada. Normalmente, existem distúrbios exógenos que atuam sobre o sistema, os quais, sob influência das incertezas, podem acarretar erros de monitoramento e regulação.

Na maioria dos casos, muito antes do início da instabilidade, o desempenho em malha fechada pode degradar-se a ponto de atingir níveis inaceitáveis. Em virtude disto, surge a necessidade de se realizar um teste de Desempenho Robusto que tenha como objetivo obter o pior caso de degradação de desempenho, associado a um determinado nível de incertezas.

2.8.1 TESTE μ PARA DESEMPENHO ROBUSTO

Primeiramente, será apresentado o Teorema Principal de Malha (*Main Loop Theorem*), que é base para o teste proposto.

Teorema 2.5 (Teorema Principal de Malha (PACKARD, 1993)). *Seja G a matriz complexa particionada da seguinte maneira:*

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}.$$

Suponha que existam 2 blocos com a estrutura diagonal definida pela EQ. (2.3), Δ_1 e Δ_2 , que são compatíveis com as dimensões de G_{11} e G_{12} , respectivamente. Define-se, então, a estrutura $\hat{\Delta}$ da seguinte maneira:

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 \in \mathbf{\Delta}_1, \quad \Delta_2 \in \mathbf{\Delta}_2 \quad (2.40)$$

Desta forma, obtém-se a estrutura $G\hat{\Delta}$, que é similar à estrutura $M\Delta$:

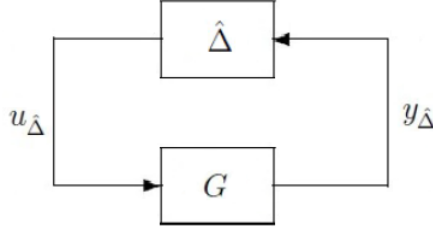


FIG. 2.9: Estrutura $G\hat{\Delta}$

O Teorema Principal de Malha estabelece que:

$$\mu_{\hat{\Delta}}(G) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu_{\Delta_1}(G_{11}) < 1, & e \\ \mu_{\Delta_2}(\mathcal{F}_u(G, \Delta_1)) < 1, & \text{com } \bar{\sigma}(\Delta_1) \leq 1. \end{cases} \quad (2.41)$$

Conforme discutido na Seção 2.3, para um sistema nominalmente estável, a condição de Desempenho Robusto é dada por:

$$\text{DR} \quad \Leftrightarrow \quad \|F\|_{\infty} < 1, \forall \Delta, \|\Delta\|_{\infty} \leq 1, \quad (2.42)$$

onde $F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$ representa a transferência de w para z da estrutura $N\Delta$ (FIG. 2.2).

O Desempenho Robusto pode ser tratado como um caso especial de Estabilidade Robusta através da criação de um bloco fictício de incertezas Δ_p para representar as especificações de desempenho H_{∞} (FIG. 2.10), onde Δ_p é uma matriz complexa cheia com as mesmas dimensões de F^T .

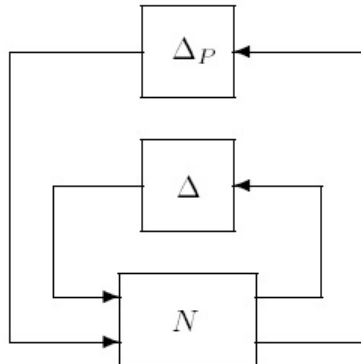


FIG. 2.10: Δ_p incluso na estrutura $N\Delta$

Define-se, então, o bloco de incertezas aumentado

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

dando origem a estrutura $N\hat{\Delta}$:

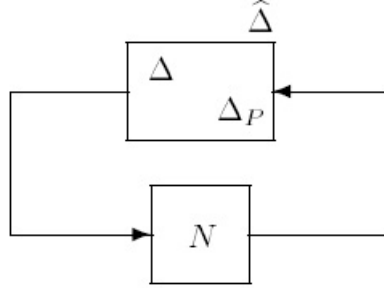


FIG. 2.11: Estrutura $N\hat{\Delta}$

Na verdade, o problema de Desempenho Robusto original equivale ao problema de Estabilidade Robusta da estrutura aumentada, como indicado pelo teorema a seguir:

Teorema 2.6 (Desempenho robusto). *Assuma que um dado sistema nominalmente estável seja representado pela estrutura $N\Delta$. O sistema é internamente estável e $\|\mathcal{F}_u(N, \Delta)\|_\infty < 1$, $\forall \Delta$, $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ (DR), se, e somente se,*

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega. \quad (2.44)$$

Observações:

- A condição dada pelo TEO. 2.6 permite testar se $\|F(s)\|_\infty < 1$ para todos os Δ possíveis sem ter que testar cada Δ individualmente. Essencialmente, μ é definido tal que o pior caso seja considerado.
- Δ_p tem que ser um bloco complexo cheio. Com essa hipótese, no caso nominal ($\Delta = 0$), $\mu_{\hat{\Delta}}(N) = \mu_{\Delta_p}(N_{22}) = \bar{\sigma}(N_{22})$. Se $\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1$, $\forall \omega$, então $\bar{\sigma}(N_{22}) < 1$, $\forall \omega$, o que representa a condição de Desempenho Nominal ($\|N_{22}(s)\|_\infty < 1$).
- Uma vez que $\hat{\Delta}$ sempre possui estrutura, o uso da norma H_∞ , $\|N(s)\|_\infty < 1$, geralmente é conservador para análise de Desempenho Robusto.
- De acordo com as propriedades de μ discutidas na Seção 2.5, pode-se afirmar que:

$$\underbrace{\mu_{\hat{\Delta}}(N)}_{DR} \geq \max \left\{ \underbrace{\mu_{\Delta}(N_{11})}_{ER}, \underbrace{\mu_{\Delta_p}(N_{22})}_{DN} \right\} \quad (2.45)$$

ou seja, Desempenho Robusto implica Estabilidade Robusta e Desempenho Nominal, em sistemas com Estabilidade Nominal.

A condição dada pelo TEO. 2.6 fornece um teste para Desempenho Robusto ($\|F(s)\|_\infty < 1$, $\forall \Delta$, $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$), mas não permite determinar o chamado *pior caso de desempenho*, associado à seguinte pergunta: qual será o maior valor de ganho da transferência F levando-se em conta todas as incertezas admissíveis ($\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$)?

Note que um valor de $\mu_{\hat{\Delta}}(N) = 0,8$ corresponde a uma incerteza Δ com $\bar{\sigma}(\Delta) = 1,25$ (ou seja $1/0,8$), o que significa que a restrição não foi saturada, e que, conseqüentemente, ainda há margem para degradação do valor do ganho da transferência F .

O pior caso de ganho pode ser obtido resolvendo-se um problema ν , com restrição de variação para Δ . A solução desse problema provavelmente levará à saturação da restrição. Note também que a condição de Desempenho Robusto pode ser inferida a partir da informação do *Pior Caso de Desempenho*. Significa então dizer que a condição de Desempenho Robusto pode ser testada, alternativamente, por:

$$\nu_{\Delta_c}(N(j\omega)) < 1, \forall \omega, \quad \Rightarrow \quad \text{DR} \quad (2.46)$$

com $\Delta_c = \hat{\Delta}$, $\Delta_f = \Delta$ e $\Delta_v = \Delta_p$.

2.9 SÍNTESE μ

Dada a configuração geral de controle com incerteza da FIG. 2.3, o projeto de síntese considerado envolve encontrar o controlador que minimiza o valor singular estruturado μ do sistema em malha fechada, tendo em vista que este é uma poderosa ferramenta de análise de robustez. Desta forma, pretende-se que o controlador obtido satisfaça as especificações de desempenho determinadas, definindo-se, assim, o problema de síntese μ de controladores robustos.

2.9.1 ITERAÇÃO DK

Nesta seção, a teoria aqui desenvolvida irá se concentrar nos problemas que envolvam apenas incertezas complexas. Em virtude disto, a síntese utiliza apenas multiplicadores D . Na Seção 3.3, serão tratadas as situações em que estão presentes incertezas mistas.

Até o presente momento, não há método direto que permita sintetizar um controlador μ -ótimo. Entretanto, para incertezas complexas, um método conhecido como Iteração DK está disponível (YOUNG, 1996). Este método combina síntese H_∞ e análise μ e é bastante popular.

O ponto de partida é o limite superior de μ em termos do maior valor singular escalonado

$$\mu(N) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DND^{-1}) \quad (2.47)$$

A ideia principal é encontrar o controlador que minimiza o valor de pico, em toda frequência, desse limite superior, isto é,

$$\min_K (\min_{D \in \mathcal{D}} \|DN(K)D^{-1}\|_\infty) \quad (2.48)$$

através da minimização de $\|DN(K)D^{-1}\|_\infty$, alternadamente, com respeito tanto a K como a D (sempre mantendo um deles fixo).

Para iniciar as iterações, pode-se selecionar uma matriz de transferência $D(s)$, com estrutura apropriada, que seja racional e estável. A matriz identidade é, normalmente, uma boa escolha inicial para D . A Iteração DK é feita da seguinte forma (SKOGESTAD, 2005):

1. **Passo – K.** Sintetizar um controlador H_∞ : $\min_K \|DN(K)D^{-1}\|_\infty$, com $D(s)$ fixa.
2. **Passo – D.** Encontrar $D(j\omega)$ que minimize, em cada frequência, $\bar{\sigma}(DND^{-1}(j\omega))$, com N fixa.
3. Ajustar a magnitude de cada elemento de $D(j\omega)$, a fim de que a função de transferência $D(s)$ seja estável e de fase mínima e retornar ao Passo 1.

A iteração pode continuar até que um desempenho satisfatório seja atingido, $\|DND^{-1}\|_\infty < 1$, ou até que a norma H_∞ não decresça mais. O grande problema desta abordagem é que, apesar de cada passo de minimização ser convexo (Passo-D e Passo-K), a convexidade conjunta *não* é garantida. Não há sequer garantia de otimalidade local, embora esta possa ocorrer.

Uma outra limitação reside no fato de que a ordem do controlador resultante de cada iteração é igual à soma da ordem da planta, do número de estados das ponderações e do dobro do número de estados em $D(s)$.

Com o intuito de superar estas limitações da Iteração DK , em (APKARIAN, 2011) foi proposto um método para a síntese de controladores que encapsula os multiplicadores juntamente com o controlador, obtendo um controlador aumentado de estrutura especial. A síntese é, então, realizada de uma só vez, fixando-se, de antemão, a ordem do controlador e dos multiplicadores. Esta técnica, aqui denominada de **síntese μ não-diferenciável**, será objeto de estudo do próximo capítulo.

3 SÍNTESE μ NÃO-DIFERENCIÁVEL DE CONTROLADORES

3.1 QUADRO DE TRABALHO

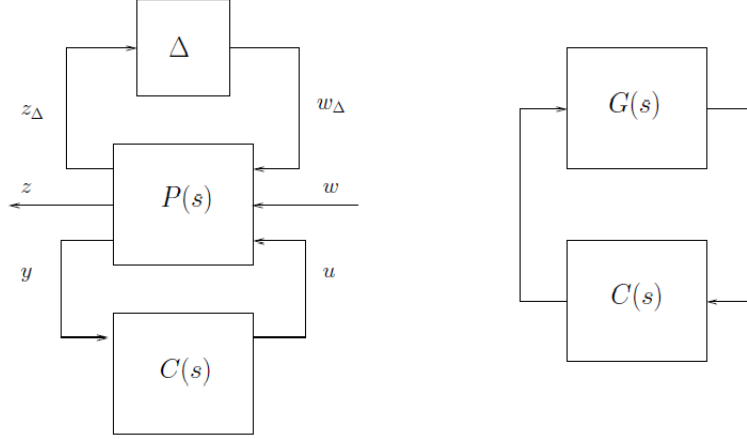


FIG. 3.1: Interconexão para a síntese μ

A interconexão geral para a síntese robusta discutida neste capítulo é mostrada na FIG. 3.1, onde a planta de síntese $P(s)$ é um sistema linear invariante no tempo, $C(s)$ é o controlador, também linear invariante no tempo, a ser projetado e Δ representa as incertezas presentes.

Para fins de aplicação da técnica a ser discutida, será feita uma redefinição da estrutura geral para o bloco de incertezas em (2.3) utilizando-se a seguinte notação descrita em (APKARIAN, 2011):

$$\Delta = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_q I_{r_q}, \Delta_P) : \delta_i \in \mathbb{F}, \Delta_P \in \mathbb{C}^{m_1 \times m_1} \}, \quad (3.1)$$

com $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} , dependendo do contexto, e $N = \sum_{i=1}^q r_i + m_1$. Referimo-nos a $\delta_i I_{r_i}$, com $\delta_i \in \mathbb{C}$, como sendo incertezas complexas escalares repetidas, ao passo que, se $\delta_i \in \mathbb{R}$, temos incertezas reais paramétricas repetidas. Δ_P é o bloco de desempenho, sendo complexo cheio.

Para facilitar a notação, introduzem-se conjuntos reduzidos, da seguinte forma:

$$\Delta_{\mathbb{F}} = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_q I_{r_q} : \delta_i \in \mathbb{F}, i = 1, \dots, q \}, \mathbb{F} = \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$$\Delta_{\mathbf{P}} = \{ \Delta = \Delta_P \in \mathbb{C}^{m_1 \times m_1} \}. \quad (3.3)$$

O par de sinais $(w_\Delta, z_\Delta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ representa o canal de incerteza, $(w, z) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_1}$ o canal de desempenho e $(u, y) \in \mathbb{R}^{m_2} \times \mathbb{R}^{p_2}$ é o canal de controle.

Assume-se que a planta P é realizável em espaço de estados e tem a seguinte representação:

$$P(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_\delta & B_1 & B_2 \\ \hline C_\delta & D_{\delta\delta} & D_{\delta 1} & D_{\delta 2} \\ C_1 & D_{1\delta} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{2\delta} & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]. \quad (3.4)$$

A planta P descreve como as incertezas Δ impactam a dinâmica do sistema, como o controlador $C(s)$ age nessa dinâmica e determina um canal de desempenho (w, z) que reflete as especificações de projeto. É construída tomando-se por base uma matriz de transferência $G(s)$, dada por

$$G(s) \triangleq C_G(sI - A_G)^{-1}B_G + D_G, \quad D_G \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_2}. \quad (3.5)$$

A construção de $P(s)$ é, então, feita a partir de $G(s)$ adicionando-se ponderações (filtros) que enfatizam faixas de frequência apropriadamente escolhidas (MCFARLANE, 1992; SKOGESTAD, 2005). Denota-se por $A(G(s), C(s))$ a matriz de estados resultante da realimentação positiva de $G(s)$ e $C(s)$. A Estabilidade Nominal da FIG. 3.1 pode ser testada via abscissa espectral $\alpha\{A(G(s), C(s))\} \leq -\epsilon$, para algum $\epsilon > 0$.

Considerando a estrutura dada pelas EQ(s) (3.1), (3.2) e (3.3), tem-se que a principal ferramenta para se avaliar a robustez em desempenho da interconexão da FIG. 3.1 é dada pelo TEO. 2.5, que estabelece que, assumindo-se Estabilidade Nominal interna, a interconexão é bem-posta, internamente estável para todo $\Delta \in \mathbf{B}\Delta_{\mathbb{F}}$, e atinge as especificações de robustez

$$\|\mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(P(s), C(s)), \Delta)\|_\infty < 1, \quad \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta_{\mathbb{F}}, \quad (3.6)$$

se, e somente se,

$$\mu_\Delta(\mathcal{F}_l(P(s), C(s))) < 1, \quad \forall s = j\omega, \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (3.7)$$

onde, neste caso, Δ é a estrutura diagonal aumentada $\Delta = \text{diag}(\Delta_{\mathbb{F}}, \Delta_{\mathbb{P}})$. O gráfico com o valor de pico de μ_Δ captura o inverso do tamanho da maior incerteza à qual um sistema pode ser submetido e, ainda assim, manter robustez em desempenho.

3.2 SÍNTESE μ NÃO-DIFERENCIÁVEL COMPLEXA

Nesta seção, o foco está no caso em que $\delta_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, \dots, q$. À exceção de casos extremamente favoráveis (PACKARD, 1993; MEINSMA, 1997), μ é essencialmente intratável e substituído por seu limite superior. Isto é, a condição de Desempenho Robusto, dada pela EQ. (3.7), é válida sempre que existir, para cada ω , D -multiplicadores D_ω tais que:

$$\bar{\sigma}(D_\omega \mathcal{F}_l(P(j\omega), C(j\omega)) D_\omega^{-1}) < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (3.8)$$

onde, para todo ω ,

$$D_\omega \in \mathbf{D}_\Delta \triangleq \{D : D \in \mathbb{C}^{N \times N}, \det(D) \neq 0, \Delta D = D\Delta, \forall \Delta \in \Delta\}. \quad (3.9)$$

A notação D_ω é usada para designar matrizes de transferência arbitrárias dependentes da frequência.

Segue da definição da EQ. (3.9) e da forma de Δ na EQ. (3.1) que os D_ω -multiplicadores possuem a seguinte estrutura:

$$\text{diag}(D_1, \dots, D_q, d_P I_{m_1}), D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, d_P \in \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

Note que a sequência infinita $(D_\omega)_\omega$ não necessita ser estável. Se reformularmos a EQ. (3.8) (FAN, 1991; APKARIAN, 2011), teremos

$$\mathcal{F}_l(P(j\omega), C(j\omega))^H S_\omega \mathcal{F}_l(P(j\omega), C(j\omega)) - S_\omega \prec 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (3.11)$$

onde $S_\omega \triangleq D_\omega^H D_\omega \succ 0$. Obteve-se, desta forma, um conjunto infinito de restrições LMI indexadas por ω .

Na abordagem da síntese μ clássica, representada pela Iteração DK , o termo à esquerda na EQ. (3.8) é minimizado, alternando-se minimizações sobre $C(s)$ e $D(s)$, com um destes termos fixo, conforme visto no capítulo anterior.

A obrigação, na Iteração DK , de se ter D -multiplicadores estáveis e de fase mínima origina limitações inerentes à síntese H_∞ , a qual, por definição, deve apresentar estabilidade interna da planta escalonada em malha fechada $D(s)\mathcal{F}_l(P(s), C(s))D(s)^{-1}$.

À exceção de notáveis exceções (SAFONOV, 1993; YOUNG, 1994), o procedimento, como um todo, está restrito a blocos complexos cheios $\Delta_i \in \mathbb{C}^{f_i \times f_i}$ já que os D -multiplicadores podem ser simplificados para $D_i(s) = d_i(s)I_{r_i}$.

O esquema delineado tornar-se-ia consideravelmente mais complexo e custoso computacionalmente se blocos $\delta_i I_{r_i}$ estivessem presentes, pois, neste caso, os D -multiplicadores seriam sistemas LTI cheios e não-estruturados $D(s)$.

Outro impedimento é o aumento da ordem do controlador. Na síntese H_∞ de ordem plena, tanto a ordem da planta vista na EQ. (3.4), como a ordem dos D -multiplicadores acumulam-se na ordem de $C(s)$.

As dificuldades retromencionadas podem ser superadas, transformando-se a síntese μ com D -multiplicadores em um programa não-diferenciável baseado em um controlador de estrutura especial, que permite a construção simultânea tanto do controlador como dos multiplicadores.

O programa resultante apresenta certificado de otimalidade local (APKARIAN, 2006; APKARIAN, 2008). Para incertezas complexas $\Delta \in \text{diag}(\mathbf{\Delta}_C, \mathbf{\Delta}_P)$, o rearranjo sugerido é simples e está ilustrado na FIG. 3.2.

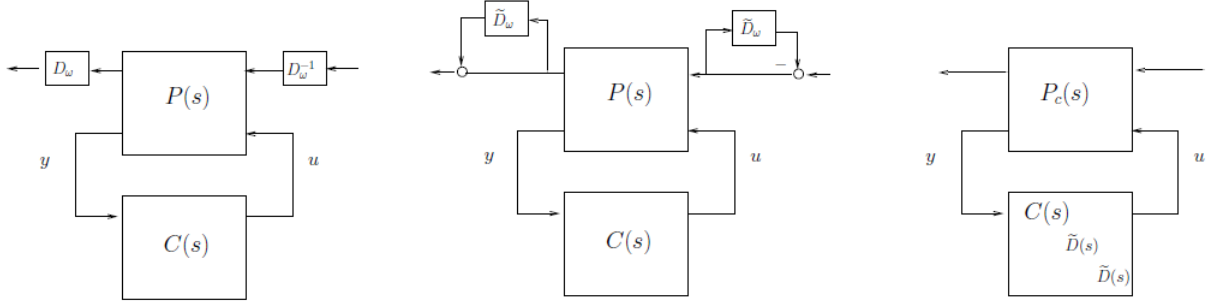


FIG. 3.2: Translação nos D -multiplicadores

São introduzidos novos multiplicadores $\tilde{D}_\omega = D_\omega - I_N$ e infere-se que $\tilde{D}_\omega \Delta = \Delta \tilde{D}_\omega$ sempre que $\tilde{D}_\omega \in D_\Delta$. Com os novos multiplicadores já transladados, o diagrama no lado esquerdo da FIG. 3.2 é claramente uma LFT em $C(s)$ e \tilde{D}_ω (lado direito da FIG. 3.2), que é facilmente derivado, computando-se a função de transferência sobre os componentes posteriores. Tem-se que

$$D_\omega \mathcal{F}_l(P(j\omega), C(j\omega)) D_\omega^{-1} = \mathcal{F}_l \left(P_c(s), \begin{bmatrix} C(s) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}(s) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D}(s) \end{bmatrix} \right), \quad (3.12)$$

com $P_c(s) \triangleq L_c P(s) R_c + Q_c$.

As matrizes L_c , R_c e Q_c são dadas por:

$$P_c(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} I_N & 0 \\ - & - \\ 0 & I_{p2} \\ 0 & 0 \\ I_N & 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq L_c} P(s) \underbrace{\begin{bmatrix} I_N & | & 0 & -I_N & 0 \\ 0 & | & I_{m2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq R_c} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & | & 0 & 0 & I \\ - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ I & | & 0 & -I & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq Q_c}. \quad (3.13)$$

Note que a partição acima enfatiza a estrutura da LFT na EQ. (3.12).

Aceitando, por um momento, um leve conservadorismo introduzido pela busca de D -multiplicadores realizáveis em espaço de estados, o problema da síntese μ complexa se torna um problema de projeto de um controlador com estrutura especial.

Incorporando a restrição de Estabilidade Nominal, obtém-se um programa não-diferenciável como

$$\begin{aligned} & \underset{K(s)}{\text{minimize}} \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\sigma}(\mathcal{F}_l(P_c(j\omega), K(j\omega))) \\ & \text{sujeito à} \quad \text{Estabilidade Nominal} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$K(s) \triangleq \begin{bmatrix} C(s) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}(s) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D}(s) \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(s) \in \tilde{D}_\Delta,$$

com o conjunto de multiplicadores $\tilde{\mathbf{D}}_{\Delta}$ definido como

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\Delta} \triangleq \{\tilde{D} : \tilde{D} \in \mathbb{C}^{N \times N}, \det(I_N + \tilde{D}) \neq 0, \Delta \tilde{D} = \tilde{D} \Delta, \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}\}. \quad (3.15)$$

Pode-se lidar com Estabilidade Nominal de diferentes formas. Uma possibilidade é adicionar uma restrição na abscissa espectral da malha fechada $(G(s), C(s))$:

$$\alpha\{A(G(s), C(s))\} \leq -\epsilon \quad (3.16)$$

Considerando a expressão acima, a síntese μ complexa é remodelada como um programa não-diferenciável com controlador bloco-diagonal $K(s) \triangleq \text{diag}(C(s), \tilde{D}(s), \tilde{D}(s))$:

$$\begin{aligned} & \underset{K(s)}{\text{minimize}} && \sup_{s=j\omega, \omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\sigma}(\mathcal{F}_l(P_c(j\omega), K(j\omega))) \\ & \text{sujeito à} && \alpha\{A(G(s), C(s))\} \leq \epsilon \\ & && K(s) \triangleq \begin{bmatrix} C(s) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}(s) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D}(s) \end{bmatrix}, \tilde{D}(s) \in \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Neste momento, cabe salientar algumas observações:

- O supremo na EQ. (3.17) é computado através de uma técnica Hamiltoniana padrão para cálculo de normas H_{∞} (BOYD, 1989; BRUINSMA, 1990).
- Os D -multiplicadores não são necessariamente estáveis, reduzindo, assim, o conservadorismo presente na abordagem clássica da síntese μ .
- Fixar $\tilde{D}(s) = 0$ reduz o programa na EQ. (3.17) a uma síntese H_{∞} pura, ao passo que, mantendo-se $C(s)$ fixo, tem-se simplesmente um problema de análise μ .

3.3 SÍNTESE μ NÃO-DIFERENCIÁVEL MISTA

Nesta seção, será apresentado um desenvolvimento análogo ao apresentado na seção 3.2, com a diferença de estarem presentes também incertezas paramétricas. Para cumprir este objetivo, assume-se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, de tal forma que $\delta_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, q$. Assim, o problema de Desempenho Robusto apresentado na EQ. (3.7) se torna um problema de síntese μ mista.

A extensão da EQ. (3.11) para incertezas paramétricas é o conjunto infinito de desigualdades matriciais indexado por ω (FAN, 1991; APKARIAN, 2011):

$$N(j\omega)^H S_{\omega} N(j\omega) + j(G_{\omega} N(j\omega) - N(j\omega)^H G_{\omega}) - S_{\omega} \prec 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (3.18)$$

com $N(j\omega) \triangleq \mathcal{F}_l(P(j\omega), C(j\omega))$ e G_ω -multiplicadores definidos como

$$G_\omega \in \mathbf{G}_\Delta \triangleq \{G : G = G^H \in \mathbb{C}^{N \times N}, G\Delta = \Delta^H G, \forall \Delta \in \Delta\}. \quad (3.19)$$

Segue, a partir da definição acima, que os G_ω -multiplicadores apresentam, para todo ω , a seguinte estrutura:

$$\text{diag}(G_1, \dots, G_q, 0_{m_1 \times m_1}), G_i = G_i^H, i = 1, \dots, q. \quad (3.20)$$

A EQ. (3.18) aponta para uma técnica de resolução em que os multiplicadores S_ω e G_ω são computados ponto a ponto, com ajuste de curva para obtenção de uma representação racional de fatores estáveis, seguida de uma síntese H_∞ . A sequência de eventos descrita se repete até que nenhum progresso adicional seja observado. Esta técnica, entretanto, não é prática e está propensa a falhas quando estão presentes blocos escalares repetidos (YOUNG, 1996).

Pode-se mostrar que a desigualdade da EQ. (3.18), após uma Transformação Bilinear em $\mathcal{F}_l(P(j\omega), C(j\omega))$ (Seção 7.1.1 do Apêndice), pode ser transformada na seguinte condição real negativa:

$$M_\omega \mathcal{B}_N \star \mathcal{F}_l(P(j\omega), C(j\omega)) + (M_\omega \mathcal{B}_N \star \mathcal{F}_l(P(j\omega), C(j\omega)))^H \prec 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (3.21)$$

onde $M_\omega = -(S_\omega + jG_\omega)$ e $\mathcal{B}_N = \begin{bmatrix} I_N & -\sqrt{2}I_N \\ \sqrt{2}I_N & -I_N \end{bmatrix}$.

Para tanto, faremos o caminho inverso e partiremos da Transformação Linear Fracionária entre \mathcal{B}_N e $N(j\omega)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(\mathcal{B}_N, N(j\omega)) &= I - \sqrt{2}N(j\omega)(I + N(j\omega))^{-1}\sqrt{2} \\ &= I - 2N(j\omega)(I + N(j\omega))^{-1} \\ &= (I + N(j\omega))(I - N(j\omega))^{-1} - 2N(j\omega)(I + N(j\omega))^{-1} \\ &= (I - N(j\omega))(I + F(j\omega))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Então:

$$\begin{aligned} M_\omega \mathcal{F}_l(\mathcal{B}_N, N(j\omega)) + (\cdot)^H &\prec 0 \\ (-S_\omega + jG_\omega)(I - N(j\omega))(I + N(j\omega))^{-1} + (\cdot)^H &\prec 0 \\ -(S_\omega - S_\omega N(j\omega) + jG_\omega - jG_\omega N(j\omega))(I + N(j\omega))^{-1} + (\cdot)^H &\prec 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aplicando uma Transformação de Congruência com $(I + N(j\omega))$, tem-se:

$$\begin{aligned} -(I + N(j\omega))^H(S_\omega - S_\omega N(j\omega) + jG_\omega - jG_\omega N(j\omega)) + (\cdot)^H &\prec 0 \\ -2(S_\omega - jG_\omega N(j\omega) + jN(j\omega)^H G_\omega - N(j\omega)^H S_\omega N(j\omega)) &\prec 0 \\ 2(N(j\omega)^H S_\omega N(j\omega) + j(G_\omega N(j\omega) - N(j\omega)^H G_\omega) - S_\omega) &\prec 0 \\ N(j\omega)^H S_\omega N(j\omega) + j(G_\omega N(j\omega) - N(j\omega)^H G_\omega) - S_\omega &\prec 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por fim, note que a desigualdade da EQ. (3.21), por associatividade do produto estrela (Seção 7.1.1 do Apêndice), pode ser facilmente reescrita como

$$M_\omega \mathcal{F}_l(\mathcal{B}_N \star P(j\omega), C(j\omega)) + (M_\omega \mathcal{F}_l(\mathcal{B}_N \star P(j\omega), C(j\omega)))^H \prec 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (3.25)$$

Note que $\mathcal{B}_N \star P$ é bem-posta, tendo em vista que o modelo LFT em (3.4) está bem definido em $\mathbf{B}\Delta$. Por construção, M_ω possui a mesma estrutura que os D -multiplicadores apresentados em (3.10), com a propriedade real negativa $M_\omega + M_\omega^H \prec 0$, para todo ω . Para uso futuro, \mathbf{M}_Δ denotará o conjunto de tais multiplicadores.

Considerando-se tudo que foi apresentado e, havendo Estabilidade Nominal da planta em malha fechada, a condição de Desempenho Robusto, vista na EQ. (3.7), é válida sempre que

$$\begin{bmatrix} M_\omega \mathcal{F}_l[\mathcal{B}_N \star P(j\omega), C(j\omega)] & 0 \\ 0 & M_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_\omega \mathcal{F}_l[\mathcal{B}_N \star P(j\omega), C(j\omega)] & 0 \\ 0 & M_\omega \end{bmatrix}^H \prec 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (3.26)$$

Introduzindo-se as matrizes L_r , R_r e Q_r , definidas como

$$L_r \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ - & - \\ 0 & I_{p2} \\ I_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_r \triangleq \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & 0 \\ - & - \\ 0 & I_{m2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad Q_r \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & I \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

a desigualdade na EQ. (3.26) pode ser reescrita da seguinte forma (APKARIAN, 2011):

$$\mathcal{F}_l \left(L_r(\mathcal{B}_N \star P(j\omega))R_r + Q_r, \begin{bmatrix} C(j\omega) & 0 & 0 \\ 0 & M_\omega & 0 \\ 0 & 0 & M_\omega \end{bmatrix} \right) + (\cdot)^H \prec 0. \quad (3.28)$$

A FIG. 3.3 apresenta o controlador aumentado de estrutura especial utilizado na realização da síntese μ não-diferenciável mista.

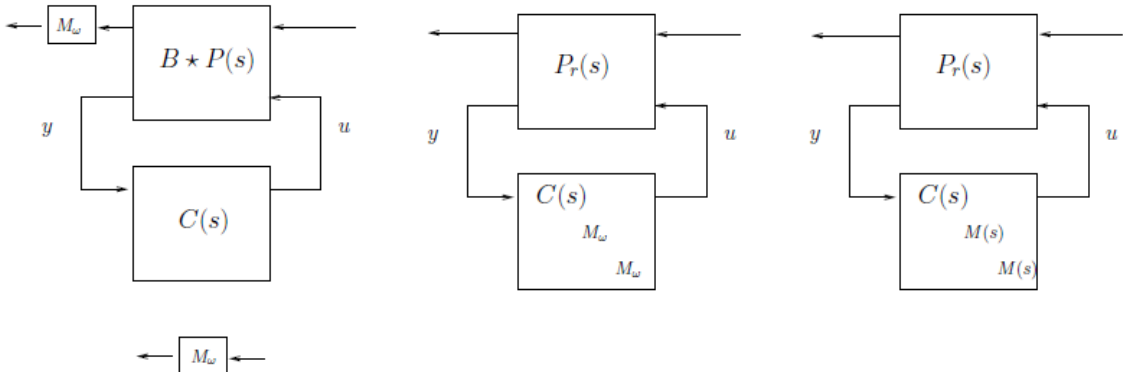


FIG. 3.3: Síntese μ mista com controlador aumentado

Restringindo a procura por multiplicadores M_ω realizáveis em espaço de estados, $M_\omega \triangleq M(j\omega)$ e denotando $P_r(s) \triangleq L_r(\mathcal{B}_N \star P(s))R_r + Q_r$, tem-se o seguinte programa não-diferenciável:

$$\begin{aligned} & \underset{K(s)}{\text{minimize}} && \sup_{s=j\omega, \omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\lambda} \{ \mathcal{F}_l(P_r(s), K(s)) + \mathcal{F}_l((P_r(s), K(s)))^H \} \\ & \text{sujeito à} && \alpha \{ A(G(s), C(s)) \} \leq \epsilon \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$K(s) \triangleq \begin{bmatrix} C(s) & 0 & 0 \\ 0 & M(s) & 0 \\ 0 & 0 & M(s) \end{bmatrix}, \quad M(s) \in \mathbf{M}_\Delta.$$

A EQ. (3.29) estabelece que a síntese μ não-diferenciável mista pode ser vista como a síntese de um controlador com estrutura especial bloco-diagonal repetida. Nesta abordagem de otimização não-diferenciável, a ordem tanto dos multiplicadores como a do controlador e sua estrutura são fixadas de antemão. Em virtude disto, uma característica bastante favorável da técnica é que a complexidade dos multiplicadores não interfere na complexidade do controlador. Não há, portanto, qualquer obrigatoriedade de os multiplicadores serem estáveis. Assim como visto na Seção 3.2, o supremo da EQ. (3.29) é calculado através de uma técnica Hamiltoniana padrão.

É possível se desvencilhar da restrição da abscissa espectral na EQ. (3.29) através do uso de uma fatoração biestável do multiplicador. Nesta conjuntura, $M(s)$ é reescrito como $M(s) = M_1(s)^H M_2(s)$, onde ambos $M_1(s)$ e $M_2(s)$ são estáveis, com inversas estáveis.

Pode ser mostrado que a condição real negativa na EQ. (3.26) se torna

$$M_2(j\omega) \mathcal{F}_l(\mathcal{B}_N \star P(j\omega), C(j\omega)) M_1(j\omega)^{-1} + (\cdot)^H \prec 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \text{ e} \tag{3.30}$$

$$M_1(j\omega) M_2(j\omega)^{-1} + (M_1(j\omega) M_2(j\omega)^{-1})^H \prec 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \tag{3.31}$$

Definindo-se $W_1(s) \triangleq M_1(s) - I$ e $W_2(s) \triangleq M_2(s) - I$ (note que $W_1(s)$ e $W_2(s)$ possuem a mesma estrutura de $M(s)$), a EQ. (3.31) é, equivalentemente, formulada como:

$$\left\| \mathcal{F}_l \left(P_m, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_\infty < 1, \text{ onde } P_m \triangleq \tilde{\mathcal{B}}_N \star \begin{bmatrix} I_N & | & I_N & -I_N \\ - & - & - & - \\ I_N & | & 0 & -I_N \\ I_N & | & 0 & -I_N \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Para se chegar à condição (3.32) acima, note que multiplicando-se por 2 a EQ. (3.31), esta continua negativa definida e tem-se:

$$2M_1(j\omega) M_2(j\omega)^{-1} + 2(M_1(j\omega) M_2(j\omega)^{-1})^H \prec 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \tag{3.33}$$

Tomando-se apenas o primeiro termo da equação acima e desenvolvendo-o, teremos:

$$\begin{aligned}
2M_1(j\omega)M_2(j\omega)^{-1} &= 2(I + W_1)(I + W_2)^{-1} \\
&= 2W_1(I + W_2)^{-1} + 2(I + W_2)^{-1} \\
&= 2(I + W_2)(I + W_2)^{-1} + 2W_1(I + W_2)^{-1} - 2W_2(I + W_2)^{-1} \\
&= 2I + 2W_1(I + W_2)^{-1} - 2W_2(I + W_2)^{-1} \\
&= 2I + 2 \begin{bmatrix} W_1 & -W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I + W_2)^{-1} \\ (I + W_2)^{-1} \end{bmatrix} \\
&= 2I + 2 \begin{bmatrix} W_1 & -W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + W_2 & 0 \\ 0 & I + W_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \\
&= 2I + 2 \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{F}_l \left(\begin{array}{c|ccc} I_N & I_N & -I_N & \\ \hline - & - & - & - \\ I_N & 0 & -I_N & \\ I_N & 0 & -I_N & \end{array}, \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Retornando à EQ. (3.31), tem-se:

$$\mathcal{F}_l \left(\begin{array}{c|ccc} I_N & I_N & -I_N & \\ \hline - & - & - & - \\ I_N & 0 & -I_N & \\ I_N & 0 & -I_N & \end{array}, \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \right) + \mathcal{F}_l \left(\begin{array}{c|ccc} I_N & I_N & -I_N & \\ \hline - & - & - & - \\ I_N & 0 & -I_N & \\ I_N & 0 & -I_N & \end{array}, \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \right)^H \prec 0. \tag{3.35}$$

Considere o lema a seguir.

Lema 3.1. Para qualquer matriz quadrada complexa $X \in \mathbb{C}^{q \times q}$, tem-se que:

$$\bar{\lambda}(X + X^H) < 0 \Leftrightarrow X + X^H \prec 0 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(\mathcal{F}_l(\tilde{\mathcal{B}}_q, X)) < 1, \tag{3.36}$$

onde

$$\tilde{\mathcal{B}}_q = \begin{bmatrix} I_q & \sqrt{2}I_q \\ \sqrt{2}I_q & I_q \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Aplicando-se a propriedade apresentada na EQ. (3.36) do Lema 3.1 à EQ. (3.35), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \bar{\sigma} \left(\mathcal{F}_l \left(\tilde{\mathcal{B}}_N, \mathcal{F}_l \left(\begin{bmatrix} I_N & | & I_N & -I_N \\ - & - & - & - \\ I_N & | & 0 & -I_N \\ I_N & | & 0 & -I_N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right) \right) < 1 = \\
& \bar{\sigma} \left(\mathcal{F}_l \left(\tilde{\mathcal{B}}_N \star \begin{bmatrix} I_N & | & I_N & -I_N \\ - & - & - & - \\ I_N & | & 0 & -I_N \\ I_N & | & 0 & -I_N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right) < 1 = \\
& \bar{\sigma} \left(\mathcal{F}_l \left(P_m, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right) < 1 = \\
& \left\| \mathcal{F}_l \left(P_m, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_{\infty} < 1.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Utilizando um desenvolvimento similar ao feito acima, pode ser mostrado que a matriz de transferência $M_2(j\omega)\mathcal{F}_l(\mathcal{B}_N \star P(j\omega), C(j\omega))M_1(j\omega)^{-1}$, do primeiro termo da EQ. (3.30), pode ser reescrita como:

$$\mathcal{F}_l(L_w(\mathcal{B}_N \star P(s))R_w + Q_w, K(s)), s = j\omega, \tag{3.39}$$

onde L_w , R_w e Q_w são dadas por:

$$L_w \triangleq \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ - & - \\ 0 & I_{p2} \\ 0 & 0 \\ I_N & 0 \end{bmatrix}, \quad R_w \triangleq \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ - & - \\ 0 & I_{m2} \\ -I_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad Q_w \triangleq \begin{bmatrix} 0 & | & 0 & 0 & I_N \\ - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ I_N & | & 0 & -I_N & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

Aplicando-se, novamente, a propriedade apresentada na EQ. (3.36) do Lema 3.1 na EQ.(3.30) modificada pela EQ. (3.39), obtém-se a seguinte equação:

$$\|\mathcal{F}_l(\tilde{\mathcal{B}}_N, \mathcal{F}_l(L_w(\mathcal{B}_N \star P(s))R_w + Q_w, K(s)))\|_{\infty} < 1, \tag{3.41}$$

que, por sua vez, equivale a:

$$\|\mathcal{F}_l(P_w(s), K(s))\|_{\infty} < 1, \tag{3.42}$$

com a planta $P_w(s)$ definida como

$$P_w(s) \triangleq \tilde{\mathcal{B}}_N \star (L_w(\mathcal{B}_N \star P(s))R_w + Q_w). \tag{3.43}$$

Conjugando-se os resultados obtidos nas EQ(s) (3.38) e (3.42), temos que a EQ. (3.29) pode

ser, equivalentemente, formulada como o seguinte programa não-diferenciável:

$$\begin{aligned} & \underset{K(s)}{\text{minimize}} \quad \max \left\{ \left\| \mathcal{F}_l(P_w(s), K(s)) \right\|_\infty, \left\| \mathcal{F}_l \left(P_m, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_\infty \right\} \\ & \text{sujeito à} \quad K(s) \triangleq \begin{bmatrix} C(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_1(s) & 0 \\ 0 & 0 & W_2(s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

O segundo termo da função de maximização desta mesma equação captura a Estabilidade Nominal da planta, de forma que uma restrição de abscissa espectral, como apresentada na EQ. (3.29), se torna supérflua.

Considerados conjuntamente, os termos com norma H_∞ na função de maximização também asseguram que os fatores $M_1(s)$ e $M_2(s)$ são biestáveis. Se um controlador $K(s)$, com a estrutura apropriada, é encontrado de tal forma que a função de maximização seja estritamente menor que 1, então o controlador $C(s)$ atinge as restrições de desempenho descritas na EQ. (3.6).

3.4 GENERALIZAÇÃO PARA SÍNTESE ν

É possível generalizar a presente formulação de síntese μ para tratar, também, problemas de síntese ν . Para tanto, basta substituir P_w na EQ. (3.43) por:

$$P_{w,\nu}(s) \triangleq \tilde{\mathcal{B}}_N \star \left[L_w \left(\mathcal{B}_N \star \begin{bmatrix} \varphi I_{\sum_i r_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{p_2} \end{bmatrix} P(s) \right) R_w + Q_w \right], \quad (3.45)$$

onde $\varphi, \gamma \in \mathbb{R}^+$.

Note que se

$$\mu \left(\begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} N(j\omega) \right) < 1, \quad (3.46)$$

então

$$\mu \left(\begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} N(j\omega) \right) \cdot \bar{\sigma}(\hat{\Delta}) < 1, \quad \forall \|\hat{\Delta}\|_\infty \leq 1. \quad (3.47)$$

Desta forma,

$$\mu \left(\begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} N(j\omega) \right) \cdot \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} \right) < 1, \quad \forall \|\Delta\|_\infty \leq 1, \quad \forall \|\Delta_p\|_\infty \leq 1 \quad (3.48)$$

acarreta que

$$\mu \left(\frac{1}{\gamma} F(j\omega) \right) \cdot \bar{\sigma}(\Delta_p) < 1, \quad \forall \|\varphi\Delta\|_\infty \leq \varphi, \quad \forall \|\Delta_p\|_\infty \leq 1, \quad (3.49)$$

onde $F(j\omega) = \mathcal{F}_u(N(j\omega), \Delta(j\omega))$.

Para blocos de incerteza complexos cheios, tem-se que o valor singular estruturado e o maior valor singular são iguais. Assim, a EQ. (3.49) pode ser reescrita como:

$$\bar{\sigma} \left(\frac{1}{\gamma} F(j\omega) \right) \cdot \bar{\sigma}(\Delta_p) < 1, \quad \forall \|\varphi\Delta\|_\infty \leq \varphi, \quad \forall \|\Delta_p\|_\infty \leq 1. \quad (3.50)$$

Isto implica que

$$\left\| \frac{1}{\gamma} F(j\omega) \right\|_{\infty} < 1, \quad \forall \|\varphi\Delta\|_{\infty} \leq \varphi, \quad (3.51)$$

que, por sua vez, equivale a

$$\|F(j\omega)\|_{\infty} < \gamma, \quad \forall \|\varphi\Delta\|_{\infty} \leq \varphi. \quad (3.52)$$

Este formalismo permite tratar, por exemplo, os seguintes problemas adicionais (FAN, 1992):

- Desempenho Robusto: qual o menor γ de tal forma que, sempre que a incerteza possuir tamanho $\frac{1}{\gamma}$ ou menor, a norma H_{∞} do pior caso de desempenho seja **menor** que γ ? Neste caso, $\varphi = \frac{1}{\gamma}$;
- Pior Caso de Desempenho: qual o menor γ de tal forma que, sempre que a incerteza possuir tamanho 1 ou menor, a norma H_{∞} do pior caso de desempenho seja **menor** que γ ? Neste caso, $\varphi = 1$;
- Maior Incerteza Admissível: qual o maior φ de tal forma que, sempre que a incerteza possuir tamanho φ ou menor, a norma H_{∞} do pior caso de desempenho seja **menor** que 1? Neste caso, $\gamma = 1$.

Em todas as situações, γ e φ são trazidos para baixo, quando não estiverem fixos, através de uma busca dicotômica (APKARIAN, 2011) baseada no método da bisseção.

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, serão apresentados três exemplos de aplicações numéricas da síntese μ não-diferenciável com controlador aumentado de estrutura especial.

Conforme mencionado na Introdução desta dissertação, eles tratam sobre a síntese de controladores para uma planta levemente amortecida com incertezas reais paramétricas, para atenuação do efeito de uma perturbação externa a um sistema massa-mola-amortecedor e para o controle de um míssil ar-ar.

A ferramenta utilizada será a rotina HINFSTRUCT, disponível no MATLAB R2011a. Ela permite sintonizar parâmetros livres de um determinado modelo em espaço de estados generalizado (GENSS) e admite que se definam algumas opções. No caso, a opção RANDOMSTART foi adicionada com 2.000 pontos iniciais e a opção TARGETGAIN recebeu o valor de $1-(1e-8)$, pois o controlador é encontrado quando a função de maximização da EQ. (3.44) atinge valor menor que 1.

Com o intuito de possibilitar a construção de parâmetros sintonizáveis no controlador e nos multiplicadores, são utilizados blocos de projetos de controle, tais como o LTIBLOCK.SS ou LTI-BLOCK.GAIN. A referida sintonização tem como objetivo encontrar o mínimo global do problema de minimização da norma H_∞ da função de transferência de malha fechada de um sistema de controle que inclui componentes ajustáveis, tais como controladores ou filtros.

A fim de se realizar a síntese μ não-diferenciável, será utilizado o programa apresentado na EQ. (3.44), sendo necessário que se conheça a dimensão do canal de incerteza (N), onde $N = \sum_{i=1}^q r_i + m_1$, do canal de controle (m_2 e p_2) e do canal de desempenho (m_1), conforme mostrados na FIG. 3.1.

4.1 PROBLEMA DE CONTROLE DE UMA PLANTA LEVEMENTE AMORTECIDA COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS

Este exemplo acadêmico, retirado de (APKARIAN, 2011) e baseado no trabalho de (YOUNG, 1996), serviu para dar segurança na aplicação da técnica apresentada no Capítulo 3, pois o objetivo inicial era replicar os resultados já obtidos. Ele foi construído para enfatizar o problema decorrente de incertezas reais paramétricas. O sistema nominal é instável e a planta incerta é descrita como uma função de transferência de segunda ordem, dada por

$$G(s, \delta) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + \delta_1)}{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + \delta_2)}, \quad (4.1)$$

onde δ_1 e δ_2 são parâmetros reais incertos e $\omega_n = 1$, $\zeta = 0,2$. Tal descrição é típica de modos levemente amortecidos, com frequência natural incerta, e pode ser rearranjada no formato LFT da FIG. 3.1, definindo-se

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1/\omega_n^2 & -1/\omega_n^2 & 0 \\ -\omega_n^2 & 2\zeta\omega_n & 0 & 0 & 4\zeta\omega_n \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \\ 0 & -\omega_n^2 & 0 & 0 & -\omega_n^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (4.2)$$

e

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

O foco desta ilustração é a síntese de um controlador robusto que maximize a margem paramétrica, ou seja, o raio do quadrado no espaço- (δ_1, δ_2) , no qual o sistema em malha fechada permanece estável.

Repare que, para $(\delta_1, \delta_2) = (-1, -1)$, o sistema possui um polo instável em $s = 0$. Em virtude disto, pode-se inferir que a máxima margem paramétrica alcançável para este sistema é limitada superiormente por 1, independentemente da técnica que seja utilizada.

Efetuada-se a síntese μ complexa pela Iteração *DK* através da rotina *DKSYN*, com multiplicador de quinta ordem, obtém-se o valor de 2,5517 para o pico para o valor singular estruturado. O controlador obtido é de ordem 8. Para aplicação da síntese μ não-diferenciável real, utilizaram-se multiplicadores de ordem 4 (esta foi a escolha realizada pelo autor da técnica), de forma que a ordem total do controlador $K(s)$ é $n_c + 4 + 4$, onde n_c designa o número de estados de $C(s)$.

Neste exemplo, a dimensão do canal de incerteza é $N = 2$, a dimensão do canal de controle é $m_2 = p_2 = 1$ e a dimensão do canal de desempenho é $m_1 = 0$, em virtude de estarmos tratando apenas com a questão da estabilidade. A TAB. 4.1 mostra a margem paramétrica obtida de acordo com a técnica utilizada para diferentes ordens do controlador.

TAB 4.1: Margem paramétrica para controladores de ordens de 0 a 4

Técnica Utilizada	Ordem do Controlador	Margem Paramétrica
Iteração <i>DK</i>	8	0,3918955
Síntese μ não-diferenciável real	0	0,9999995
Síntese μ não-diferenciável real	1	0,9999995
Síntese μ não-diferenciável real	2	0,9999995
Síntese μ não-diferenciável real	3	0,9999995
Síntese μ não-diferenciável real	4	0,9999995

Os resultados gráficos dos limites inferior e superior do valor singular estruturado, obtidos pela aplicação a este problema da Iteração *DK* e da síntese μ não-diferenciável real (rotina *HINFSTRUCT*) são mostrados nas FIG(s) 4.1 a 4.6. Para o cálculo dos limitantes foi utilizada a rotina *MUSSV*. Em todos os casos, o tempo de simulação não ultrapassou 5 minutos.

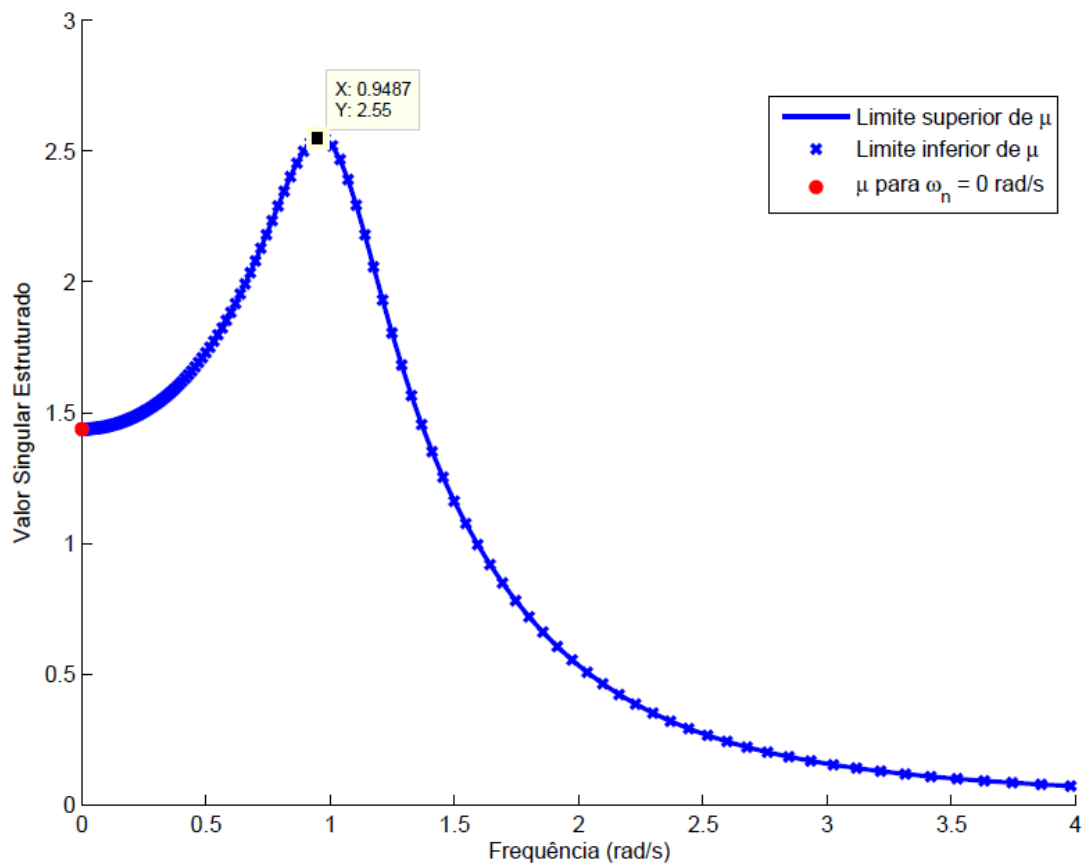


FIG. 4.1: Limite superior de μ para Iteração DK

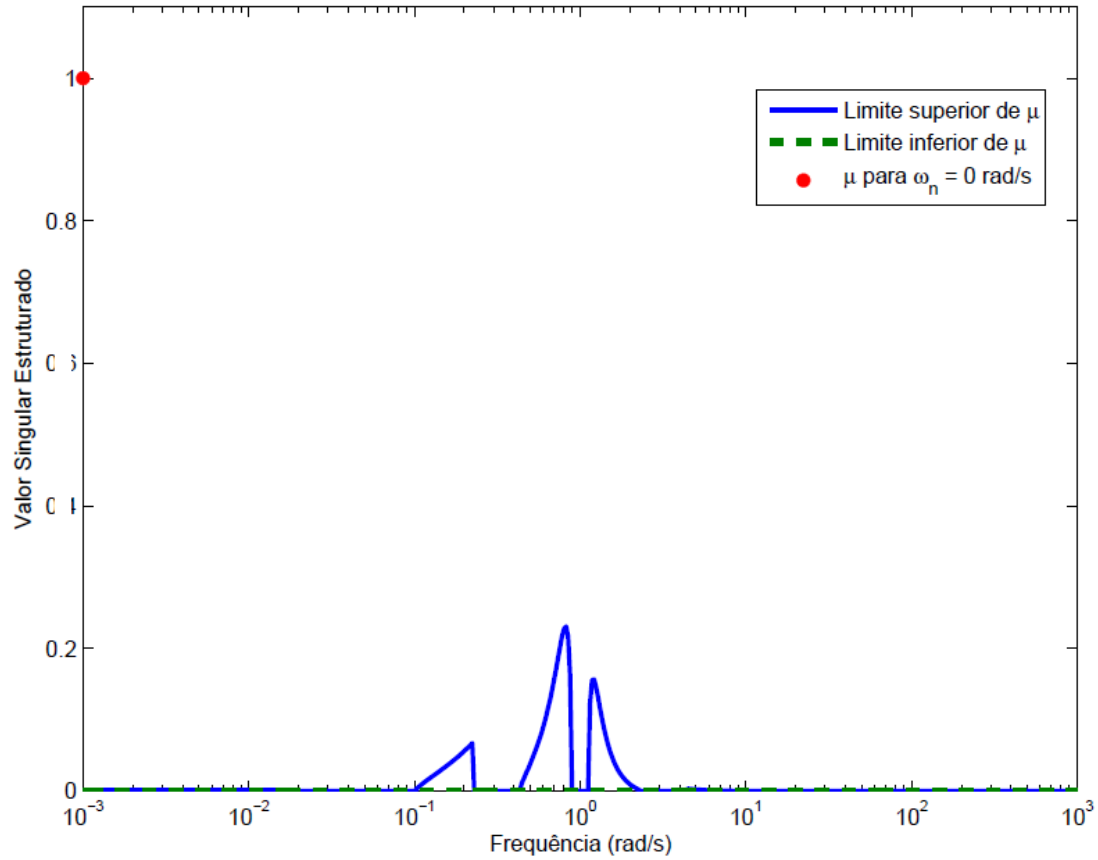
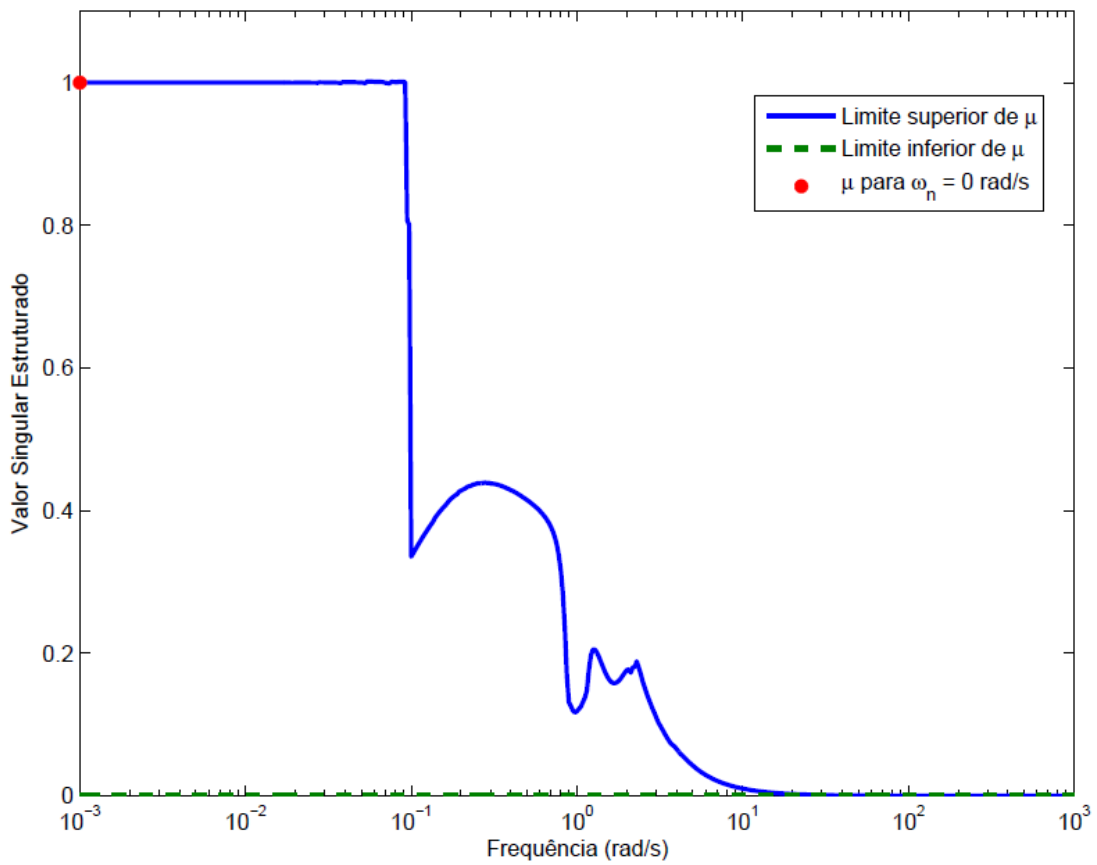
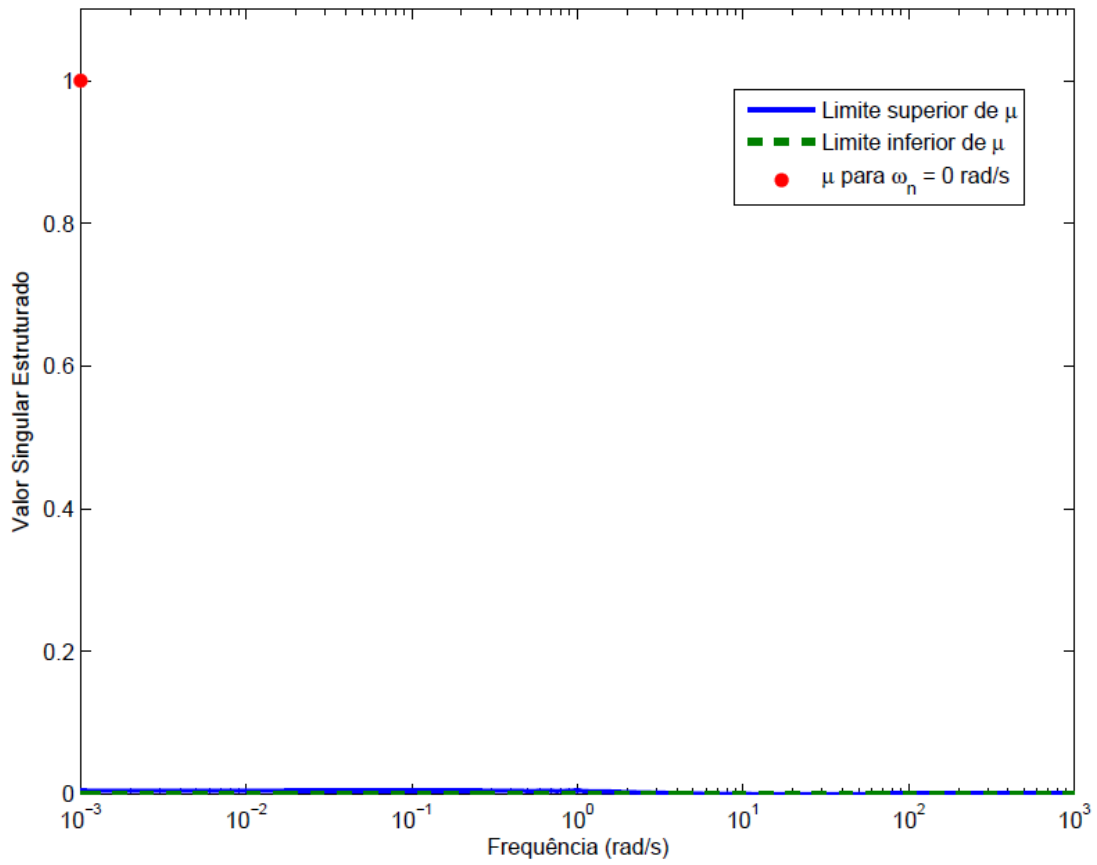


FIG. 4.2: Limites de μ para $n_c = 0$



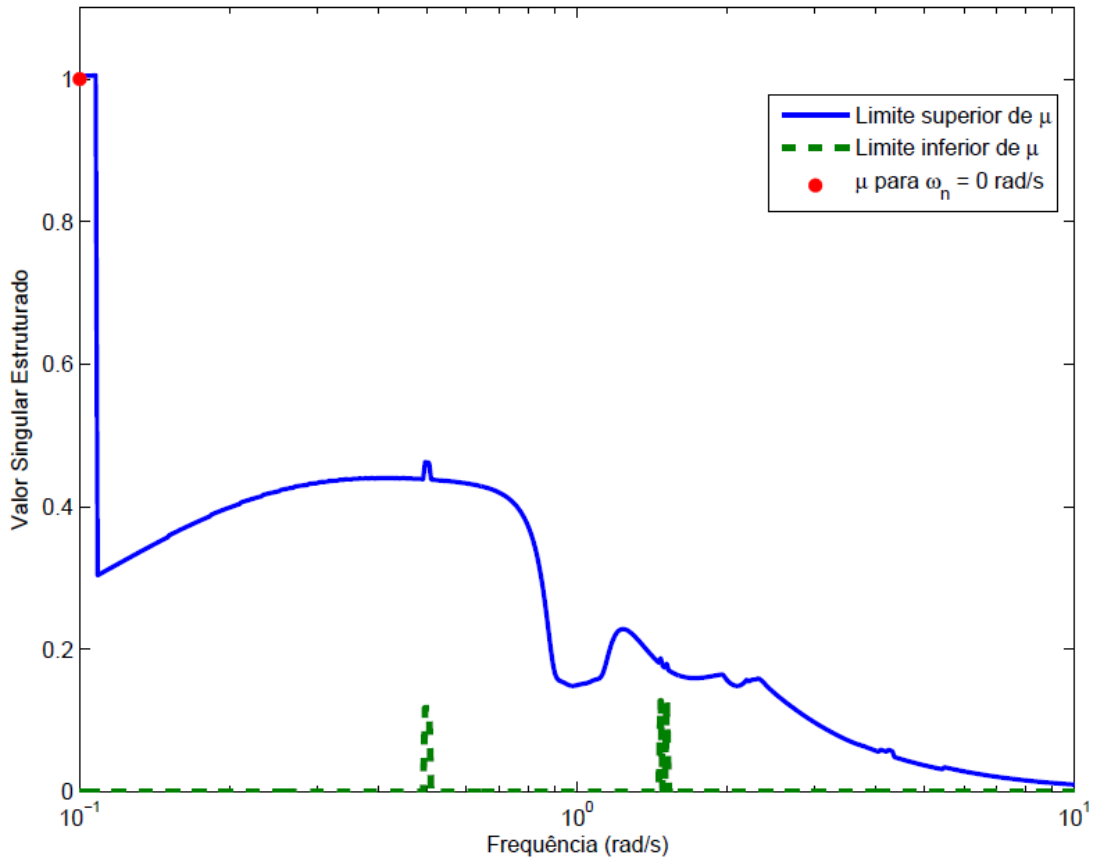


FIG. 4.5: Limites de μ para $n_c = 3$

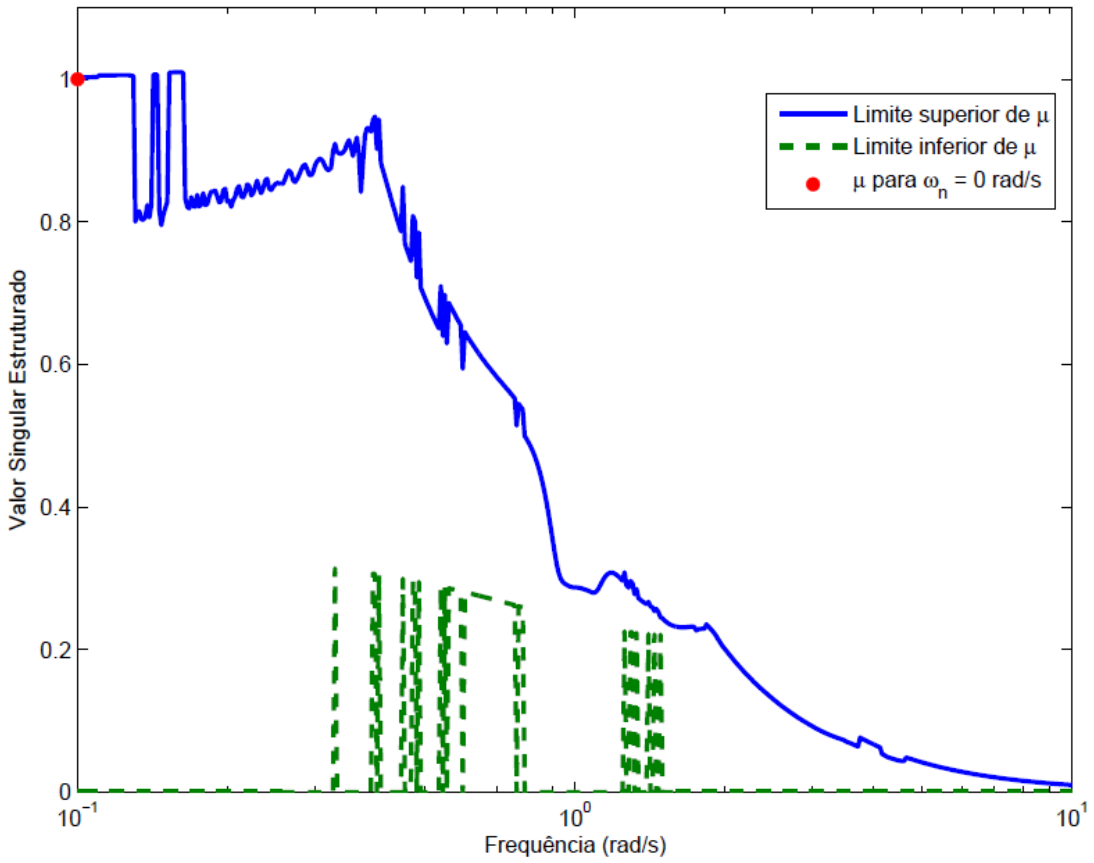


FIG. 4.6: Limites de μ para $n_c = 4$

4.2 CONTROLE DE UM SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

4.2.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O problema a seguir foi retirado do exemplo *Control of a Spring-Mass-Damper System Using Mixed- μ Synthesis*, do MATLAB R2011a, versão 7.12.0.635, baseado em (BARROS, 2005). Considere o sistema massa-mola-amortecedor mostrado na FIG. 4.7.

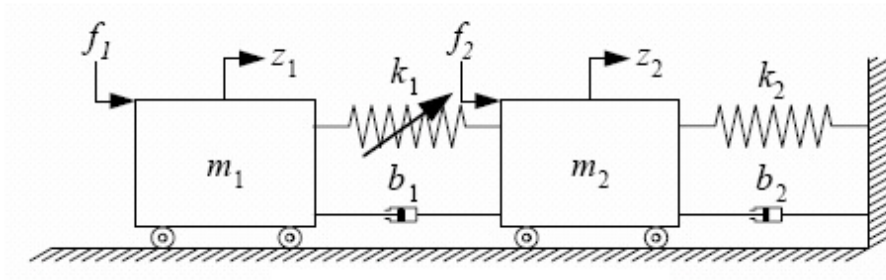


FIG. 4.7: Sistema massa-mola-amortecedor

Neste sistema, a mola k_2 e o amortecedor b_2 estão presos à parede e à massa m_2 . A massa m_2 , por sua vez, está presa à massa m_1 através da mola k_1 e do amortecedor b_1 . A massa m_2 é afetada por uma perturbação, representada pela força f_2 . O sistema é controlado pela força f_1 , que age sobre a massa m_1 .

O principal objetivo de projeto é utilizar a força de controle f_1 para atenuar o efeito da perturbação f_2 na posição da massa m_2 . A força f_1 , porém, não age diretamente na massa m_2 . Ao invés disso, f_1 atuará na rigidez da mola k_1 . Desta forma, qualquer incerteza presente na constante de elasticidade de k_1 tornará o problema de controle ainda mais difícil. A estrutura para síntese do controlador é vista na FIG. 4.8.

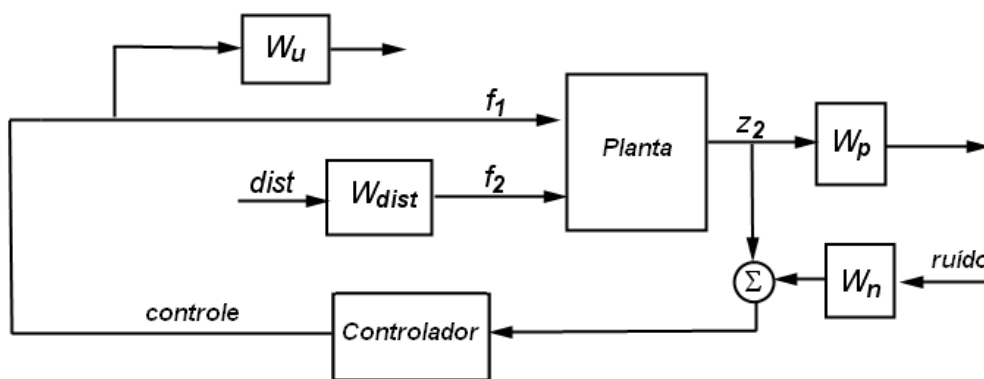


FIG. 4.8: Interconexão para síntese do controlador

O problema de controle é formulado da seguinte maneira:

- O controlador mede, com ruído, o deslocamento da massa m_2 e aplica uma força de controle f_1 . O ruído de sensor W_n é modelado como uma constante. Mais precisamente, W_n é igual a 0,001.

- O comando do atuador é penalizado por um fator 0,1 em baixas frequências e por um fator 10 em altas frequências, com uma frequência de cruzamento de 100 rad/s. Este filtro, chamado de W_u :

$$W_u = 10 \frac{s + 10}{s + 1000}. \quad (4.4)$$

- O filtro de primeira ordem W_{dist} , de magnitude unitária, que age na perturbação é dado por:

$$W_{dist} = \frac{0,25}{s + 0,25}. \quad (4.5)$$

- O objetivo de desempenho é atenuar a perturbação na massa m_2 por um fator 80, abaixo de 0,1 rad/s. Assim:

$$W_p = 80 \frac{0,1}{s + 0,1}. \quad (4.6)$$

Os valores nominais dos parâmetros do sistema são $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = 2$ N/m, $k_2 = 1$ N/m, $b_1 = 0,05$ N.s/m e $b_2 = 0,05$ N.s/m.

Sabe-se que existe 40% de incerteza no valor da constante de elasticidade da mola k_1 . Como seu valor nominal é 2, tem-se, então, que seu valor pode variar entre 1,2 e 2,8. Há, ainda, um retardo temporal τ entre a força comandada f_1 e sua aplicação na massa m_1 .

O retardo máximo τ é de 0,06 segundos. Negligenciar este retardo introduz um erro multiplicativo de $e^{-0,06s} - 1$. Este erro pode ser tratado como uma dinâmica não-modelada, limitada em magnitude, por um filtro passa-altas W_{unmod} , de tal forma que:

$$W_{unmod} = 2,6 \frac{s}{s + 40}. \quad (4.7)$$

A FIG. 4.9 apresenta o Diagrama de Bode para a dinâmica não-modelada ora descrita.

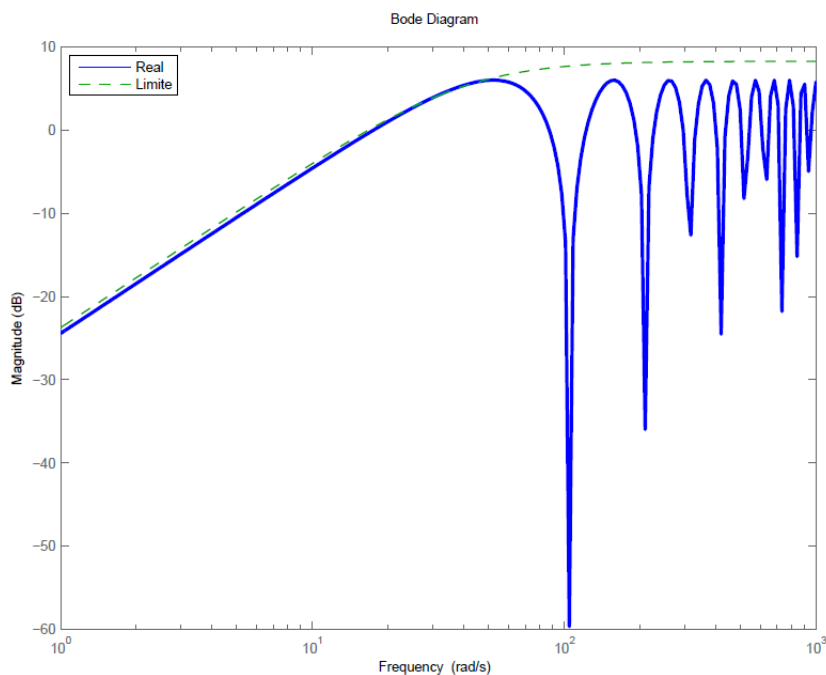


FIG. 4.9: Diagrama de Bode para dinâmica não-modelada

Pode-se construir um modelo incerto, em espaço de estados, da planta com a força de controle f_1 e a perturbação f_2 como entradas. Há quatro estados: as posições z_1 e z_2 e as velocidades \dot{z}_1 e \dot{z}_2 , sendo o vetor de estados formado nesta sequência. A saída da planta é dada por z_2 .

Desta forma, tem-se que as matrizes A, B, C e D são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad \text{e} \quad D = [0 \quad 0].$$

4.2.2 RESULTADOS

Antes de apresentar o resultado da síntese μ não-diferenciável propriamente dita, será visto o resultado obtido para este sistema, utilizando-se a Iteração DK e Iteração $D, G - K$. Ambas utilizam a rotina DKSYN do MATLAB. O objetivo é comparar os resultados destas técnicas com a síntese μ não diferenciável.

4.2.2.1 SÍNTESE μ COMPLEXA

Por padrão, a rotina DKSYN para a Iteração DK trata todas as incertezas reais paramétricas, neste exemplo k_1 , como incertezas complexas. k_1 é um parâmetro real com valor nominal 2, compreendido numa faixa entre 1,2 e 2,8.

Nesta síntese μ complexa, k_1 é, então, substituído por um parâmetro complexo incerto, variando num disco centrado em 2 e com raio 0,8. A FIG. 4.10 compara 80 amostras para faixa de valores de k_1 , conforme seja tratado como real (linha vermelha) ou complexo (asteriscos azuis).

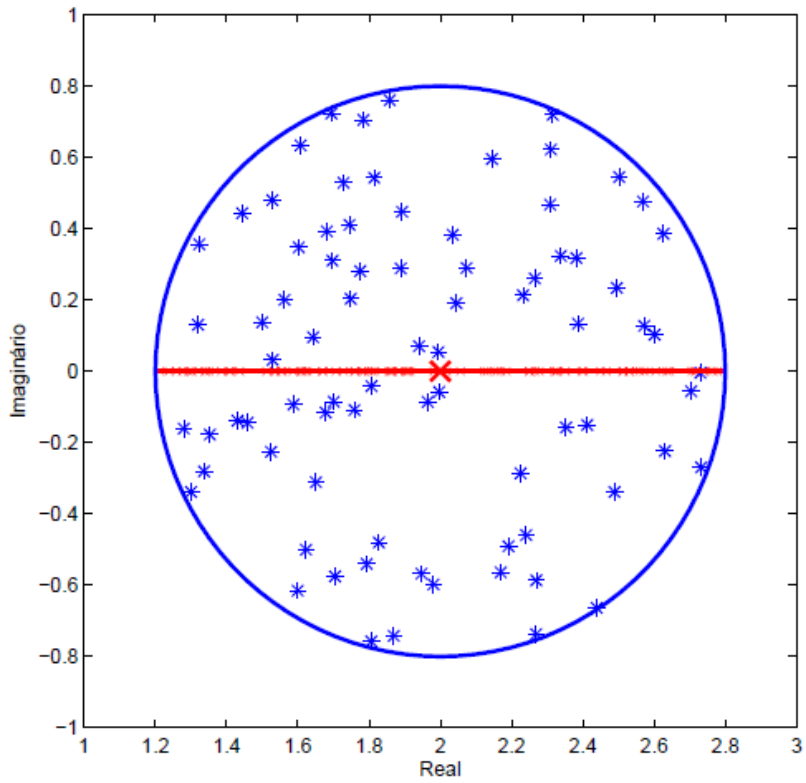


FIG. 4.10: Modelo incerto para k_1 (real *versus* complexo)

A fim de realizar a síntese, utilizou-se multiplicadores D de quinta ordem, que é o padrão para a rotina DKSYN. Efetuada a Iteração DK , obteve-se limite superior de $\mu = 1,0924$. A FIG. 4.11 apresenta um gráfico frequencial com este limite superior.

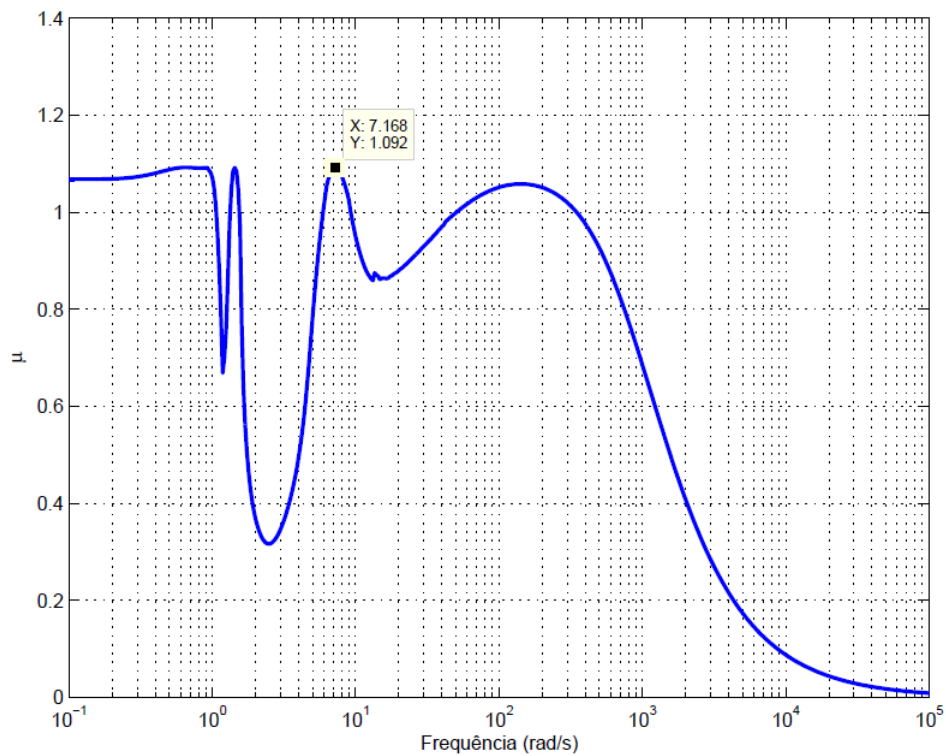


FIG. 4.11: Limite superior de μ (Iteração DK)

Para analisar a robustez do sistema em malha fechada, o controlador obtido é conectado ao verdadeiro modelo incerto da planta (em que k_1 é tratado como real). A rotina ROBUSTPERF do MATLAB calcula a margem de Desempenho Robusto do sistema incerto.

O desempenho de um sistema nominalmente estável, sujeito a incerteza, irá degradar para valores específicos de seus parâmetros incertos. Uma margem de Desempenho Robusto maior que 1 significa que a norma H_∞ do sistema incerto permanece menor que 1 para quaisquer valores da faixa de variação de parâmetros.

Por outro lado, uma margem de Desempenho Robusto inferior a 1 implica que determinados valores de elementos incertos, dentro de suas variações admissíveis, acarretam norma H_∞ maior que 1.

Para este exemplo, a Iteração DK fornece como resultado um valor de 0,9158 para margem de Desempenho Robusto do sistema incerto, que é exatamente o inverso do valor singular estruturado. Além disso, verifica-se que o controlador apresenta ordem 26.

4.2.2.2 SÍNTESE μ MISTA

A síntese μ mista leva em consideração parâmetros reais incertos diretamente no processo de síntese. Os multiplicadores D estão associados a incertezas complexas e reais paramétricas, ao passo que os multiplicadores G estão relacionados somente a incertezas reais paramétricas. Nesta seção, faremos duas sínteses μ mistas: uma através da Iteração $D, G - K$ e outra pela técnica de otimização não-diferenciável.

No primeiro caso, habilitou-se a Iteração $D, G - K$ na rotina DKSYN através da opção MIXEDMU. Ademais dos multiplicadores D de quinta ordem, fez-se uso de multiplicadores G de sexta ordem (o padrão do MATLAB é segunda ordem).

Para efetuar a mudança na ordem dos multiplicadores G , utilizou-se a opção AUTOSCALINGORDER. Realizada a síntese, obteve-se $\mu = 0,9225$, que é menor que o valor encontrado pela Iteração DK . Isto ocorre em virtude de haver um menor conservadorismo, pois o parâmetro real não foi tratado como uma incerteza complexa.

Obteve-se, então, um valor de 1,0840 para margem de Desempenho Robusto do sistema incerto e o controlador apresentou ordem 34. A FIG. 4.12 apresenta um gráfico frequencial para o limite superior de μ .

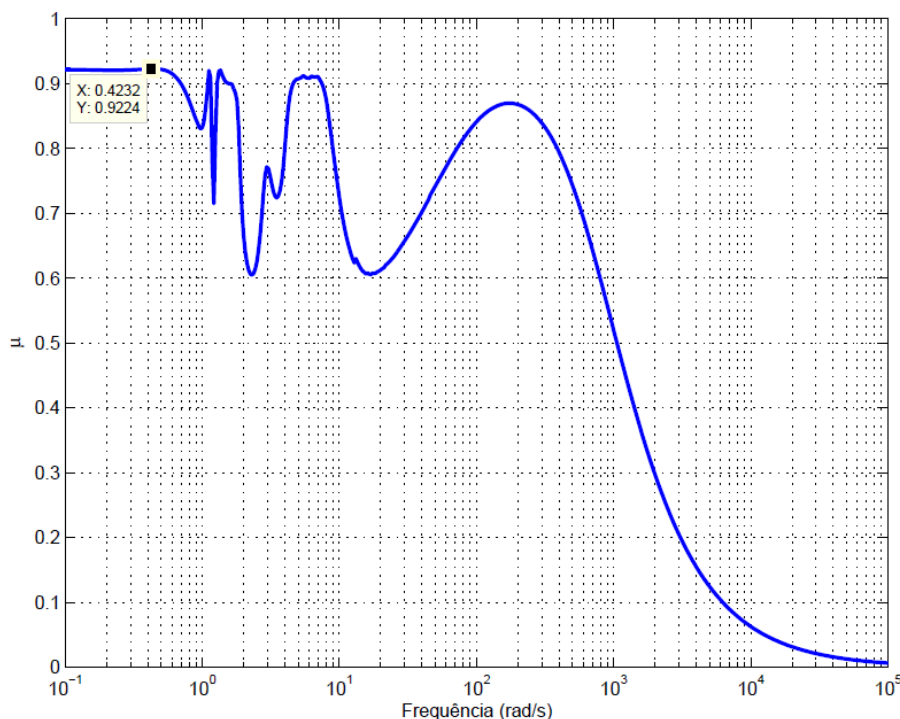


FIG. 4.12: Limite superior de μ (Iteração $D, G - K$)

A Iteração $D, G - K$, com multiplicadores D e G de quinta e sexta ordens, sintetizou um controlador de ordem mais elevada que a Iteração DK , que utilizou apenas multiplicadores D de quinta ordem. Em compensação, apesar do aumento da ordem do controlador, conseguiu-se também maior margem de Desempenho Robusto do sistema incerto, o que era desejável.

A fim de se tentar obter um controlador de ordem reduzida e que fornecesse melhor desempenho que as Iterações DK e $D, G - K$, realizou-se a síntese μ mista não-diferenciável. Para tanto, a dimensão do canal de incerteza é $N = 4$, a dimensão do canal de controle é $m_2 = p_2 = 1$ e a dimensão do canal de desempenho é $m_1 = 2$.

Os multiplicadores W_1 e W_2 apresentam modelo em espaço de estados generalizado (GENSS) com 4 entradas, 4 saídas e 4 estados, ao passo que o controlador apresenta 1 entrada, 1 saída e 4 estados.

Foi implementada uma rotina automatizada, utilizando a busca dicotômica com método da bisseção, para minimização de γ na EQ. (3.45), conforme mencionado na Seção 3.3. Tanto a ordem do controlador como a ordem dos multiplicadores foram pré-determinadas para variarem de 0 a 4.

Foi utilizada a rotina HINFSTRUCT, com 2000 pontos iniciais por par n_c/n_m , onde n_c representa a ordem do controlador e n_m representa a ordem dos multiplicadores. O tempo de simulação para obtenção de resultados foi de aproximadamente 1 semana.

A TAB. 4.2 apresenta o menor limite superior de valor singular estruturado obtido para cada combinação de dimensão de controlador e multiplicador.

TAB 4.2: μ para controlador e multiplicador de ordens de 0 a 4

$n_c \setminus n_m$	0	1	2	3	4
0	72,3584	1,1406	1,6396	1,6396	1,4258
1	27,3691	0,4990	0,1426	0,1426	0,1426
2	12,0312	0,2139	0,1426	0,1426	0,1426
3	6,6515	0,1426	0,1426	0,1426	0,1426
4	3,2793	0,2852	0,1426	0,1426	0,1426

A área de interesse da TAB. 4.2 está nas células em que n_c/n_m variam de 1 a 4. Para o caso em que n_c e n_m são iguais a 1, por exemplo, tem-se $\mu = 0,4990$. Este valor é menor que o obtido tanto pela Iteração DK ($\mu = 1,0924$) como pela $D, G - K$ ($\mu = 0,9225$).

Outro aspecto importante é a considerável redução de ordem do controlador, tendo em vista que, na síntese μ não-diferenciável mista, a ordem do multiplicadores não influencia a ordem do controlador. Assim, com um controlador de primeira ordem, obteve-se um valor singular estruturado menor que um controlador de ordem total 26, da Iteração DK , e 34 da Iteração $D, G - K$.

A FIG. 4.13 mostra a superfície resultante da TAB. 4.2. Neste caso, o eixo que representa o valor de μ está em escala logarítmica.

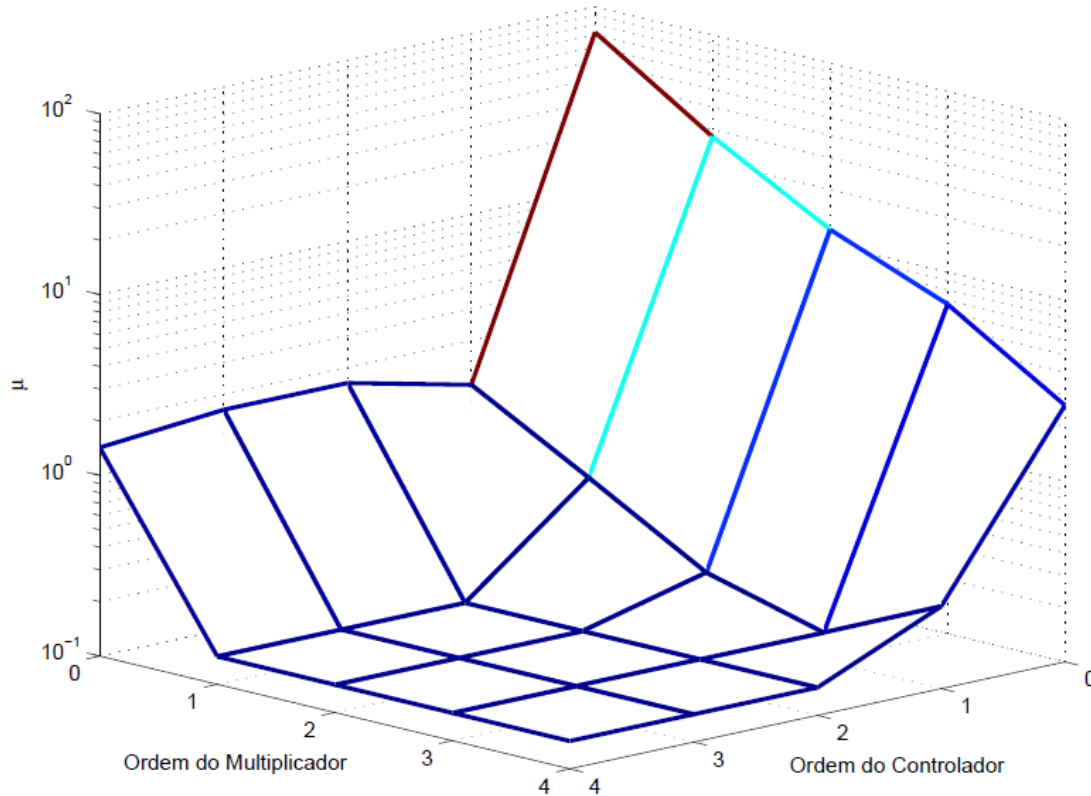


FIG. 4.13: Valor de μ para controlador e multiplicador de ordens de 0 a 4

As representações em espaço de estados dos controladores para os pares $(n_c, n_w) = (1,1)$ e $(n_c, n_w) = (4,4)$ são, respectivamente:

$$\left[\begin{array}{c|c} -0,08228 & -2,25900 \\ \hline 16,34000 & 0,08195 \end{array} \right]$$

e

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1,12000 & 0,90420 & 0,00000 & 0,00000 & -1,29400 \\ -0,01147 & -0,09379 & 2,45400 & 0,00000 & -1,46700 \\ 0,00000 & -0,18070 & -1,04700 & 0,51020 & -1,84400 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,75150 & -0,05053 & -3,01500 \\ \hline 2,00300 & 4,73700 & 2,47900 & 2,65600 & -5,07000 \end{array} \right].$$

4.3 PROBLEMA DE CONTROLE DE UM MÍSSIL

A técnica de síntese μ não-diferenciável, apresentada no capítulo 3, será aplicada agora a um problema realístico de um piloto automático para um míssil ar-ar, conforme se verifica na FIG. 4.14. Esse problema foi apresentado inicialmente em (REICHERT, 1992; NICHOLS, 1993).

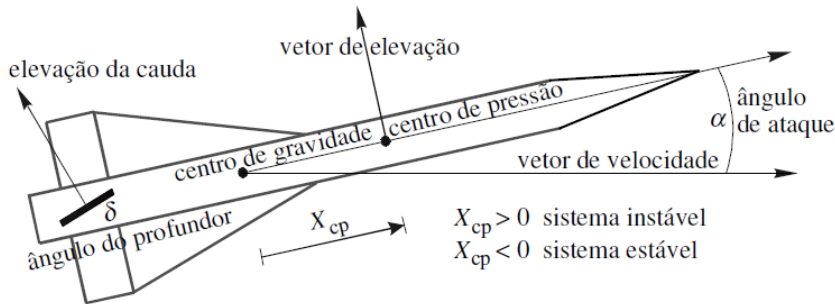


FIG. 4.14: Diagrama físico do míssil (PELLANDA, 2001)

O piloto automático é uma parte importante do míssil, pois proporciona que o alvo seja atingido com precisão. Para sua correta caracterização, devem ser considerados componentes que digam respeito à sua estrutura, aerodinâmica, propulsão e guiamento. A estrutura é responsável por suportar os esforços aos quais o míssil está submetido e proteger mecanicamente a cabeça de combate e equipamentos que constituem os sistemas de guiagem e propulsão.

A aerodinâmica de um míssil é composta por um corpo (fuselagem) e superfícies de sustentação (asas) e de controle. O perfil aerodinâmico de um míssil deve ser projetado de modo que as ordens de guiamento provenientes do piloto automático (controlador) sejam obedecidas. Através do sistema de propulsão, definem-se as características de tipo, velocidade e distância do alvo a ser atingido pelo míssil.

A configuração ideal a ser utilizada é a de "controle na cauda", a fim de que o míssil acompanhe uma aceleração normal de referência $\eta_c(t)$, gerando-se uma deflexão do profundor $\delta_c(t)$ comandada. A estabilidade de um míssil é decorrente de sua capacidade em retornar à condição de equilíbrio durante o voo, após sofrer algum tipo de perturbação e é determinada pela posição de seus centros de gravidade e de pressão. A estabilidade é garantida somente quando o centro de gravidade está a frente do centro de pressão.

Quanto mais a frente estiver o centro de gravidade, maior será a garantia de estabilidade e menor será a manobrabilidade, havendo, dessa forma, uma relação de compromisso entre estabilidade e manobrabilidade. A localização do centro de gravidade é função da localização de diversos componentes do míssil e do consumo de combustível durante o voo, enquanto a localização do centro de pressão depende de parâmetros como o número de *Mach* (velocidade do míssil por velocidade do som) e o ângulo de ataque α , que, normalmente, varia entre -30° e $+30^\circ$.

4.3.1 MODELO DO MÍSSIL

O modelo não-linear do míssil e a dinâmica do atuador são dados por (REICHERT, 1992; NICHOLS, 1993). O modelo longitudinal do míssil envolve o ângulo de ataque $\alpha(t)$ (em $^\circ$), a velocidade angular em arfagem $q(t)$ (em $^\circ/s$), o ângulo de deflexão do profundor $\delta(t)$ (em $^\circ$) e sua derivada $\dot{\delta}(t)$ (em $^\circ/s$). A aceleração normal vertical $\eta(t)$ (em g) e a velocidade angular em arfagem $q(t)$ são as saídas medidas.

Uma descrição *quasi*-LPV do modelo do míssil e do atuador é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_\delta & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\alpha & 0 & N_\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde:

$$Z_\alpha = K_\alpha M \cos \alpha [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - \frac{M}{3})] \quad (4.10)$$

$$Z_\delta = K_\alpha M \cos \alpha d_n \quad (4.11)$$

$$M_\alpha = K_q M^2 [a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m (-7 + \frac{8M}{3})] \quad (4.12)$$

$$M_\delta = K_q M^2 d_m \quad (4.13)$$

$$N_\alpha = K_z M^2 [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - \frac{M}{3})] \quad (4.14)$$

$$N_\delta = K_z M^2 d_n \quad (4.15)$$

A descrição não-linear acima representa um míssil voando a uma altitude de 20.000 ft e supõe-se que exista desacoplamento entre os eixos de guinada e de rolagem.

Observa-se que a variável $\alpha(t)$ é a principal responsável pela não-linearidade, pois em Z_α , por exemplo, há termos envolvendo $\cos(\alpha)$ e α^2 . Dados numéricos e unidades dos coeficientes apresentados nas EQ(s) (4.10) a (4.15), bem como o modelo LFT do míssil (PELLANDA, 2001), estão relacionados na Seção 7.3 do Apêndice.

A dinâmica da planta pode ser parametrizada por $\alpha(t)$ e $M(t)$, onde o número de *Mach* $M(t)$ é uma variável exógena. Devido à simetria do míssil em torno de $\alpha = 0$, controladores são projetados para $\alpha > 0$ e interpolados em $|\alpha|$ e $M(t)$, ou $\theta(t) = [|\alpha|, M(t)]^T$.

Para simulações estacionárias e não estacionárias, a trajetória temporal do número de *Mach* é

gerada por

$$\dot{M} = \frac{1}{v_s} [-|\eta| \operatorname{sen}(|\alpha|) + A_x M^2 \cos(\alpha)] \quad (4.16)$$

com $M(0) = 4$ sendo um perfil realista, como em (NICHOLS, 1993; WU, 1995). Os valores numéricos de v_s e A_x também estão relacionados na Seção 7.3 do Apêndice.

4.3.2 ESTRUTURA DE SÍNTESE E ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO

O objetivo a ser atingido é a síntese de um controlador que mantenha a estabilidade sobre toda a faixa de operação, isto é, $\alpha \in [-30, 30]$ graus e $M \in [2, 4]$, além de garantir o acompanhamento de comandos em degrau em η_c com constante de tempo não maior que 0.35 s, ultrapassagem máxima de 10% e erro em estado estacionário menor do que 1%.

A estrutura de controle em malha fechada adotada é mostrada na FIG. 4.15.

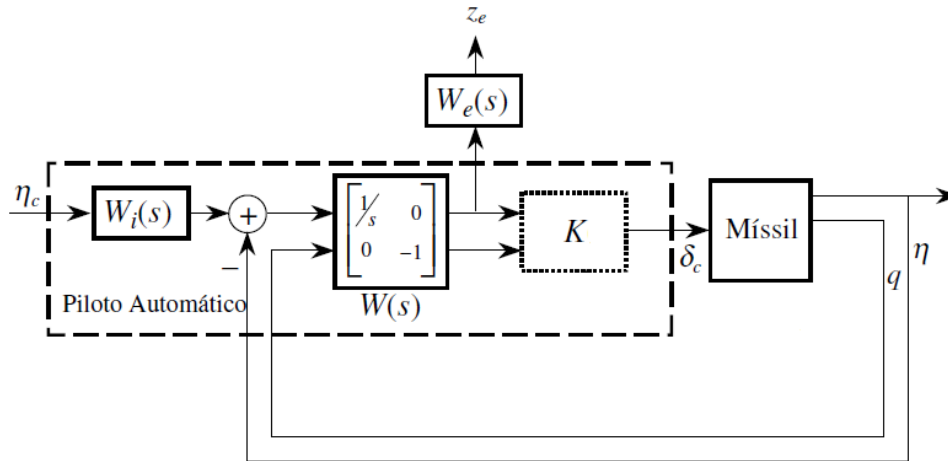


FIG. 4.15: Estrutura de interconexão e síntese para o míssil

Para se utilizar a técnica proposta no capítulo 3, os objetivos de desempenho são expressos pela escolha de funções de ponderação frequenciais apropriadas.

O pré-compensador $W_i(s)$ é usado para bloquear variações rápidas do sinal de comando, evitando a saturação do atuador. A função de ponderação $W_e(s)$ penaliza o erro de referência. Essas funções de ponderação dependentes da frequência são sintonizadas através de um processo de tentativa e erro, envolvendo diversas sínteses e simulações sobre a planta nominal, ou seja, um modelo de planta LTI obtido por uma linearização no ponto central ($\alpha = 15^\circ$, $M = 3$).

Sínteses H_∞ guiaram a escolha das ponderações, que, neste trabalho, foram tomadas emprestadas de (PELLANDA, 2001; SIMÕES, 2004). Elas possuem os seguintes valores:

$$W_i(s) = \left[\begin{array}{c|c} -14 & 1 \\ \hline - & - \\ 14 & 0 \end{array} \right], \quad (4.17)$$

$$W_{e1}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} -138,42 & -604,32 & 128,00 \\ 16,000 & 0,0000 & 0,0000 \\ - & - & - \\ 2,1421 & 193,12 & 0,1063 \end{array} \right] \quad (4.18)$$

e

$$W_{e2}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} -472,38 & 917,43 & -164,68 \\ -917,43 & -1078,2 & -121,66 \\ - & - & - \\ -164,68 & 121,66 & 0,1112 \end{array} \right]. \quad (4.19)$$

Foram utilizadas duas equações distintas (4.18 e 4.19) para representar $W_e(s)$, a fim de se estabelecer uma comparação de resultados quando se realiza alguma alteração nesta ponderação.

4.3.3 RESULTADOS E SIMULAÇÕES

Todas as sínteses e simulações foram realizadas no ambiente MATLAB, com algumas simulações feitas em SIMULINK. Para uma análise crítica de eficácia e limitações da técnica, foram abordadas duas situações com o sistema apresentado: um problema de Estabilidade Robusta e um problema de Desempenho Robusto.

4.3.3.1 ESTABILIDADE ROBUSTA

Neste primeiro momento, procurou-se projetar um controlador que garantisse Estabilidade Robusta. A partir das definições vista no modelo LFT do míssil (ver Seção 7.3.2 do Apêndice), utilizou-se a dimensão do canal de incerteza igual a $N = 12$, sendo $\sum_{i=1}^q r_i = 12$ e a dimensão do canal de desempenho $m_1 = 0$, ou seja,

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_\alpha I_6 & 0_6 \\ 0_6 & \delta_M I_6 \end{bmatrix}.$$

A dimensão do canal de controle foi $m_2 = 1$ e $p_2 = 2$. Foi utilizada, ainda, ordem 4 para o controlador e ordem 0 para o multiplicador. A escolha de um multiplicador estático surge em decorrência do fato de se ter uma estrutura bloco-diagonal de incertezas com parâmetro variante no tempo. Neste caso, introduz-se certo conservadorismo, que está associado à hipótese de um limite superior infinito para a taxa de variação do parâmetro (SHAMMA, 1994).

Após rodar o programa de síntese, verificou-se não ser possível, nestas condições, sintetizar um controlador que atingisse Estabilidade Robusta. Foi visto que o número de *Mach* exerce considerável influência na dificuldade de estabilização do míssil, afinal a dimensão de Δ dobra de 6 para 12 ao se considerar a variação no número de *Mach*.

A estabilização só foi conseguida, utilizando-se número de *Mach* fixo e seu maior valor foi igual a 3. Para este valor de M , o ângulo de ataque excursionou entre $[-20, +20]$ graus. Desta forma, o

desenvolvimento do trabalho tomou como base $M = 3$ e $\alpha \in [-20, +20]$ graus. Em virtude disto, passou-se a considerar $\delta_M = 0$.

4.3.3.2 PIOR CASO DE DESEMPENHO

Verificadas as condições em que se garantiu Estabilidade Robusta, passou-se ao objetivo de projetar um controlador que atendesse às especificações descritas na Seção 4.3.2, mesmo para o pior caso de desempenho.

Para tanto, foi feita uma comparação entre o resultado obtido pela síntese H_∞ , onde são desconsideradas a presença de incertezas, ou seja, trabalha-se apenas com o sistema nominal, e o resultado apresentado pela síntese μ não-diferenciável, considerando-se como incerteza apenas o ângulo de ataque, tendo em vista que o número de *Mach* permanecerá fixo e igual a 3, conforme já explicado anteriormente.

Síntese 1: síntese H_∞ , $K_\infty(\delta_\alpha = 0, \delta_M = 0)$

O programa de síntese para esta situação não utiliza a rotina HINFSTRUCT, mas sim a rotina HINFSYN do MATLAB, cujo algoritmo padrão utiliza as equações algébricas de Riccati. A rotina permite a mudança de método para obter uma solução via LMI. De qualquer forma, HINFSYN computa um controlador- H_∞ ótimo para uma determinada planta LTI. Este controlador resultante estabiliza a planta de síntese e possui o mesmo número de estados que esta.

Na ausência de incertezas no ângulo de ataque e no número de *Mach*, isto é, $\Delta \equiv 0$, tem-se que o valor obtido pela síntese H_∞ é o mínimo global. Assim, na síntese μ não-diferenciável, não se conseguirá um valor para γ , na matriz $P_{w,\nu}(s)$ da EQ. (3.45), menor que o obtido pela síntese H_∞ , que foi de 0,2474.

Com o controlador encontrado, para proceder uma análise qualitativa do resultado, fez-se uma simulação da resposta ao degrau (η_c para η), envolvendo a planta linear com parâmetros congelados, com 10 amostras, para o caso em que Δ é da forma:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_\alpha I_6 & 0_6 \\ 0_6 & 0_6 \end{bmatrix},$$

isto é, considerou-se apenas a incerteza relativa ao ângulo de ataque do míssil. O resultado obtido é mostrado na FIG. 4.16. Apesar de a figura induzir que o regime permanente do caso nominal é zero, isto não é verdade. Através da rotina FREQRESP(SYS,0), verifica-se que a resposta ao degrau tende para 1, sendo 0.9999999999. Ademais, a alta amplitude na resposta do caso nominal é devida ao fato de não haver qualquer penalização de controle. Os polos para o sistema nominal em malha fechada são:

- 15.145, 16 ± j 15.145, 16
- 7.081, 06
- 1.115, 95 ± j 2.234, 16
- 2628, 52
- 1.400, 70 ± j 1.293, 12
- 32, 96
- 0, 56 ± j 13, 19
- 104, 99 ± j 107, 12
- 14, 00

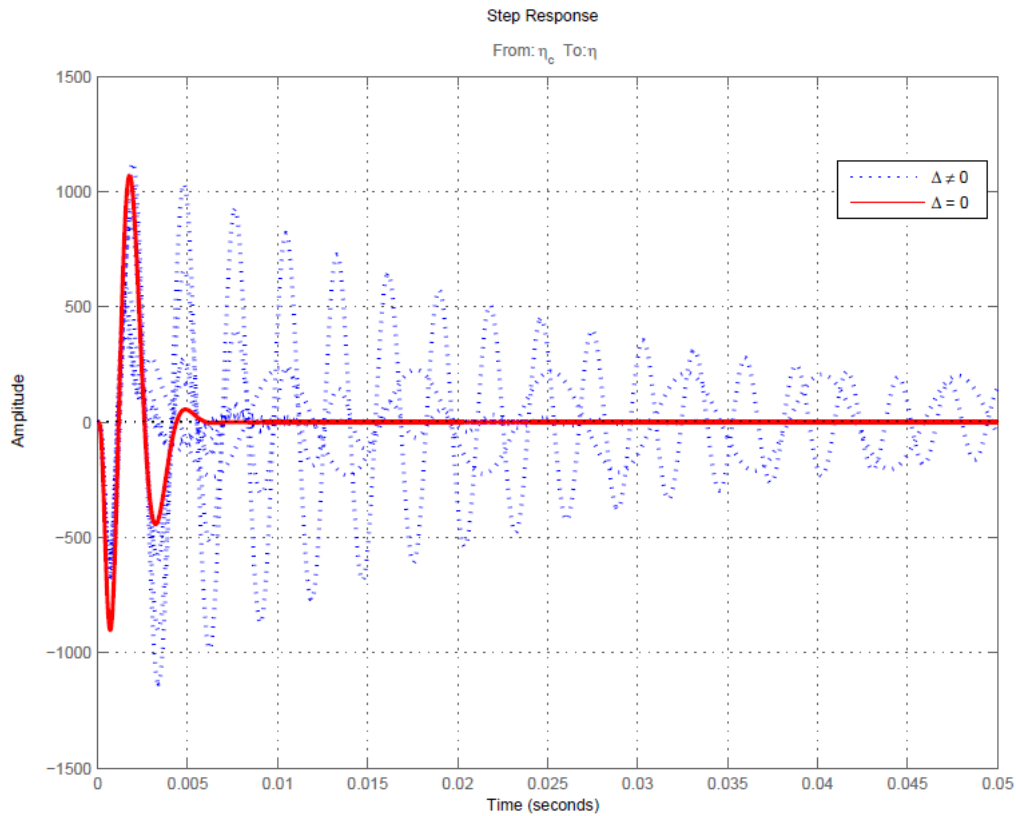


FIG. 4.16: Resposta ao degrau para o controlador K_∞

Conforme se vê, a resposta ao degrau não é satisfatória. O fato de a síntese H_∞ não levar em consideração a presença de incertezas acarreta uma resposta ao degrau extremamente oscilatória e de alta amplitude quando se utiliza o controlador por ela obtido no sistema com incerteza no ângulo de ataque.

Síntese 2: síntese μ não-diferenciável, $K_\mu(-1 < \delta_\alpha < 1, \delta_M = 0)$

Para esta situação, a dimensão do canal de incerteza é $N = 7$, sendo $\sum_{i=1}^q r_i = 6$ e a dimensão do canal de desempenho $m_1 = 1$. A dimensão do canal de controle é $m_2 = 1$ e $p_2 = 2$. Foi utilizada ordem 4 para o controlador e ordem 1 para o multiplicador. Conforme já descrito, sabe-se que o menor valor de γ que poderia ser obtido era de 0,2474.

Utilizando-se o filtro $W_i(s)$ e as ponderações $W_{e1}(s)$ e $W_{e2}(s)$, descritas respectivamente nas EQ(s) (4.18) e (4.19), após a aplicação da rotina HINFSTRUCT, obteve-se, tanto para $W_{e1}(s)$ como para $W_{e2}(s)$, γ mínimo e igual a 2,8875. Para obtenção deste valor, o tempo de simulação foi de, aproximadamente, 600 minutos.

Novamente, procedeu-se a uma análise qualitativa com o modelo LFT do míssil, considerando o parâmetro congelado. As FIG(s) 4.17 e 4.18 apresentam a resposta ao degrau (η_c para η), com 10 amostras, para as ponderações $W_{e1}(s)$ e $W_{e2}(s)$ e seus respectivos controladores $K_{\mu1}$ e $K_{\mu2}$:

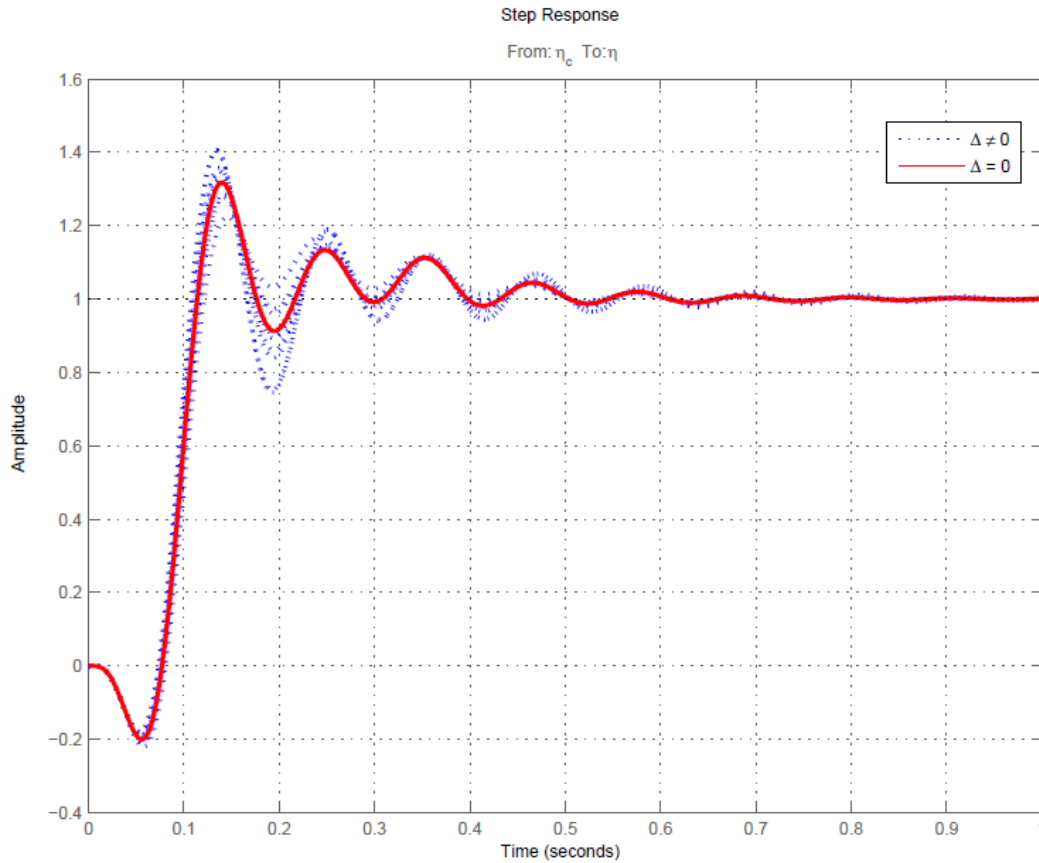


FIG. 4.17: Resposta ao degrau para o controlador $K_{\mu1}$

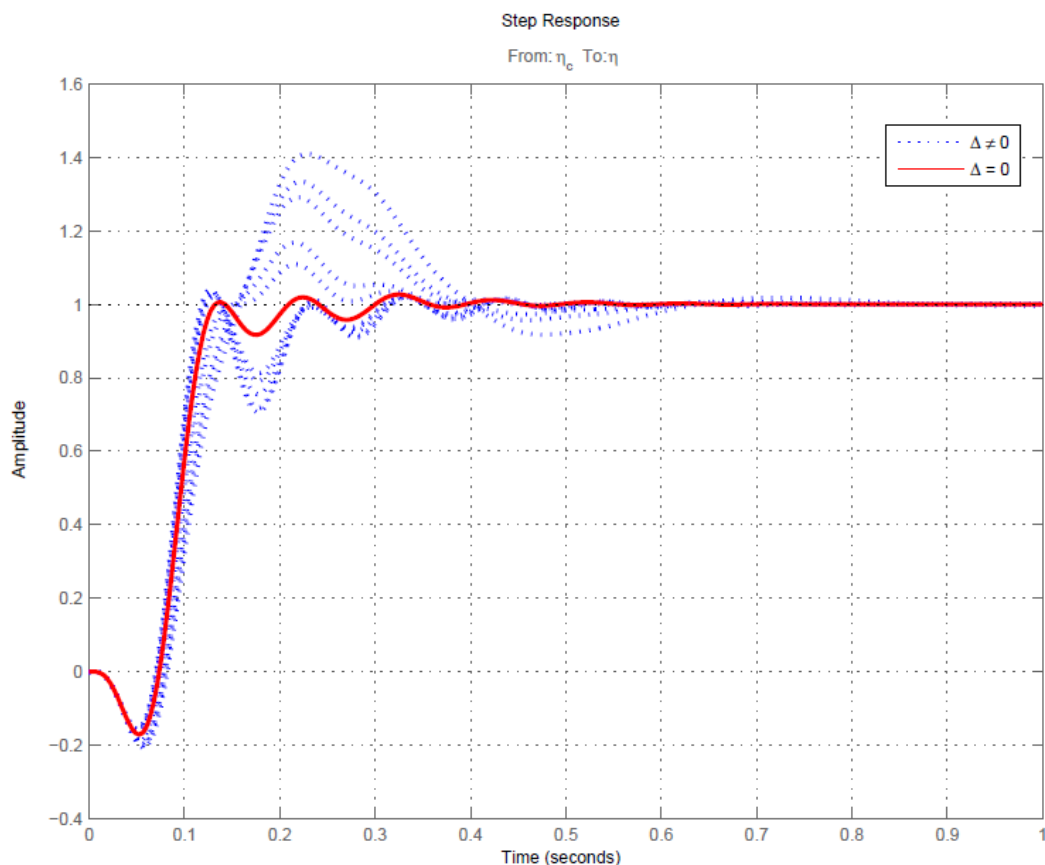


FIG. 4.18: Resposta ao degrau para o controlador $K_{\mu 2}$

A partir destes dois últimos gráficos, observa-se que a resposta ao degrau em ambos apresentou constante de tempo menor que 0,35s, erro em estado estacionário menor que 1%, porém ultrapassagem máxima de 40%, o que está acima do limite de 10%, conforme visto na Seção 4.3.2.

A fim de se reduzir a ultrapassagem máxima, o filtro passa-baixas $W_i(s)$ foi ajustado de

$$\frac{s}{s + 14}$$

para

$$\frac{s}{s + 10}$$

Essa alteração proporcionou uma variação menos abrupta no sinal de comando, o que contribuiu para reduzir o pico da resposta ao degrau unitário, conforme mostrado nas FIG(s) 4.19 e 4.20. Uma sobreposição das respostas apresentadas nestas duas últimas figuras é vista na FIG. 4.21.

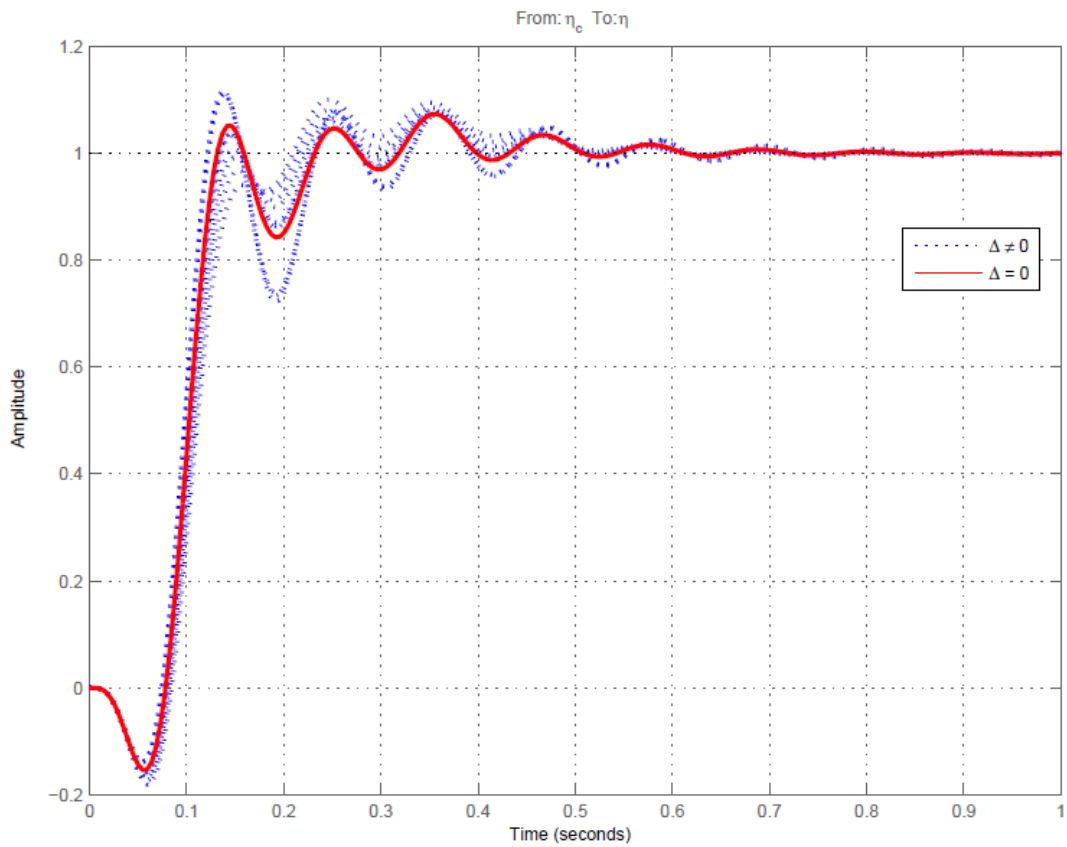


FIG. 4.19: Resposta ao degrau para o controlador $K_{\mu 1}$ com novo $W_i(s)$

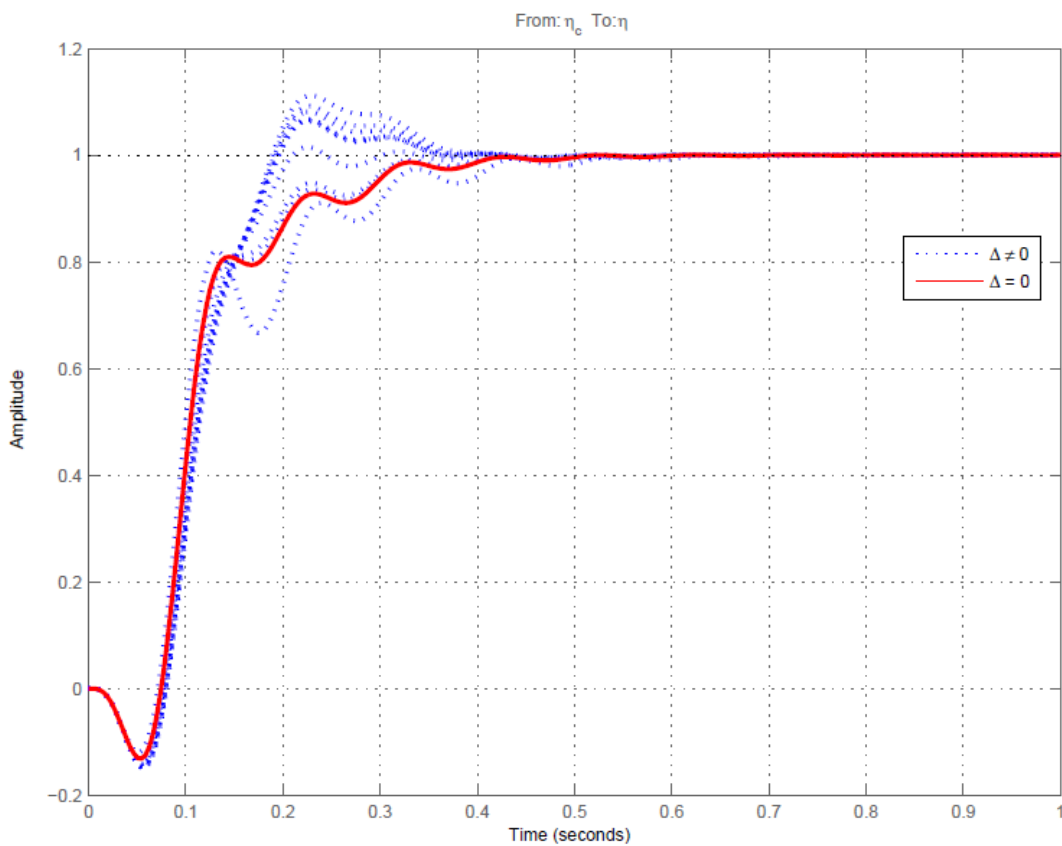


FIG. 4.20: Resposta ao degrau para o controlador $K_{\mu 2}$ com novo $W_i(s)$

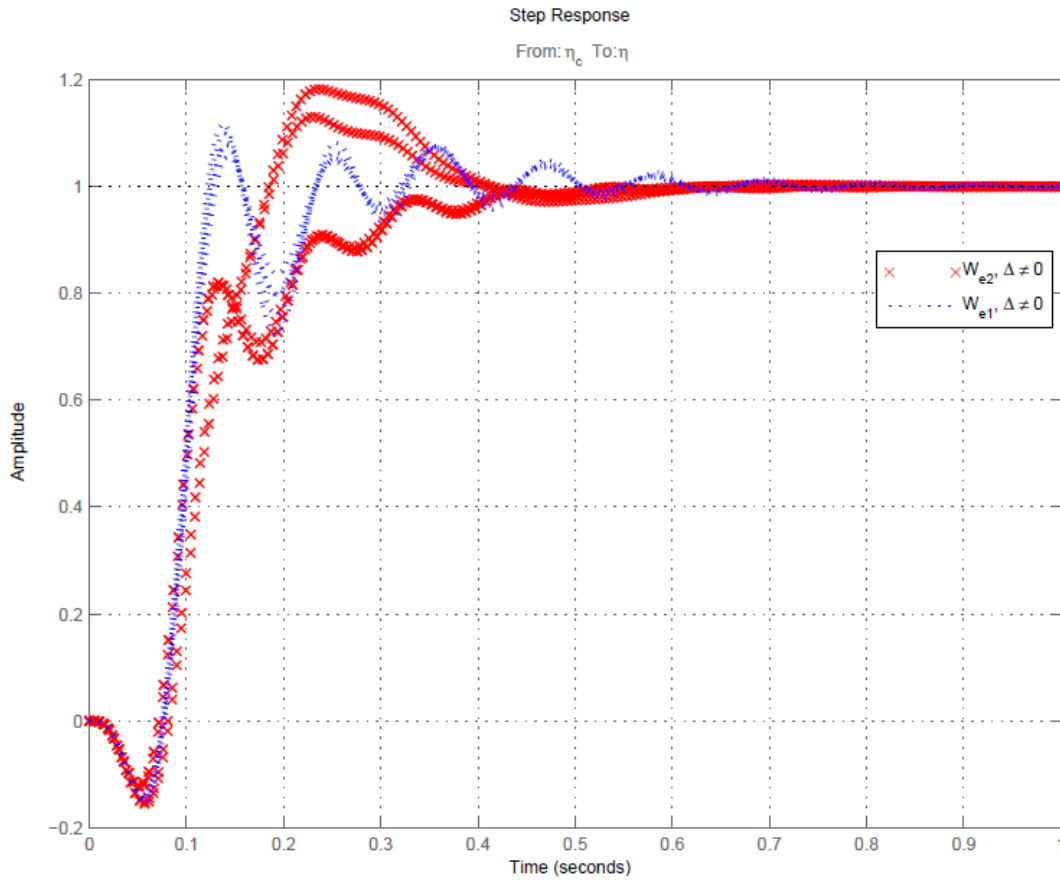


FIG. 4.21: Sobreposição das respostas apresentadas nas FIG(s) 4.19 e 4.20

A resposta obtida com a ponderação $W_{e1}(s)$ apresenta menor ultrapassagem máxima e menor discrepância entre as amostras se comparada com a resposta obtida com a ponderação $W_{e2}(s)$.

A escolha entre a utilização das ponderações $W_{e1}(s)$ e $W_{e2}(s)$ depende do que se deseja obter como resposta. Se o objetivo é alcançar menor ultrapassagem máxima, deve-se fazer uso de $W_{e1}(s)$. Porém, se o foco está em uma resposta menos oscilante, com menor tempo de acomodação, a preferência deve ser pela ponderação $W_{e2}(s)$.

Foram feitas, também, simulações no SIMULINK, com o modelo não-linear e $M = 3$, para verificar a capacidade de acompanhamento de uma aceleração normal de referência $\eta_c(t)$. Analisando-se as FIG(s) 4.22 e 4.23, pode-se verificar como fazer a melhor escolha das ponderações $W_{e1}(s)$ e $W_{e2}(s)$ de acordo com o desejado. Se o objetivo é um acompanhamento de referência mais rápido, a escolha é pela ponderação $W_{e1}(s)$, ao passo que se o desejado é uma resposta mais suave, com menos oscilação, recomenda-se a utilização de $W_{e2}(s)$.

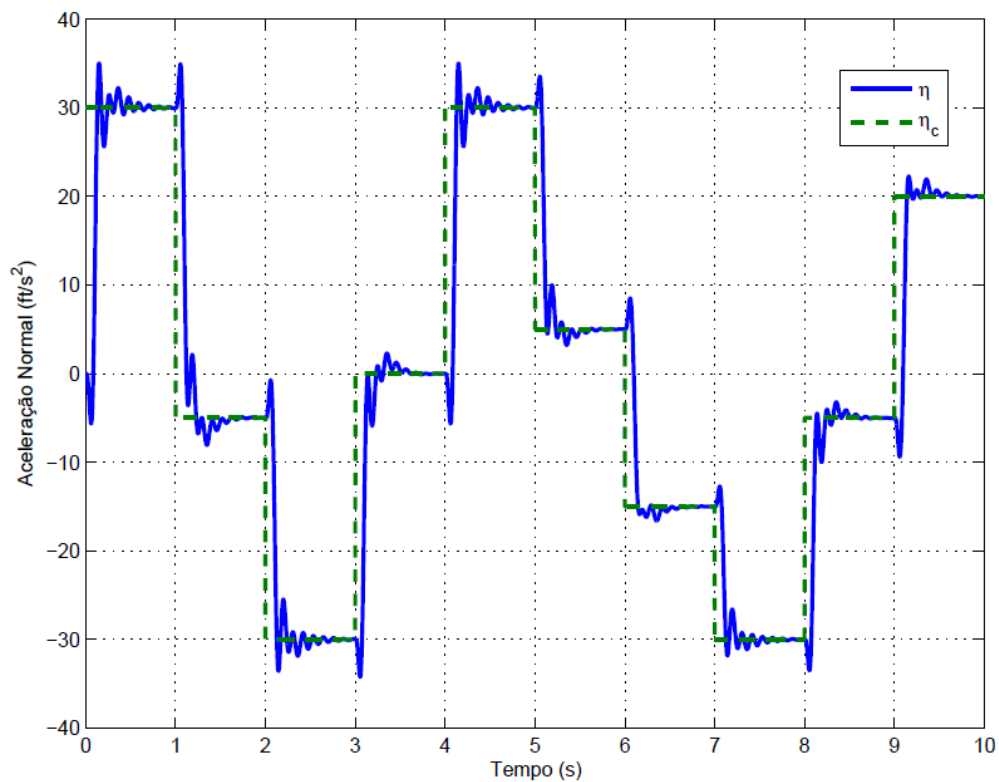


FIG. 4.22: Acompanhamento de referência para o controlador $K_{\mu 1}$ com novo $W_i(s)$

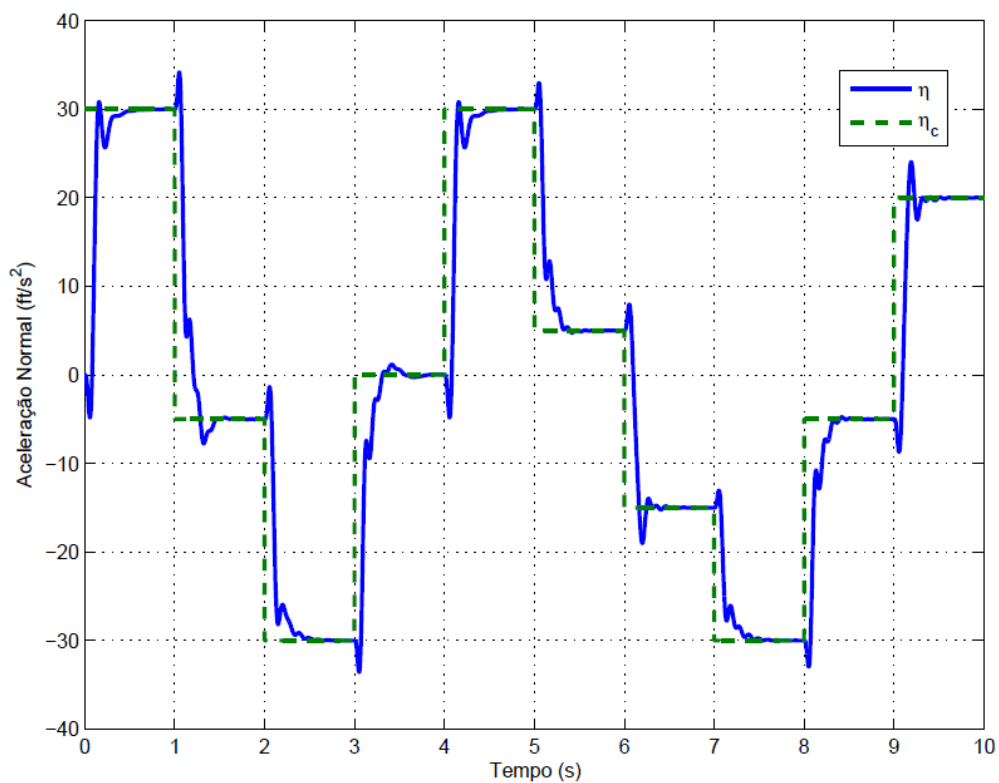


FIG. 4.23: Acompanhamento de referência para o controlador $K_{\mu 2}$ com novo $W_i(s)$

Foi apresentado também o gráfico do ângulo de ataque para o caso abordado nas FIG(s) 4.22 e 4.23, respectivamente.

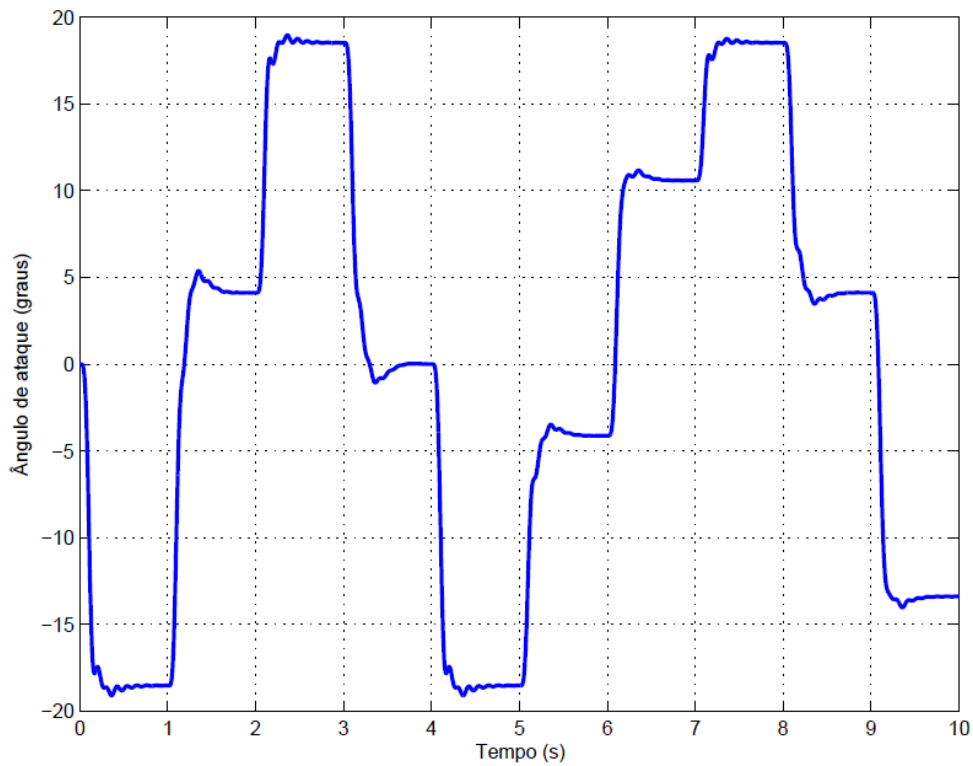


FIG. 4.24: Ângulo de ataque para o controlador $K_{\mu 1}$ com novo $W_i(s)$

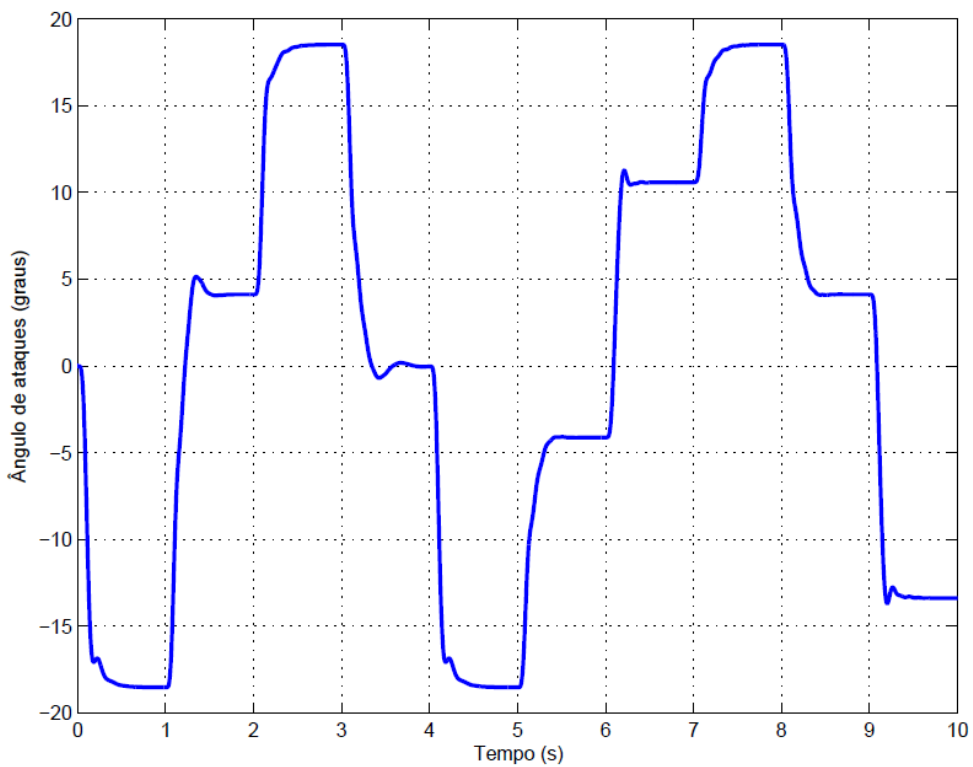


FIG. 4.25: Ângulo de ataque para o controlador $K_{\mu 2}$ com novo $W_i(s)$

Finalmente, há que se ressaltar que todos os resultados vistos para o problema de controle do míssil foram decorrentes da síntese de controladores LTI, e não LPV. Assim, apesar de a hipótese da velocidade do míssil não variar ($M = 3$), pode-se concluir, pelos resultados obtidos com o modelo não-linear, que as respostas obtidas pelos controladores LTI sintetizados foram satisfatórias.

5 CONCLUSÃO GERAL

5.1 RESUMO DA CONTRIBUIÇÃO

5.1.1 SOBRE A TEORIA E METODOLOGIA

No capítulo 2, foram abordados alguns resultados da Teoria de Controle Robusto que possibilitaram o desenvolvimento da síntese de controladores para plantas sujeitas a incertezas. Dentre as numerosas tentativas de se encontrar soluções para problemas de controle robusto, a síntese μ baseada no limite superior do valor singular estruturado foi certamente o caminho mais explorado.

Em virtude disto, foram apresentadas as Iterações DK e $D, G - K$ (YOUNG, 1996), que combinam análise μ e síntese H_∞ . A ferramenta utilizada para implementação desta síntese é a rotina `DKSYN` do MATLAB. Haja vista as limitações da síntese μ clássica, havia a necessidade de se buscar novas alternativas para síntese de controladores robustos. Foi então que (APKARIAN, 2011) propôs uma nova técnica, baseada em otimização não-diferenciável.

No capítulo 3, discutiu-se a teoria referente a essa técnica, apresentando-se o controlador aumentado de estrutura especial, que encapsula, após translações, os multiplicadores juntamente ao controlador propriamente dito. A síntese é realizada de uma só vez, fixando-se, de antemão, a ordem do controlador e dos multiplicadores. A ferramenta utilizada para implementação da síntese μ não-diferenciável com multiplicadores dinâmicos é a rotina `HINFSTRUCT` do MATLAB.

5.1.2 ESTUDOS DE CASO

Na primeira aplicação discutida (Seção 4.1), foi visto que, quando os parâmetros reais δ_1 e δ_2 eram iguais a -1, o sistema descrito na EQ. (4.1) apresentava um polo instável, não mínimo, em $s = 0$. A partir disso, podia-se concluir que a máxima margem paramétrica alcançável para esse sistema estava limitada superiormente em 1, independentemente da ordem do controlador projetado.

Foi utilizada para síntese de controladores a Iteração DK e a síntese μ não-diferenciável real. Conforme se observa na TAB. 4.1, conclui-se que o resultado da síntese μ não-diferenciável se aproximou mais do limite superior da máxima margem paramétrica alcançável do que o resultado das Iterações, tendo em vista que estas sequer garantem otimalidade local e estão sujeitas a sofrer terminações prematuras durante os passos de minimização.

A segunda aplicação (Seção 4.2) abordou o problema de controle de um sistema massa-mola-amortecedor incerto, cujo objetivo era projetar uma força de controle f_1 para atenuar o efeito de uma perturbação f_2 na posição da massa m_2 . Trata-se de um problema, cuja resolução clássica abrange a aplicação das Iterações DK ou $D, G - K$, conforme se utilize a variável k_1 como parâmetro complexo ou real, respectivamente, além de uma dinâmica não-modelada (retardo temporal entre

a força comandada f_1 e sua aplicação na massa m_1). Para o tratamento de k_1 como incerteza complexa, o limite superior para o valor singular estruturado (encontrado pela rotina DKSYN) foi de 1,0924, com controlador de dimensão total igual a 26. Para k_1 como incerteza real paramétrica, o valor singular estruturado baixou para 0,9225, porém com controlador de ordem geral igual a 34. A síntese μ não-diferenciável mista com multiplicadores dinâmicos buscou resolver o mesmo problema, porém com o objetivo de encontrar um controlador que apresentasse ordem reduzida em relação à planta. Da TAB. 4.2, vê-se, por exemplo, que, para controlador de ordem 1 e multiplicador de ordem 1, o valor de μ foi de 0,4990, inferior aos valores obtidos pelas Iterações DK e $D, G - K$. Sendo assim, o resultado apresentado pela síntese μ não-diferenciável em muito superou aquele apresentado pelas técnicas anteriores, pois conseguiu minimizar ainda mais o valor de pico do limite superior de μ , utilizando, inclusive, um controlador de ordem bastante reduzida.

A terceira aplicação (Seção 4.3) envolveu o problema de controle de um míssil, cujas incertezas estavam no ângulo de ataque e no número de *Mach*. A proposta inicial era α excursionar entre $[-30, +30]$ graus e M entre $[2, 4]$ *Mach*. Após várias tentativas de simulações, não foi possível obter Estabilidade Robusta nesta condição. A preponderante influência de M na estabilização do míssil, em sua trajetória de voo, obrigou que se trabalhasse somente com a incerteza relativa ao ângulo de ataque α . Desta forma, ao se manter M fixo e igual a 3, chegou-se a um valor de α restrito entre $[-20, +20]$ graus. Esta foi a condição utilizada em todas as simulações subsequentes.

Com o intuito de se projetar um controlador que garantisse Desempenho Robusto, fez-se uma comparação entre o resultado obtido pela síntese H_∞ e pela síntese μ não-diferenciável. Através da síntese H_∞ , constatou-se que, na ausência de incertezas, o valor mínimo para γ (ver EQ.(3.45)) era 0,2474. Sendo assim, sabia-se de antemão que, ao se rodar o programa de síntese μ não-diferenciável, a minimização de γ não baixaria de 0,2474. Isto foi constatado, pois obteve-se como valor mínimo 2,8875.

O controlador alcançado pela síntese H_∞ foi utilizado no sistema sujeito a incerteza no ângulo de ataque, com número de *Mach* fixo. O resultado da resposta qualitativa ao degrau unitário, apresentado na FIG. 4.16, mostrou que o controlador obtido não foi capaz de atender às especificações de desempenho desejadas, contendo uma resposta oscilatória de amplitude extremamente elevada.

Na síntese μ não-diferenciável, trabalhou-se com o filtro $W_i(s)$ e com as ponderações apresentadas nas EQ(s) (4.18) e (4.19). Os controladores obtidos em cada caso foram utilizados para traçar o gráfico da resposta qualitativa ao degrau unitário, conforme feito também para o controlador resultante da síntese H_∞ . Os resultados foram apresentados nas FIG(s) 4.17 e 4.18.

A partir delas, observa-se que a resposta ao degrau de ambas apresentou constante de tempo menor que 0,35s, erro em estado estacionário menor que 1%, porém ultrapassagem máxima de 40%, o que está acima do limite de 10%, conforme visto na Seção 4.3.2. A fim de se reduzir a ultrapassagem máxima, o filtro passa-baixas $W_i(s)$ foi ajustado. Essa alteração proporcionou uma variação menos abrupta no sinal de comando, o que contribuiu para reduzir o pico da resposta ao

degrau unitário, conforme se vê nas FIG(s) 4.19 e 4.20. A sobreposição das respostas está mostrada na FIG. 4.21.

A escolha entre a utilização das ponderações $W_{e1}(s)$ e $W_{e2}(s)$ depende do que se deseja obter como resposta. Se o objetivo é alcançar menor ultrapassagem máxima, deve-se fazer uso de $W_{e1}(s)$. Porém, se o foco está em uma resposta menos oscilante, com menor tempo de acomodação, a preferência deve ser pela ponderação $W_{e2}(s)$.

Foram feitas, também, simulações no SIMULINK, com o modelo não-linear do míssil e $M = 3$, para verificar a capacidade de acompanhamento de uma aceleração normal de referência $\eta_c(t)$. Analisando-se as FIG(s) 4.22 e 4.23, pôde-se verificar como fazer a melhor escolha das ponderações $W_{e1}(s)$ e $W_{e2}(s)$ de acordo com o desejado. Se o objetivo é um acompanhamento de referência mais rápido, a escolha é pela ponderação $W_{e1}(s)$, ao passo que se o desejado é uma resposta mais suave, com menos oscilação, recomenda-se a utilização de $W_{e2}(s)$.

Há que se ressaltar que todos os resultados vistos para o problema de controle do míssil foram decorrentes da síntese de controladores LTI, e não LPV. A dificuldade de se lidar com δ_M impediu, na prática, uma extensão para um sistema de controle LPV. Uma possível explicação é que a técnica da síntese μ não-diferenciável é bastante sensível a dimensão de Δ ($\dim \Delta$). Se $\dim \Delta$ aumenta, o mesmo ocorre com a dimensão dos multiplicadores. Isto, por sua vez, acarreta o aumento do número de variáveis sintonizáveis de projeto, elevando a quantidade de mínimos locais, o que pode prejudicar a eficiência da técnica. Se considerarmos apenas δ_α , tem-se que $\dim \Delta = 6$. Com δ_α e δ_M , $\dim \Delta = 12$ e, com δ_α, δ_M e um controlador LPV, $\dim \Delta$ passa a ser 24. Em virtude disto, foi feito o ajuste para se trabalhar com M fixo e igual a 3. Nesta condição, pôde-se, então, concluir que as respostas obtidas pelos controladores LTI sintetizados foram satisfatórias.

5.2 SUGESTÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Uma sugestão para trabalhos futuros é a investigação de um processo mais eficiente de escolha dos pontos iniciais dos parâmetros sintonizáveis. A abordagem não-diferenciável proposta baseia-se em uma técnica de otimização local. Desta forma, a escolha do ponto inicial pode impactar os resultados, levando eventualmente a um limite superior para μ mais conservador. Nos exemplos discutidos neste trabalho, os pontos iniciais foram escolhidos de maneira aleatória (opção RANDOMSTART da rotina HINFSTRUCT). As limitações impostas por essa medida foram aproximadamente contornadas adotando-se uma estratégia de múltiplos começos. No entanto, essa estratégia pode aumentar razoavelmente o tempo computacional, sobretudo quando se utiliza a técnica com grade de frequências.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- APKARIAN, P. **Nonsmooth μ synthesis**. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 21(13):1493–1508, 2011. ISSN 1099-1239.
- APKARIAN, P. e NOLL, D. **Nonsmooth H_∞ synthesis**. IEEE Transactions Automatic Control, 51:71–86, 2006.
- APKARIAN, P., NOLL, D. e PROT, O. **A trust region spectral bundle method for non-convex eigenvalue optimization**. SIAM J. on Control and Optimization, 19:281–306, 2008.
- BALAS, G. J., DOYLE, J. C., GLOVER, K., PACKARD, A. e SMITH, R. **μ Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide**. MathWorks, Natick, Mass, 1993.
- BARROS, D., FEKRI, S. e ATHANS, M. **Robust mixed- μ synthesis performance for mass-spring system with stiffness uncertainty**. Mediterrean Conference on Control and Automation in Proceedings IEEE International Symposium, págs. 743–748, 2005.
- BLONDEL, V. D. e TSITSIKLIS, J. N. **A survey of computational complexity results in systems and control**. Automatica, 36(9):1249–1274, 2000.
- BOYD, S. e BALAKRISHNAN, V. **A regularity result for the singular values of a transfer matrix and a quadratically convergent algorithm for computing its L_∞ -norm**. In Proceedings IEEE Conference on Decision and Control, 2:954–955, 1989.
- BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E. e BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Studies in Applied Mathematics, 15, 1994.
- BRUINSMA, N. A. e STEINBUCH, M. **A fast algorithm to compute the H_∞ -norm of a transfer function matrix**. Systems & Control Letters, 14:287–293, 1990.
- DOYLE, J. C. **Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties**. IEEE Proceedings on Control Theory and Applications, 129(6):242–250, 1982.
- DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. e FRANCIS, B. **State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems**. Automatic Control, IEEE Transactions on, 34: 831–847, 1989.
- FAN, M. K. H. e TITS, A. L. **Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics**. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 36:25–38, 1991.
- FAN, M. K. H. e TITS, A. L. **A measure of worst-case H_∞ performance and of largest acceptable uncertainty**. Systems & Control Letters, 18(6):409 – 421, 1992.
- FU, M. **The real structured singular value is hardly approximable**. IEEE Transactions Automatic Control, 42(9):1286 –1288, 1997.
- MCFARLANE, D. e GLOVER, K. **A loop-shaping design procedure using H_∞ synthesis**. IEEE Transactions Automatic Control, 37:759–769, 1992.
- MEINSMA, G., SHRIVASTAVA, Y. e FU, M. **A dual formulation of mixed μ and on the losslessness of (D, G) -scaling**. IEEE Transactions Automatic Control, 42(7):1032 –1036, 1997.

- NICHOLS, R. A., REICHERT, R. T. e RUGH, W. J. **Gain scheduling for H_∞ controllers: a flight control example**. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1:69–79, 1993.
- PACKARD, A. e DOYLE, J. **The complex structured singular value**. Automatica, 29:71–109, 1993.
- PELLANDA, P. C. **Commande de Systèmes Instationnaires: Séquencement de Compensateurs et Commande LPV**. Tese de Doutorado, ENSAE, 2001.
- REICHERT, R. T. **Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles**. IEEE Control Systems Magazine, 12:35–42, 1992.
- SAFONOV, M. G. e CHIANG, R. Y. **Real/Complex K_m -synthesis without Curve Fitting**, volume 56. Academic Press, New York, 1993.
- SHAMMA, J. S. **Robust stability with time-varying structured uncertainty**. IEEE Transactions on Automatic Control, 39:714–724, 1994.
- SIMÕES, A. M. **Controle Linear a Parâmetros Variáveis de Sistemas Não-Lineares**. Dissertação de Mestrado, IME, 2004.
- SKOGESTAD, S. e POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. John Wiley & Sons, 2005.
- WU, F., PACKARD, A. e BALAS, G. **LPV control design for pitch-axis missile autopilots**. In Proceedings IEEE Conference on Decision and Control, 1:188–193, 1995.
- YOUNG, P. M. **Controller design with mixed uncertainties**. American Control Conference, 2:2333–2337, 1994.
- YOUNG, P. M. **Controller design with real parametric uncertainty**. International Journal of Control, 65:469–509, 1996.
- YOUNG, P. M. **Structured singular value approach for systems with parametric uncertainty**. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 11(7):653–680, 2001.
- ZAMES, G. **On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems - Part one: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity**. IEEE Transactions on Automatic Control, 11:228–238, 1966.
- ZHOU, K., DOYLE, J. C. e GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.

7 APÊNDICES

7.1 APÊNDICE 1: CONCEITOS E DEFINIÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR

7.1.1 TRANSFORMAÇÕES FRACIONAIS LINEARES

As Transformações Fracionais Lineares (LFT, do inglês *Linear Fractional Transformations*), amplamente utilizadas na literatura de controle, foram introduzidas em (DOYLE, 1984). Essas funções de matrizes são ferramentas muito poderosas na análise e projeto de sistemas. Considere uma matriz P de dimensões $(n_1 + n_2) \times (m_1 + m_2)$ particionada da seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Sejam as matrizes $\Delta \in \mathbb{C}^{m_1 \times n_1}$ e $K \in \mathbb{C}^{m_2 \times n_2}$ de dimensões compatíveis, respectivamente, com as partições superior e inferior de P . Adota-se a seguinte notação para representar as LFT superior e inferior:

$$\mathcal{F}_u(P, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}, \quad (7.2)$$

$$\mathcal{F}_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}, \quad (7.3)$$

onde o subscrito u significa superior (*upper*) e l inferior (*lower*).

A LFT inferior $\mathcal{F}_l(P, K)$ é a função de transferência de w para z , obtida com a realimentação positiva K na partição inferior de P , conforme ilustrado na FIG. 7.1.

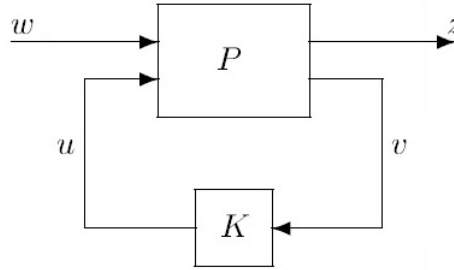


FIG. 7.1: LFT inferior em função de K

O diagrama em blocos mostrado na FIG. 7.1 pode ser reescrito como:

$$z = P_{11}w + P_{12}u, \quad v = P_{21}w + P_{22}u, \quad u = Kv. \quad (7.4)$$

Eliminando u e v em (7.4), obtém-se:

$$z = \mathcal{F}_l(P, K)w = [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]w. \quad (7.5)$$

De maneira análoga, a LFT superior conforme ilustrado na FIG. 7.2, $\mathcal{F}_u(P, \Delta)$, é obtida pela realimentação positiva Δ na partição superior de P .

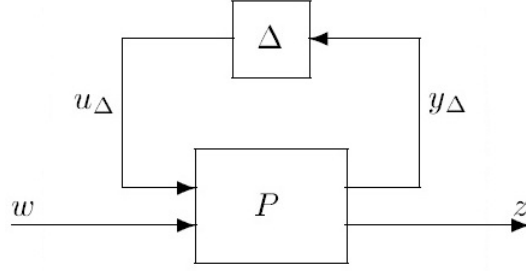


FIG. 7.2: LFT superior em função de Δ

Uma propriedade importante das LFT é que a interconexão de LFT também é uma LFT. Considere a FIG. 7.3, onde R é escrito como a LFT inferior envolvendo Q e K' , K' por sua vez é a LFT inferior envolvendo M e K .

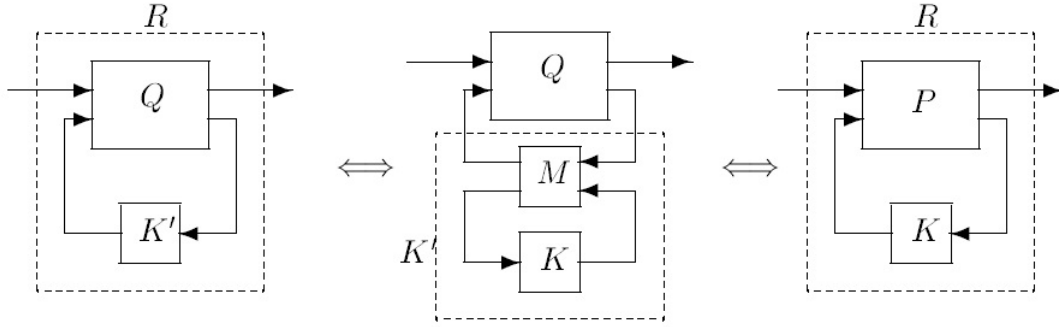


FIG. 7.3: Interconexão de LFTs resulta em uma LFT

Deseja-se expressar R diretamente como uma LFT em termos de K . Uma vez que

$$R = \mathcal{F}_l(Q, K'), \quad \text{onde} \quad K' = \mathcal{F}_l(M, K), \quad (7.6)$$

o objetivo é obter P em termos de Q e M tal que:

$$R = \mathcal{F}_l(P, K). \quad (7.7)$$

Obtém-se:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{12}M_{11}(I - Q_{22}M_{11})^{-1}Q_{21} & Q_{12}(I - M_{11}Q_{22})^{-1}M_{12} \\ M_{21}(I - Q_{22}M_{11})^{-1}Q_{21} & M_{22} + M_{21}Q_{22}(I - M_{11}Q_{22})^{-1}M_{12} \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Aplicam-se expressões similares quando são usadas LFT superiores. Para

$$R = \mathcal{F}_u(M, \Delta'), \quad \text{onde} \quad \Delta' = \mathcal{F}_u(Q, \Delta), \quad (7.9)$$

escreve-se $R = \mathcal{F}_u(P, \Delta)$, com P obtido através de (7.8), em termos de Q e M .

A generalização das LFT superior e inferior é dada pelo Produto Estrela de Redheffer.

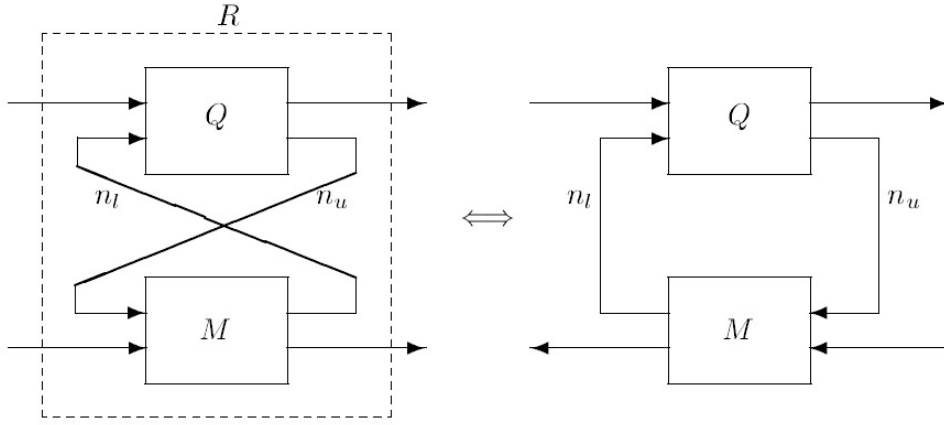


FIG. 7.4: Produto estrela entre Q e M , $R = Q * M$

Na FIG. 7.4, Q e M são interconectadas tal que as últimas n_u saídas de Q são as primeiras n_u entradas de M , e as primeiras n_l saídas de M são as últimas n_l entradas de Q . As matrizes Q e M com as partições correspondentes são escritas como:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

A matriz R mostrada na FIG. 7.4 é chamada de produto estrela entre Q e M e é dada pela fórmula:

$$R = Q * M = \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{12}M_{11}(I - Q_{22}M_{11})^{-1}Q_{21} & Q_{12}(I - M_{11}Q_{22})^{-1}M_{12} \\ M_{21}(I - Q_{22}M_{11})^{-1}Q_{21} & M_{22} + M_{21}Q_{22}(I - M_{11}Q_{22})^{-1}M_{12} \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Nota-se que $Q * M$ depende do particionamento das matrizes Q e M . Se uma das matrizes não é particionada, significa dizer que não possui entradas e saídas externas, nesse caso, $Q * M$ dá a interconexão máxima. Por exemplo:

$$\mathcal{F}_l(P, K) = P * K, \quad (7.12)$$

$$\mathcal{F}_u(P, \Delta) = \Delta * P. \quad (7.13)$$

Definindo-se o Operador de Transformação Bilinear

$$\mathcal{B}_q = \begin{bmatrix} I_q & -\sqrt{2}I_q \\ \sqrt{2}I_q & -I_q \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

tem-se

$$\mathcal{B}_q * \mathcal{B}_q = \begin{bmatrix} 0 & I_q \\ I_q & 0 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

que é o elemento unitário para o Produto Estrela de Redheffer. Para qualquer matriz quadrada complexa $X \in \mathbb{C}^{q \times q}$

$$X + X^H \succ 0 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(\mathcal{F}_l(\mathcal{B}_q, X)) < 1 \quad (7.16)$$

e vice-versa. Similarmente, tem-se

$$\bar{\lambda}(X + X^H) < 0 \Leftrightarrow X + X^H \prec 0 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(\mathcal{F}_l(\tilde{\mathcal{B}}_q, X)) < 1, \quad (7.17)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{B}}_q = \begin{bmatrix} I_q & \sqrt{2}I_q \\ \sqrt{2}I_q & I_q \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Com o intuito de economizar espaço, termos denotados por $(\cdot)^H$ representam o simétrico hermitiano de (\cdot) .

7.1.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Os autovalores λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de A são as n soluções da equação característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (7.19)$$

O autovetor à direita, t_i , correspondente ao autovalor λ_i é a solução não-trivial ($t_i \neq 0$) para:

$$(A - \lambda_i I)t_i = 0 \Leftrightarrow At_i = \lambda_i t_i. \quad (7.20)$$

O autovetor à esquerda correspondente, q_i , satisfaz:

$$q_i^H(A - \lambda_i I) = 0 \Leftrightarrow q_i^H A = \lambda_i q_i^H. \quad (7.21)$$

Os autovalores também são chamados de ganhos característicos. O conjunto de autovalores de A é chamado de espectro de A e o maior valor absoluto entre os autovalores é o raio espectral, $\rho(A)$:

$$\rho(A) \triangleq \max_i (|\lambda_i(A)|). \quad (7.22)$$

Tem-se, ainda, a notação $\alpha(A)$ para abscissa espectral, isto é:

$$\alpha(A) \triangleq \max_{i=1, \dots, n} \Re \lambda_i \quad (7.23)$$

Normalmente trabalha-se com autovetores normalizados, isto é, $t_i^H t_i = 1$. Isso é possível graças à propriedade de que se t é um autovetor então αt também é, para qualquer α escalar. Um resultado importante é que autovalores distintos geram autovetores linearmente independentes.

Os autovetores podem ser organizados de maneira a representar as colunas de uma matriz T e os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os elementos da matriz diagonal Λ :

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}; \quad \Lambda = \text{diag} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}. \quad (7.24)$$

Então, a equação (7.20) pode ser reescrita como:

$$AT = T\Lambda. \quad (7.25)$$

T é a matriz de transformação utilizada para a diagonalização da matriz A quando esta possui autovetores linearmente independentes tal que T^{-1} existe (isto sempre ocorre para autovalores distintos, mas pode ocorrer também em outros casos, por exemplo $A = I$). Da equação (7.25) obtém-se a fórmula para a diagonalização:

$$\Lambda = T^{-1}AT. \quad (7.26)$$

A seguir, serão enumeradas algumas propriedades dos autovalores:

- A soma dos autovalores de A é igual ao traço de A (soma dos elementos da diagonal):
 $tr A = \sum_i \lambda_i$.
- O produto dos autovalores de A é igual ao determinante de A : $det(A) = \prod_i \lambda_i$.
- Os autovalores de uma matriz triangular superior são iguais aos elementos da diagonal.
- Para uma matriz real os autovalores ou são reais ou pares complexos conjugados.
- A e A^T possuem os mesmos autovalores (mas autovetores diferentes).
- A inversa A^{-1} existe se e somente se todos os autovalores de A são diferentes de zero. Nesse caso, A^{-1} tem autovalores $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.
- A matriz $(cI + A)$ tem autovalores $c + \lambda_i$.
- A matriz cA^k , onde k é um inteiro tem os autovalores $c\lambda_i^k$.

7.1.3 VALORES SINGULARES

Os valores singulares de uma matriz complexa $A_{n \times m}$, representados por $\sigma_i(A)$, $i = 1, \dots, k$, são as k raízes quadradas não negativas dos autovalores de $A^H A$ (ou AA^H), onde $k = \min(n, m)$, ou seja:

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H A)} \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (7.27)$$

Um modo de representar uma matriz de forma a expor sua estrutura interna é a chamada Decomposição em Valores Singulares (DVS). Para uma matriz $A_{n \times m}$ a DVS é dada por:

$$A = U \Sigma V^H = \sum_{i=1}^k \sigma_i(A) u_i v_i^H, \quad (7.28)$$

onde $U_{n \times n}$ e $V_{m \times m}$ são matrizes unitárias formadas por vetores colunas dados por:

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_m),$$

e $\Sigma_{n \times m}$ contém a matriz diagonal Σ_1 com os valores singulares σ_i , reais e não negativos, arranjados em ordem decrescente:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad n \geq m \quad (7.29)$$

ou

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad n \leq m \quad (7.30)$$

e

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k); \quad k = \min(m, n), \quad (7.31)$$

onde

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k = \underline{\sigma}. \quad (7.32)$$

Esta decomposição não é única, uma vez que as matrizes U e V não são únicas. Contudo, os σ_i são únicos. Como U e V são unitárias, $\text{posto}(A) = \text{posto}(\Sigma)$. Então se $\text{posto}(A) = k$, somente os k primeiros valores singulares são positivos, os demais são iguais a zero.

Pode ser mostrado que as colunas de U e V são os autovetores unitários de AA^H e de $A^H A$ respectivamente, conhecidos como vetores singulares à esquerda e à direita da matriz A .

A partir dos valores singulares é possível definir o chamado número de condicionamento, grandeza dependente da frequência que em análise numérica mede o quão próximo da singularidade está uma matriz:

$$\text{cond}(A) = \frac{\bar{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)}. \quad (7.33)$$

$\underline{\sigma}$ também é utilizado como indicador de singularidade, quanto mais próximo de zero for o valor de $\underline{\sigma}(A)$, mais próxima da singularidade está a matriz A .

Um resultado importante encontrado em (SKOGESTAD, 2005) refere-se ao maior valor singular de uma matriz bloco-diagonal :

$$\bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right) = \max \{ \bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B) \}. \quad (7.34)$$

7.1.4 FÓRMULA DE SCHUR

O determinante da matriz A com a seguinte partição:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (7.35)$$

é dado por

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}), \quad (7.36)$$

ou

$$\det(A) = \det(A_{22}) \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}), \quad (7.37)$$

assumindo que A_{11} e/ou A_{22} são não-singulares.

7.2 APÊNDICE 2: CRITÉRIO DE NYQUIST GENERALIZADO E PROVA DOS TEOREMAS
2.1 A 2.6

7.2.1 CRITÉRIO DE NYQUIST GENERALIZADO

Considere o sistema MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) em malha fechada, com realimentação negativa, mostrado na FIG. 7.5 e assuma que não ocorram cancelamentos internos de polos do semiplano da direita na matriz de transferência $L(s)$, isto é, $L(s)$ não possui modos instáveis escondidos.

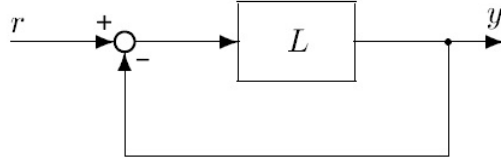


FIG. 7.5: Sistema com realimentação negativa

O Teorema de Nyquist Generalizado permite avaliar a estabilidade do sistema em malha fechada a partir da resposta em frequência $L(j\omega)$. Trata-se de uma generalização para sistemas MIMO do Teorema de Nyquist para sistemas SISO (*Single-Input Single-Output*).

Teorema 7.1 (Teorema de Nyquist Generalizado (SKOGESTAD, 2005)). *Deixe P_{ol} denotar o número de polos instáveis de malha aberta em $L(s)$. O sistema em malha fechada com realimentação negativa é estável, se e somente se, o diagrama de Nyquist, traçado pelo mapeamento da função complexa $\det(I + L(s))$, para $s = j\omega$ e $\omega \in [0, +\infty)$, realizar P_{ol} envoltimentos da origem no sentido anti-horário e não passar pela origem.*

O estudo detalhado da análise de estabilidade no domínio da frequência e a prova do Teorema 7.1 podem ser encontrados em (SKOGESTAD, 2005).

7.2.2 PROVA DO TEOREMA 2.1

Demonstração. A condição dada pela EQ. (2.19) é simplesmente a aplicação do Teorema de Nyquist Generalizado a um sistema com realimentação positiva e com função de transferência estável e igual a $M\Delta$.

(2.19) \Rightarrow (2.20): Esta implicação é trivial, uma vez que se o diagrama passar pela origem, obviamente esta estará sendo envolvida.

(2.19) \Leftarrow (2.20): Basta provar que a negação de (2.19) acarreta a negação de (2.20). Primeiramente nota-se que para $\Delta = 0$, $\det(I - M\Delta) = 1$ para todas as frequências. Assuma que exista uma perturbação Δ' tal que o diagrama de Nyquist de $\det(I - M\Delta')$ envolva a origem. Como o contorno de Nyquist é fechado, então existe uma outra perturbação $\Delta'' = c\Delta'$, com $c \in [0, 1]$ e uma frequência ω' , tal que $\det(I - M\Delta''(j\omega')) = 0$.

(2.21) é equivalente a (2.20) pelas propriedades: $\det(I-A) = \prod_i \lambda_i(I-A)$ e $\lambda_i(I-A) = 1-\lambda_i(A)$ (Ver Seção 7.1.2 do Apêndice). \square

7.2.3 PROVA DO TEOREMA 2.2

Demonstração. (2.22) \Rightarrow (2.20) (\Leftrightarrow ER) é óbvio, pois é decorrência da definição do raio espectral ρ (Ver Seção 7.1.2 do Apêndice) e também se aplica a blocos de incertezas reais.

(2.20) \Rightarrow (2.22) é demonstrada provando-se que \sim (2.22) $\Rightarrow \sim$ (2.20). Assuma que existe um bloco de incerteza Δ' tal que $\rho(M\Delta') = 1$ para alguma frequência. Então $|\lambda_i(M\Delta')| = 1$ para algum autovalor i e sempre existe alguma outra incerteza no conjunto, $\Delta'' = c\Delta'$, onde c é um escalar **complexo** com $|c| = 1$, tal que $\lambda_i(M\Delta'') = +1$ (real e positivo) e, portanto, $\det(I - M\Delta'') = \prod_i \lambda_i(I - M\Delta'') = \prod_i (1 - \lambda_i(M\Delta'')) = 0$. Finalmente, a equivalência entre (2.22) e (2.23) é simplesmente a definição de \max_{Δ} . \square

7.2.4 PROVA DO TEOREMA 2.3

Demonstração. O TEO 2.3 decorre diretamente do TEO 2.2 se considerarmos uma norma de matriz satisfazendo $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, pois, em cada frequência, temos $\rho(L) \leq \|L\|$. Para qualquer norma de matriz, tem-se que $\rho(a) \leq \|A\|$. Como $\lambda_i(A)$ é um autovalor, tem-se que $At_i = \lambda_i t_i$, onde t_i denota um autovetor. Daí, decorre que

$$|\lambda_i| \cdot \|t_i\| = \|\lambda_i t_i\| = \|At_i\| \leq \|A\| \cdot \|t_i\|.$$

Assim, para qualquer norma de matriz, $|\lambda_i(A)| \leq \|A\|$ e, como vale para todos os autovalores, vale também para o raio espectral. \square

7.2.5 PROVA DO TEOREMA 2.4

O valor singular estruturado também pode ser definido como:

$$\mu(M) \triangleq \frac{1}{\min\{k_m | \det(I - k_m \Delta) = 0, \text{ para } \Delta \text{ estruturado, com } \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}}.$$

Se não existe tal Δ estruturado, então $\mu(M) = 0$.

Demonstração. $\mu(M) < 1 \Leftrightarrow k_m > 1$. Se $\mu(M) < 1$ em todas as frequências, o bloco de incerteza Δ requerido para tornar $\det(I - M\Delta) = 0$ é maior que 1, e o sistema é estável. $\mu(M) = 1 \Leftrightarrow k_m = 1$. Se $\mu(M) = 1$ em alguma frequência, então não existe uma perturbação com $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$ tal que $\det(I - M\Delta) = 0$ nessa frequência, e o sistema é instável. \square

7.2.6 PROVA DO TEOREMA 2.5

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $\Delta_i \in \mathbf{\Delta}_i$ tal que $\bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1$ e assuma que $\hat{\Delta} = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$, obviamente $\hat{\Delta} \in \hat{\mathbf{\Delta}}$ e $\bar{\sigma}(\hat{\Delta}) \leq 1$. Então,

$$\det(I - G\hat{\Delta}) = \det \begin{bmatrix} I - G_{11}\Delta_1 & -G_{12}\Delta_2 \\ -G_{21}\Delta_1 & I - G_{22}\Delta_2 \end{bmatrix}. \quad (7.38)$$

Por hipótese $(I - G_{11}\Delta_1)$ é não-singular. Então, utilizando a Fórmula de Schur (Seção 7.1.4) é possível reescrever a EQ. (7.38) como:

$$\begin{aligned}\det(I - G\hat{\Delta}) &= \det(I - G_{11}\Delta_1) \det(I - G_{22}\Delta_2 - G_{21}\Delta_1(I - G_{11}\Delta_1)^{-1}G_{12}\Delta_2) \\ &= \det(I - G_{11}\Delta_1) \det(I - (G_{22} + G_{21}\Delta_1(I - G_{11}\Delta_1)^{-1}G_{12})\Delta_2).\end{aligned}\quad (7.39)$$

Agora, escreve-se a EQ. (7.39) em função de $\mathcal{F}_u(G, \Delta_1)$:

$$\det(I - G\hat{\Delta}) = \det(I - G_{11}\Delta_1) \det(I - \mathcal{F}_u(G, \Delta_1)\Delta_2).\quad (7.40)$$

Também, por hipótese, $\mu_{\Delta_2}(\mathcal{F}_u(G, \Delta_1)) < 1$ com $\bar{\sigma}(\Delta_1) \leq 1$, o que significa dizer que $(I - \mathcal{F}_u(G, \Delta_1)\Delta_2)$ é não-singular. Conclui-se, então, que $(I - G\hat{\Delta})$ é não-singular e pela definição de μ , $\mu_{\hat{\Delta}}(G) < 1$.

(\Leftarrow) Basicamente, o argumento acima é invertido. Novamente, seja $\Delta_i \in \mathbf{\Delta}_i$, tal que $\bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1$ e assumamos que $\hat{\Delta} = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$. Então, $\hat{\Delta} \in \hat{\mathbf{\Delta}}$, com $\bar{\sigma}(\hat{\Delta}) \leq 1$. Por hipótese, $\det(I - G\hat{\Delta}) \neq 0$. De acordo com a propriedade de μ dada pela EQ. (2.31):

$$\mu_{\hat{\Delta}}(G) \geq \max\{\mu_{\Delta_1}(G_{11}), \mu_{\Delta_2}(G_{22})\},\quad (7.41)$$

pode-se afirmar que $\mu_{\Delta_1}(G_{11}) < 1$, o que significa dizer que $(I - G_{11}\Delta_1)$ é não-singular. Voltando à EQ. (7.40), conclui-se que:

$$\det(I - G_{11}\Delta_1) \det(I - \mathcal{F}_u(G, \Delta_1)\Delta_2) = \det(I - G\hat{\Delta}) \neq 0.$$

Obviamente, $(I - \mathcal{F}_u(G, \Delta_1)\Delta_2)$ também é não-singular para $\Delta_i \in \mathbf{\Delta}_i$ com $\bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1$, o que indica que a afirmação é verdadeira. \square

7.2.7 PROVA DO TEOREMA 2.6

Demonstração. Será mostrado que esse teorema é um caso particular do Teorema Principal de Malha. Reescrevendo o teorema para esse caso obtém-se:

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1, \quad \forall \omega \text{ (estabilidade interna)} \\ \|\mathcal{F}_u(N, \Delta)\|_{\infty} < 1, \quad \forall \Delta, \quad \text{com } \|\Delta\|_{\infty} \leq 1. \end{cases}\quad (7.42)$$

Para uma frequência dada, pode-se afirmar que:

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1, \quad \text{e} \\ \bar{\sigma}(\mathcal{F}_u(N, \Delta)) < 1, \quad \text{com } \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1. \end{cases}\quad (7.43)$$

Por hipótese, Δ_p foi definido como um bloco complexo cheio. Então, de acordo com a propriedade discutida na Seção 2.5, tem-se a seguinte igualdade:

$$\mu_{\Delta_p}(\mathcal{F}_u(N, \Delta)) = \bar{\sigma}(\mathcal{F}_u(N, \Delta)).$$

Logo, a EQ. (7.43) pode ser reescrita como:

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1, & \text{e} \\ \mu_{\Delta_p}(\mathcal{F}_u(N, \Delta)) < 1, & \text{com } \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1, \end{cases} \quad (7.44)$$

o que representa um caso particular do Teorema Principal de Malha, com $N = G$, $\Delta = \Delta_1$ e $\Delta_p = \Delta_2$. □

7.3 APÊNDICE 3: MODELO DO MÍSSIL

O problema de controle de um míssil ar-ar, abordado no capítulo 4, baseia-se no sistema não-linear apresentado em (REICHERT, 1992; NICHOLS, 1993), bem como no modelo linearizado e em sua aproximação LFT.

Os valores e as unidades das constantes presentes no modelo do míssil estão relacionados abaixo (REICHERT, 1992; NICHOLS, 1993):

$$K_\alpha = 0,7P_0 \frac{180S}{\pi m v_s}, \quad K_q = 0,7P_0 \frac{180S_d}{\pi I_y}$$

$$K_z = 0,7P_0 \frac{S}{mg}, \quad A_x = 0,7P_0 \frac{180SC_a}{m}$$

$$P_0 = 973,3 \text{ lbs/ft}^2 - \text{pressão estática a } 20.000 \text{ ft}$$

$$S = 0,44 \text{ ft}^2 - \text{superfície de referência}$$

$$m = 13,98 \text{ slugs} - \text{massa}$$

$$v_s = 1036,4 \text{ ft/s} - \text{velocidade do som a } 20.000 \text{ ft}$$

$$d = 0,75 \text{ ft} - \text{diâmetro}$$

$$I_y = 182,5 \text{ slug.ft}^2 - \text{momento de inércia em arfagem}$$

$$C_a = 0,3 - \text{coeficiente de arrasto}$$

$$\zeta = 0,7 - \text{fator de amortecimento do atuador}$$

$$\omega_a = 150 \text{ rad/s} - \text{frequência natural não-amortecida do atuador}$$

$$g = 32,2 \text{ ft/s}^2 - \text{constante de gravidade}$$

$$a_n = 0,000103 \text{ graus}^{-3}, \quad a_m = 0,000215 \text{ graus}^{-3}$$

$$b_n = -0,00945 \text{ graus}^{-2}, \quad b_m = -0,0195 \text{ graus}^{-2}$$

$$c_n = -0,1696 \text{ graus}^{-1}, \quad c_m = 0,051 \text{ graus}^{-1}$$

$$d_n = -0,034 \text{ graus}^{-1}, \quad d_m = -0,206 \text{ graus}^{-1}$$

7.3.1 MODELO LINEAR INVARIANTE NO TEMPO

Com o intuito de proceder uma linearização do sistema em torno de um ponto de equilíbrio dado

$$x_0 = [\alpha_0, q_0, \delta_0, \dot{\delta}_0]^T, \quad (7.45)$$

$$u_0 = \delta_{c0} = \delta_0, \quad (7.46)$$

expandem-se equações lineares da EQ. (4.8),

$$\dot{\alpha} = \mathbf{f}(\alpha, q, \delta, M) = \alpha Z_\alpha + \delta Z_\delta + q, \quad (7.47)$$

$$\dot{q} = \mathbf{g}(\alpha, \delta, M) = \alpha M_\alpha + \delta M_\delta, \quad (7.48)$$

$$\eta = \mathbf{h}(\alpha, \delta, M) = \alpha N_\alpha + \delta N_\delta, \quad (7.49)$$

utilizando-se a fórmula de Taylor de primeira ordem, desprezando-se termos de ordem maior ou igual a 2. Considerando-se a condição de regime permanente $\dot{q}_0 = 0$, δ_0 é obtido da EQ. (7.48) e é dado por

$$\delta_0 = -\frac{1}{d_m} [a_m \alpha_0^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_m \alpha_0^2 + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0]. \quad (7.50)$$

Assim, obtém-se a representação de estados linear (PELLANDA, 2001)

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= \begin{bmatrix} A_{11} & 1 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} x_\delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c \\ y_\delta &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_\delta. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Nesse modelo, as novas variáveis x_δ e y_δ traduzem as variações relativas

$$x_\delta = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_0 \\ q - q_0 \\ \delta - \delta_0 \\ \dot{\delta} - \dot{\delta}_0 \end{bmatrix}, \quad y_\delta = \begin{bmatrix} \eta - \eta_0 \\ q - q_0 \end{bmatrix}, \quad (7.52)$$

e os elementos das matrizes são determinados por α_0 e M unicamente:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_\alpha M \cos \alpha_0 [3a_n \alpha^2 + 2b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3)] - \\ &\quad - K_\alpha M \frac{\pi}{180} \text{sen} \alpha_0 [a_n \alpha^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_n \alpha^2 + c_n (2 - M/3) \alpha_0] + \\ &\quad + K_\alpha M \frac{\pi}{180} \text{sen} \alpha_0 \frac{d_n}{d_m} [a_m \alpha^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_m \alpha^2 + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0], \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$A_{13} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_\alpha M d_n \cos \alpha_0, \quad (7.54)$$

$$A_{21} = \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_q M^2 [3a_m \alpha^2 + 2b_m |\alpha_0| + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0], \quad (7.55)$$

$$A_{23} = \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_q M^2 d_m, \quad (7.56)$$

$$C_{11} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_z M^2 [3a_n \alpha^2 + 2b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3)], \quad (7.57)$$

$$C_{13} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_z M^2 d_n. \quad (7.58)$$

Este modelo LTI é utilizado apenas para síntese H_∞ .

7.3.2 MODELO LFT

Este modelo foi desenvolvido em (PELLANDA, 2001). Seja um sistema LPV S tendo a seguinte realização em espaço de estados:

$$\dot{x} = A(\theta)x + B_1(\theta)w + B_2(\theta)u \quad (7.59)$$

$$z = C_1(\theta)x + D_{11}(\theta)w + D_{12}(\theta)u \quad (7.60)$$

$$y = C_2(\theta)x + D_{21}(\theta)w. \quad (7.61)$$

Assuma que as matrizes do modelo em espaço de estados dependem do parâmetro θ e são funções contínuas e limitadas. Supõe-se, também, que o parâmetro variável ou a variável de interpolação, $\theta \triangleq (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$, bem como sua faixa de variação $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ são limitados. Assim, cada parâmetro θ_l , $l = 1, \dots, r$, varia dentro de um intervalo compacto, onde os valores extremos, $\underline{\theta}_l$ e $\overline{\theta}_l$ são conhecidos:

$$\theta_l(t) \in [\underline{\theta}_l, \overline{\theta}_l], \quad \forall t \geq 0. \quad (7.62)$$

Qualquer hiper-retângulo pode ser transformado em um hipercubo centrado em 0 por translação e *scaling*. Mostra-se que, para qualquer parâmetro da EQ. (7.62), definido como

$$\theta_l' = (S_l)\theta_l + T_l, \quad (7.63)$$

com o *scaling* $S_l = \frac{\overline{\theta}_l - \theta_l'}{2}$ e a translação $T_l = \frac{\overline{\theta}_l + \theta_l'}{2}$, um parâmetro correspondente

$$\theta_l = \frac{\theta_l' - T_l}{S_l} \quad (7.64)$$

varia entre -1 e 1. Uma vez que Δ é diagonal e linear em θ_l , pode-se deduzir das EQ(s) (7.63) e (7.64) que:

$$\Delta' z_\Delta = S\Delta z_\Delta + Tz_\Delta \quad \text{ou} \quad w'_\Delta = Sw_\Delta + Tz_\Delta, \quad (7.65)$$

onde

$$\Delta' = S\Delta + T = \text{diag}(\theta_l' I_{s_l}, \dots, \theta_r' I_{s_r}), S = \text{diag}(S_l I_{s_l}, \dots, S_r I_{s_r}), T = \text{diag}(T_l I_{s_l}, \dots, T_r I_{s_r}). \quad (7.66)$$

As EQ(s) (7.65) e (7.66) são graficamente representadas pelas interconexões mostradas na FIG. 7.6.

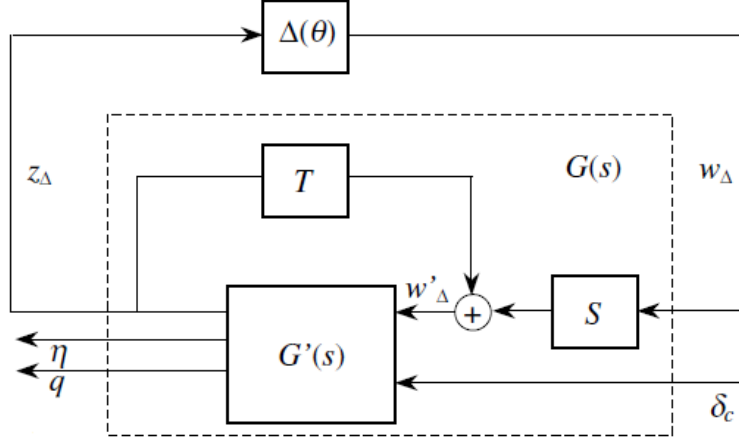


FIG. 7.6: Representação LFT para o míssil

A LFT $\mathcal{F}_u(G'(s), \Delta')$, onde Δ' evolui em qualquer hiper-retângulo, pode, então, ser transformada na LFT $\mathcal{F}_u(G(s), \Delta)$, onde as trajetórias paramétricas encontram-se em um hipercubo normalizado e centrado em 0. De fato, Δ depende de θ que tem entradas em $\theta_l \in [-1, 1]$.

A planta do míssil em (4.8), após ser linearizada em (7.51), é aproximada pela dependência paramétrica LFT superior $\mathcal{F}_u(G(s), \Delta)$ da FIG. 7.6, onde $G(s)$ é a planta LTI envolvendo o corpo rígido do míssil $G'(s)$ e as matrizes:

$$T = \begin{bmatrix} T_\alpha I_6 & 0 \\ 0 & T_M I_6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} S_\alpha I_6 & 0 \\ 0 & S_M I_6 \end{bmatrix}, \quad (7.67)$$

que correspondem a uma translação e a um *scaling*. Então $\Delta(\theta(t))$ é um operador diagonal que especifica como o parâmetro normalizado θ entra na dinâmica da planta:

$$\Delta(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \theta_\alpha(t) I_6 & 0 \\ 0 & \theta_M(t) I_6 \end{bmatrix}. \quad (7.68)$$

As seguintes hipóteses foram tomadas para se obter o modelo LFT da planta:

- ângulo de ataque $|\alpha(t)| = S_\alpha \theta_\alpha(t) + T_\alpha$, onde $|\theta_\alpha(t)| \leq 1$, $\forall t \geq 0$, e as constantes $T_\alpha \geq 0$ e $S_\alpha > 0$ (em graus) são usadas para restringir apropriadamente a faixa do parâmetro como na EQ. (7.63);
- de maneira similar, o número de Mach $M(t) = S_M \theta_M(t) + T_M$, com $|\theta_M(t)| \leq 1$, $\forall t \geq 0$, $T_M \geq 0$ e $S_M > 0$;
- como em (7.64), o parâmetro normalizado é $\theta(t) = \left[\frac{|\alpha(t) - T_\alpha|}{S_\alpha}, \frac{M(t) - T_M}{S_M} \right]^T$;
- $\cos(\alpha)$ é aproximado por $1 - \frac{\alpha^2}{2}$, com um erro máximo de 0,36% na região $|\alpha| \leq 30$ graus;
- $\sin(\alpha)$ é aproximado por α com um erro máximo de 4,51% na região $|\alpha| \leq 30$ graus.

Com essas simplificações, o modelo em espaço de estados de $G'(s)$ é completamente descrito como:

$$G'(s) = \begin{bmatrix} C_\theta \\ C_g \end{bmatrix} (sI - A_g)^{-1} \begin{bmatrix} B_\theta & B_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta g} \\ D_{g\theta} & D_{gg} \end{bmatrix}, \quad (7.69)$$

com o vetor de estados $x_g = [\alpha - \alpha_e, q - q_e, \delta - \delta_e, \dot{\delta} - \dot{\delta}_e]$, onde o subscrito e denota o ponto de equilíbrio, e

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix},$$

$$B_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix},$$

$$C_\theta = \begin{bmatrix} 2b_n \text{sign}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 3a_n - 2K_\pi(3c_n - 7c_m d_n/d_m) & 0 & -d_n K_\pi & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2b_m \text{sign}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 2b_n \text{sign}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 2c_n & 0 & d_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7c_m & 0 & d_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2c_n & 0 & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_n/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8c_m/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c_n/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\theta g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{g\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{gg} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $K_\pi = \frac{\pi^2}{2(180)^2}$, $D_{28} = \frac{K_\pi}{3}(3c_n + 16c_m d_n/d_m)$ e $D_{34} = K_\pi(-5a_n + 2a_m d_n/d_m)$.

$G(s)$ é prontamente determinado pelas conexões e dados fornecidos. O modelo foi validado em (PELLANDA, 2001).