

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

CAP RICARDO DA SILVEIRA LOPES

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS BASEADA
EM UM NOVO LIMITANTE PARA O VALOR SINGULAR
ESTRUTURADO**

**Rio de Janeiro
2014**

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

CAP RICARDO DA SILVEIRA LOPES

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS BASEADA EM UM
NOVO LIMITANTE PARA O VALOR SINGULAR ESTRUTURADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE

Rio de Janeiro
2014

c2014

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

Z34r Lopes, Ricardo da Silveira
Síntese de Controladores Robustos Baseada em um Novo Limitante para o Valor Singular Estruturado/ Ricardo da Silveira Lopes, orientado por Alberto Mota Simões.– Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2014.
76 p.: il., tab.
Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro, 2014.
1. Engenharia Elétrica – teses e dissertações. 2. Controle Robusto. 3. Valor Singular Estruturado. I. Simões, Alberto Mota. II. Título. III. Instituto Militar de Engenharia.

CDD 629.892

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

CAP RICARDO DA SILVEIRA LOPES

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS BASEADA EM UM
NOVO LIMITANTE PARA O VALOR SINGULAR ESTRUTURADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE

Aprovada em 24 de janeiro de 2014 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE do IME - Presidente

Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE do IME

Prof. Geraldo Magela Pinheiro Gomes - Dr. ENSAE do IME

Prof. Ramon Romankevicius Costa - D.Sc. COPPE da UFRJ

Rio de Janeiro
2014

À Roberta, minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Alberto Mota Simões, sem o qual este trabalho sequer poderia ter começado.

Ao Prof. Geraldo Magela Pinheiro Gomes, pelas suas aulas didáticas e interessantes, responsáveis por tornar agradáveis as tardes das quartas-feiras.

A todos os integrantes do IME, que, direta ou indiretamente, contribuíram para este trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	8
LISTA DE TABELAS	10
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	11
1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Contexto e Motivação.....	14
1.2 Objetivo do Trabalho	15
1.3 Organização do Trabalho	16
2 TEORIA DE CONTROLE ROBUSTO	17
2.1 Modelagem de Sistemas Incertos	17
2.2 Análise de Robustez	20
2.3 Um Limitante Superior de μ	26
2.3.1 Uma Fórmula Equivalente para μ	27
3 SÍNTESE μ DE CONTROLADORES	34
3.1 Síntese por Iteração $D - G - K$	34
3.2 Síntese sob Restrição Integrais Quadráticas	35
3.3 Síntese Não-Diferenciável com Multiplicadores Dinâmicos	37
3.4 O Novo Método	38
4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS	49
4.1 Planta Levemente Amortecida (APKARIAN, 2011)	50
4.2 Massa-Mola-Amortecedor (BARROS, 2005)	52
4.3 Míssil assimétrico (WISE, 1990)	55
4.4 Integrador Duplo (YOUNG, 1994)	60
4.5 Massa-Mola (ROTEA, 1994)	62
4.6 Míssil ar-ar (PELLANDA, 2001)	64
4.6.1 Modelo não linear	64
4.6.2 Modelo LFT	66
4.6.3 Especificações de desempenho e estrutura de síntese	69

4.7	Análise numérica da Síntese DjG	70
5	CONCLUSÃO	73
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Representação de um modelo incerto para síntese de controlador	19
FIG.2.2	Estrutura $N\Delta$ para análise de desempenho robusto	20
FIG.2.3	Estrutura $M\Delta$ para análise de estabilidade robusta	21
FIG.2.4	DR como um caso especial de ER estruturada. $F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$	25
FIG.3.1	Configuração inicial para a Síntese DjG	40
FIG.3.2	Configuração parametrizável para a Síntese DjG	42
FIG.3.3	Configuração de síntese com controlador estruturado	42
FIG.3.4	Configuração LFT com blocos sintonizáveis fora da planta de síntese . . .	43
FIG.3.5	Configuração LFT para a Síntese DjG	43
FIG.3.6	Gráfico de Bode teórico do bloco j	44
FIG.3.7	Diagrama de polos e zeros da função $J(s)$	45
FIG.3.8	Diagrama de Bode da função $J(s)$	46
FIG.3.9	Diagrama de Bode do filtro passa-altas	47
FIG.3.10	Diagrama de Bode de $\tilde{J}(s)$	48
FIG.4.1	Modelo LFT da planta levemente amortecida	51
FIG.4.2	Sistema massa-mola-amortecedor	52
FIG.4.3	Interconexão para síntese do controlador do sistema massa-mola- amortecedor	53
FIG.4.4	Representações equivalentes para o atraso τ	53
FIG.4.5	Representação incerta para o atraso τ	53
FIG.4.6	Diagrama de Bode para dinâmica não-modelada do atraso	54
FIG.4.7	Diagrama físico do míssil (WISE, 1988)	56
FIG.4.8	Estrutura de controle longitudinal em malha fechada (WISE, 1990)	57
FIG.4.9	Estrutura de controle com canal de desempenho para o míssil assi- métrico	59
FIG.4.10	Estrutura de controle com canal de desempenho para o sistema integrador duplo	61
FIG.4.11	Sistema massa-mola	62
FIG.4.12	Estrutura de síntese de controle para o sistema massa-mola	63
FIG.4.13	Diagrama físico do míssil ar-ar (PELLANDA, 2001)	64

FIG.4.14	Representação LFT para o míssil ar-ar	67
FIG.4.15	Estrutura de síntese de controle para o míssil ar-ar	69
FIG.4.16	Comportamento de μ em função da ordem (D, G, K)	71
FIG.4.17	Tempo de processamento em função da ordem (D, G, K)	72

LISTA DE TABELAS

TAB.1.1	Técnicas de síntese robusta e suas limitações	15
TAB.4.1	Análise da estabilidade robusta da planta levemente amortecida em malha fechada	51
TAB.4.2	Análise do desempenho robusto do sistema massa-mola-amortecedor em malha fechada	55
TAB.4.3	Análise da estabilidade robusta do sistema míssil assimétrico em malha fechada	58
TAB.4.4	Análise do desempenho robusto do sistema míssil assimétrico em malha fechada	59
TAB.4.5	Análise do desempenho robusto do sistema integrador duplo em malha fechada	61
TAB.4.6	Análise do desempenho robusto do sistema massa-mola em malha fechada	63
TAB.4.7	Análise do desempenho robusto do sistema míssil ar-ar em malha fechada	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

DN	-	Desempenho Nominal
DR	-	Desempenho Robusto
EN	-	Estabilidade Nominal
ER	-	Estabilidade Robusta
FDI	-	<i>Frequency Domain Inequality</i>
IQC	-	<i>Integral Quadratic Constraint</i>
LFT	-	<i>Linear Fractional Transformations</i>
LQG	-	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LTI	-	<i>Linear Time-Invariant</i>
NP	-	<i>Non Polynomial</i>
SSV	-	<i>Structured Singular Value</i>

SÍMBOLOS

\triangleq	-	igual, por definição
\forall	-	para todo
\Rightarrow	-	se, então
\Leftrightarrow	-	se, e somente se
\square	-	fim de demonstração
j	-	índice, ou $j = \sqrt{-1}$
\mathbb{R}	-	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^+	-	conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{R}^{n \times m}$	-	matriz real com n linhas e m colunas
\mathbb{R}^n	-	vetor coluna real com n elementos
\mathbb{C}	-	conjunto dos números complexos
$\mathbb{C}^{n \times m}$	-	dimensão de matriz complexa com n linhas e m colunas
\mathbb{C}^n	-	vetor coluna complexo com n elementos
$ x , z $	-	valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$, módulo de $z \in \mathbb{C}$
M^T	-	transposta da matriz M
M^H	-	transposta conjugada da matriz M

M^{-1}	-	inversa da matriz M
I_p	-	matriz identidade de ordem p
\det	-	determinante da matriz
$\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$	-	matriz bloco diagonal tendo M_i como i -ésimo bloco
λ_i	-	i -ésimo autovalor
ρ_R	-	maior valor absoluto dos autovalores reais
$\min S, \max S$	-	menor, maior elemento de um conjunto S não vazio, desde que tal elemento exista
$\min_{x \in E} f(x), \max_{x \in E} f(x)$	-	valor mínimo, máximo de f sobre o conjunto E , desde que esse valor exista. Pode ser global ou local, dependendo do contexto
$\inf_{x \in E} f(x), \sup_{x \in E} f(x)$	-	limite mínimo, máximo de f sobre o conjunto E
$X \prec 0$	-	matriz X é negativa definida
$X \succeq 0$	-	matriz X é positiva semidefinida
norma H_∞	-	máximo valor singular no domínio da frequência
$\ T(s)\ _\infty$	-	norma H_∞ da matriz de transferência $T(s)$
μ	-	valor singular estruturado
ω	-	frequência em rad/s
$\bar{\sigma}$	-	maior valor singular
$\bar{\lambda}$	-	maior autovalor
$\ x\ _2$ ou $\ x\ $	-	Norma euclidiana (hermitiana) do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{C}^n$)
$\partial \mathbf{B}$	-	círculo unitário
$\mathbf{B}\Delta$	-	Conjunto das matrizes de transferência $\Delta(s)$ com norma H_∞ limitada em 1
m_r, m_c e m_C	-	número de blocos escalares reais repetidos, escalares complexos repetidos e complexos cheios respectivamente
m	-	número total de blocos ($m = m_r + m_c + m_C$)
\mathcal{F}_u	-	LFT superior
\mathcal{F}_l	-	LFT inferior

RESUMO

Nesta dissertação é proposto um novo método de síntese de controladores robustos, baseado na minimização do Valor Singular Estruturado (μ). Esse método pertence a uma categoria de síntese de controladores denominada síntese μ .

In these work, a new method of robust controler synthesis is proposed, based on the minimization of the structured singular value (μ). These method belongs to a cathegory of controler synthesis called μ synthesis.

Embora o método seja novo, já existem outros com a mesma finalidade, o que aumenta o interesse neste assunto na medida em que se torna possível realizar comparações. Assim, é possível verificar em que situações esse novo método traz vantagens.

Although the method is new, there are already others with the same finality, which increases the interest about this subject because it becomes possible to make comparissons. Thus, it is possible to verify when this method brings advantages.

Dentre esses vários métodos de síntese de controladores já existentes, três serão abordados de maneira sucinta: síntese por iteração $D - G - K$ (YOUNG,1996), síntese sob restrição integrais quadráticas (APKARIAN, 2006a) e síntese não-diferenciável com multiplicadores dinâmicos (APKARIAN, 2011). Entretanto, somente o primeiro e o último serão utilizados em problemas numéricos, para fins de comparação, uma vez que não dispomos dos algoritmos computacionais necessários à aplicação numérica da técnica em (APKARIAN, 2006a).

Among these several control synthesis methods, three will be covered succinctly: $D - G - K$ iteration (YOUNG,1996), integral quadratic constraint synthesis (APKARIAN, 2006a) and nonsmooth synthesis with dinamic multipliers (APKARIAN, 2011). However, only the first and the last methods will be used in numerical problems, for comparison, since we do not have the computational algorithms required for numerical application of technics in (APKARIAN, 2006a).

Por razões que estão descritas neste trabalho, todos esses métodos, inclusive o novo, não minimizam μ de forma direta. Ao invés disso, eles minimizam um limite superior do valor singular estruturado, o que causa uma minimização indireta no valor de μ .

For reasons that are described in this work, all these methods, include the new one, do not minimize μ in a direct way. Rather, they minimize an upper limit of the structured singular value, what causes an undirect minimization of μ ' value.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata sobre sistemas de controle a tempo contínuo, sendo direcionado para síntese de controladores robustos. É apresentado um método que se utiliza de ferramentas computacionais para ajustar parâmetros do controlador a fim de otimizar uma determinada condição de robustez.

Esta introdução compreende inicialmente uma breve descrição do problema de controle robusto a ser tratado e, em seguida, uma descrição sucinta dos capítulos da dissertação.

1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

A teoria de controle robusto surgiu na década de 80 e foi uma consequência natural e necessária para resolver problemas que surgiram de exemplos realísticos onde o método de espaço de estado, inventado nas décadas de 60 e 70, por vezes se mostrava muito suscetível a pequenas e inevitáveis diferenças entre o modelo teórico e o sistema físico. Tal fato ocorria na utilização de técnicas de otimização conhecidas como Controle LQG (do inglês *Linear Quadratic Gaussian*) quando o modelo da planta era impreciso. Um exemplo desse problema foi demonstrado em (DOYLE, 1978). Essa carência de robustez tornava o modelo teórico não confiável e portanto, conclusões a cerca da estabilidade e do desempenho do sistema físico não podiam ser previstas de forma segura.

Face a tais problemas, a teoria de controle robusto desenvolveu métodos onde esses modelos imprecisos pudessem representar o sistema físico de maneira satisfatória. Surgiu o conceito de modelo nominal ou sem incertezas e o conceito de modelo incerto. Desenvolveram-se técnicas de análise, onde o principal objetivo era verificar o nível de suscetibilidade do sistema frente a incertezas. Assim, um sistema robusto era aquele que conservava suas características de estabilidade e desempenho mesmo na presença dessas incertezas. Isso possibilitou, portanto, uma modelagem muito mais confiável do sistema de controle. Paralelamente à análise, surgiram técnicas de síntese, cujo objetivo está voltado ao projeto de controladores que minimizem essa suscetibilidade do sistema a incertezas, tornando-o robusto.

A robustez do sistema pode ser caracterizada pelo valor singular estruturado (ou SSV, do inglês *Structured Singular Value*), sendo o sistema tão mais robusto quanto menor for

esse valor. Entretanto a determinação do SSV é um problema de difícil solução, sendo classificado dentro da teoria da complexidade computacional como um problema NP-difícil (TOKER, 1995). Felizmente foram deduzidos alguns limites superiores para o SSV que são mais simples de se resolver. Além disso, a experiência tem mostrado que em vários problemas práticos tais limites estão próximos do SSV. Por esse motivo, técnicas de síntese robustas baseiam-se na minimização desses limites superior.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Atualmente, já existem algumas técnicas de síntese de controladores que objetivam minimizar o SSV. A eficiência de cada um delas pode ser melhor analisada na aplicação em diversos tipos de exemplos, permitindo uma comparação dos resultados. Essas técnicas serão apresentadas com um pouco mais de detalhe no capítulo 3. Por ora, observaremos somente algumas limitações, conforme a TAB. 1.1.

TAB. 1.1: Técnicas de síntese robusta e suas limitações

Nome da Técnica	Limitações
Iteração $D - G - K$	Baseada em uma minimização sem garantia de convergência local ou global.
	Utiliza somente multiplicadores de fase mínima, tornando a técnica mais conservadora.
	Resulta em um controlador de ordem plena, sem estrutura.
Síntese Não-Diferenciável (APKARIAN, 2011)	Utilizada somente para incertezas paramétricas.
	Algoritmo computacionalmente custoso devido à necessidade de realizar múltiplas bisseções.
Síntese IQC (APKARIAN, 2006a)	Diferente das técnicas acima, é baseada em uma minimização do maior auto valor e não de uma norma H_∞ , que possui algoritmos com comprovada eficiência.

Percebe-se que ainda não existe uma técnica geral, baseada no SSV, que garanta uma solução ótima para o problema de robustez. Isso dá margem à procura de novos métodos, que podem ter ao mesmo tempo vantagens e desvantagens em relação aos existentes. Como existe uma grande diversidade de problemas na área de controle, é possível que um determinado método seja eficiente para um problema e não para outro. Nesse sentido, é desejável que se possua um maior número de alternativas, o que torna interessante a

proposição de novas técnicas.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é apresentar, aplicar, comparar e analisar um método de síntese de controlador robusto baseado na minimização de um limitante superior do valor singular estruturado, que foi derivado do trabalho de (FAN, 1991). Esse novo método é apropriado para modelos onde existem ao mesmo tempo dois tipos de incertezas: incertezas paramétricas, ou seja, nos elementos das matrizes A , B , C , D quando na representação em espaço de estado, e incertezas complexas, que são variações no domínio da frequência entre o modelo e o sistema real. Além disso, esse método utiliza uma técnica de síntese não-diferenciável (APKARIAN, 2006b), que possibilita o projeto de controladores estruturados através de uma minimização de uma norma H_∞ com certificado de convergência local.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação é composta por quatro capítulos e uma conclusão, além desta introdução.

- O capítulo 2 consiste em um breve resumo da teoria de controle robusto, onde serão abordados: conceito e representação de incertezas, condições de estabilidade e desempenho robustos, definição do valor singular estruturado e sua aplicação na análise de robustez em estabilidade e desempenho. Na última seção desse capítulo será apresentado o limite superior do SSV desenvolvido em (FAN, 1991).
- O capítulo 3 descreve sucintamente três métodos de síntese de controladores baseados na minimização do SSV: síntese por iteração $D - G - K$ (YOUNG, 1996), síntese sob restrição integrais quadráticas (APKARIAN, 2006a) e síntese não-diferenciável com multiplicadores dinâmicos (APKARIAN, 2011). No final desse capítulo, será apresentado com um nível maior de detalhe o novo método.
- O capítulo 4 apresenta resultados de aplicações numéricas da teoria. Nele, encontram-se seis exemplos onde são aplicadas algumas das técnicas apresentadas no capítulo 3. Ao final de cada exemplo, consta uma tabela comparativa de resultados.

2 TEORIA DE CONTROLE ROBUSTO

Na modelagem de sistemas dinâmicos, inevitavelmente surgem discrepâncias entre o modelo matemático e o sistema físico real. Tais diferenças, denominadas incertezas (o termo perturbações também é utilizado com o mesmo sentido), ocorrem porque a representação matemática não consegue refletir a realidade de maneira exata. Para tanto, precisaríamos de modelos extremamente complexos, impossíveis de serem tratados computacionalmente. Além disso, existem casos onde o valor de determinados parâmetros não são conhecidos de maneira precisa, além de poderem variar com o tempo. A teoria de Controle Robusto possibilita realizar o controle de sistemas com essas características, ou seja, sistemas com incertezas no modelo.

Para isso, foram criadas representações para modelos incertos, e desenvolvidas técnicas para analisar ou controlar sistemas baseados nesses modelos. Isso possibilitou a síntese de controladores estabilizantes com garantia de desempenho mesmo na presença de incertezas, ou seja, controladores que tornem o sistema robusto em estabilidade e desempenho. Tal assunto é tratado neste capítulo, onde são apresentados os resultados fundamentais obtidos em estudos anteriores. Uma abordagem mais completa e detalhada encontra-se em (SKOGESTAD, 2005) e (ZHOU, 1996).

2.1 MODELAGEM DE SISTEMAS INCERTOS

Existem basicamente duas formas de representação de incertezas: reais e complexas. As primeiras são utilizadas em sistemas cujos valores de certos parâmetros não são conhecidos precisamente. São chamadas reais pois, no processo de representação matemática dessas incertezas, surgem parâmetros pertencentes ao conjunto dos números reais.

Já as incertezas complexas são aquelas utilizadas para representar dinâmicas que não são modeladas ou pelo fato de não se conhecer o mecanismo físico, geralmente, em altas frequências, ou pelo fato de, embora se conheça tal mecanismo, este é negligenciado, em vista de uma maior simplicidade no modelo.

Qualquer planta incerta poderá ser dividida em dois blocos dinâmicos: um sem incertezas, conhecido como planta nominal, e outro responsável por agrupar todas as incertezas presentes. Esse último bloco, denominado $\Delta(s)$, reflete o quão estruturadas são as incer-

tezas presentes no modelo.

A equação 2.1 caracteriza a estrutura geral de $\Delta(s)$, representada pela letra grega em negrito Δ

$$\Delta = \left\{ \text{bloco diagonal}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) \right. \\ \left. : \delta_i^r \in \mathbb{R}, \delta_i^c \in \mathbb{C}, \Delta_i^C \in \mathbb{C}^{k_{m_r+m_c+i} \times k_{m_r+m_c+i}} \right\}, \quad (2.1)$$

onde para um determinado inteiro k , I_k denota uma matriz identidade $k \times k$. Os blocos com escalares reais repetidos $\delta_i^r I_{k_i}$ correspondem às incertezas paramétricas, enquanto que os blocos com escalares complexos repetidos $\delta_i^c I_{k_{m_r+i}}$ e os complexos cheios Δ_i^C correspondem às dinâmicas não modeladas ou negligenciadas. De acordo com os índices, existem m_r , m_c e m_C blocos escalares reais repetidos, escalares complexos repetidos e complexos cheios respectivamente, totalizando $m = m_r + m_c + m_C$ blocos.

Assim, em modelos normalizados, o conjunto de incertezas possíveis (também chamado de conjunto de Δs permitidos ou admissíveis) será representado por

$$\Delta \in \mathbf{B}\Delta := \{\Delta \in \Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}.$$

A incerteza real ou paramétrica corresponde a um intervalo de valores reais, onde está confinado o valor exato de um determinado parâmetro físico. Essa incerteza possui a representação

$$\alpha_p = \bar{\alpha} (1 + r_\alpha \delta),$$

onde $\bar{\alpha}$ é o valor paramétrico médio, $r_\alpha = (\alpha_{max} - \alpha_{min}) / (\alpha_{max} + \alpha_{min})$ é a incerteza relativa no parâmetro e δ é um escalar real que, em modelos normalizados, satisfaça $|\delta| \leq 1$.

As incertezas referentes a dinâmicas negligenciadas e não-modeladas são representadas, em modelos normalizados, por perturbações cuja norma H_∞ , ou seja, o valor máximo do maior valor singular no espectro da frequência, é limitada em 1.

Representações de incertezas sem estrutura alguma equivalem a um Δ formado por uma matriz complexa cheia. Portanto, quanto mais o bloco de incertezas Δ se aproximar de uma matriz diagonal maior será a quantidade de estrutura na representação das incertezas. Assim, a representação dessas incertezas varia principalmente em termos da quantidade de estrutura que ela contém. Representações estruturadas refletem com maior

precisão os mecanismos físicos que causam diferenças entre o modelo e a planta. Esse tipo de representação diminui consideravelmente o tamanho do conjunto de incertezas, entretanto, adiciona bastante complexidade no processo de análise e síntese. Já a representação não-estruturada, pelo contrário, facilita enormemente a análise e síntese, porém, introduz uma grande quantidade de incertezas, muitas delas impossíveis de ocorrer na planta real.

Quando ocorrem ao mesmo tempo incertezas reais e complexas, dizemos tratar-se de incertezas estruturadas mistas. A análise e a síntese de sistemas com esse tipo de incertezas permanecem fundamentalmente mais difíceis que em sistemas compostos unicamente por incertezas complexas. De acordo com (APKARIAN, 2011), sintetizar controladores robustos em face de incertezas mistas continua a ser um problema muito desafiador no cerne da teoria de Controle Robusto Moderno. Neste trabalho, será dada ênfase às incertezas estruturadas mistas.

Dada uma planta incerta controlada, a ideia é representá-la conforme a FIG. 2.1. Nessa configuração, as incertezas são coletadas e agrupadas no bloco Δ . O bloco P , denominado planta nominal de síntese, contém os canais de incerteza (u_Δ, y_Δ) , os canais de desempenho (w, z) e os canais de controle (u, v) . Assim, o bloco P pode ser particionado de acordo com esses canais, conforme (2.2). Esse bloco frequentemente abrange matrizes dinâmicas de ponderações e normalizações, de maneira que, se a norma H_∞ da transferência do canal de desempenho for menor que 1, então o sistema atende às especificações de desempenho.

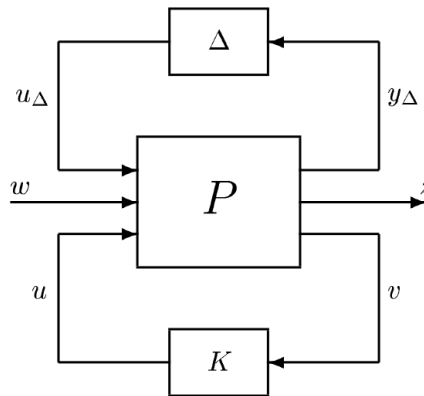


FIG. 2.1: Representação de um modelo incerto para síntese de controlador

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

O bloco K , representando o controlador, aparece explicitamente na FIG. 2.1. Por essa razão, a configuração apresentada é adequada para a síntese de controladores. A ideia é definir uma estrutura para K e ajustar seus parâmetros até que se consiga um controlador fixo que traga robustez em estabilidade e desempenho para qualquer Δ admissível. Obtido o controlador, passa-se para o campo da análise, de maneira que se possa verificar com maior precisão a robustez do sistema em malha fechada. Para isso, realiza-se uma Transformação Fracionária Linear Inferior (LFT, do inglês *Linear Fractional Transformation*) entre $P(s)$ e $K(s)$, resultando na FIG. 2.2

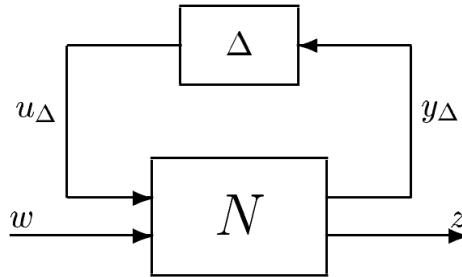


FIG. 2.2: Estrutura $N\Delta$ para análise de desempenho robusto

onde

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = \mathcal{F}_l(P, K) \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \end{bmatrix} K(I - P_{33}K)^{-1} \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A função de transferência em malha fechada de w para z , representada por $F(s)$, pode ser obtida através de uma LFT superior entre $N(s)$ e $\Delta(s)$, conforme (2.4).

$$F = \mathcal{F}_u(N, \Delta) \triangleq N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}. \quad (2.4)$$

2.2 ANÁLISE DE ROBUSTEZ

Tomando-se por base (2.4) e observando a FIG. 2.2, podemos definir os seguintes conceitos de estabilidade e desempenho:

$$\text{Estabilidade Nominal (EN)} \Leftrightarrow N \text{ é internamente estável} \quad (2.5)$$

$$\text{Desempenho Nominal (DN)} \Leftrightarrow \|N_{22}\|_\infty < 1; \text{ e EN} \quad (2.6)$$

$$\text{Estabilidade Robusta (ER)} \Leftrightarrow F \text{ é estável, } \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta; \text{ e EN} \quad (2.7)$$

$$\text{Desempenho Robusto (DR)} \Leftrightarrow \|F\|_\infty < 1, \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta; \text{ e EN} \quad (2.8)$$

Quando estamos interessados somente na estabilidade robusta, utilizamos a estrutura $M\Delta$, conforme a FIG. 2.3, onde $M = N_{11}$ é a função de transferência da saída para a entrada das incertezas. Nesse caso, uma forma teórica de se verificar a condição de estabilidade robusta, é dada pelo teorema 2.1

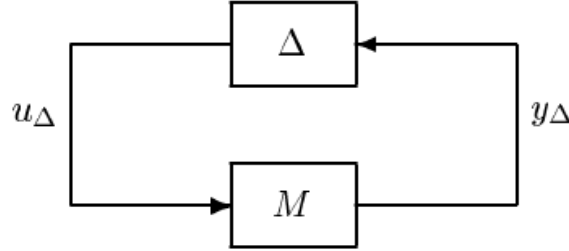


FIG. 2.3: Estrutura $M\Delta$ para análise de estabilidade robusta

Teorema 2.1 (Condição de Estabilidade do Determinante (SKOGESTAD, 2005)). *Assuma que o sistema nominal $M(s)$ e o bloco de incertezas $\Delta(s)$ da FIG. 2.3 são estáveis. Considere o conjunto convexo de incertezas Δ de tal forma que, se Δ' é admissível, então $c\Delta'$ também o é, onde c é qualquer **real** escalar, tal que $|c| \leq 1$. Então, o sistema $M\Delta$ da FIG. 2.3 é estável para todo Δ admissível (estabilidade robusta) se e somente se:*

O Diagrama de Nyquist de $\det(I - M\Delta(j\omega))$ não envolve a origem, $\forall \Delta, \forall \omega$

$$\Leftrightarrow \det(I - M\Delta(j\omega)) \neq 0, \forall \omega, \forall \Delta \quad (2.9)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i(M\Delta) \neq 1, \forall i, \forall \omega, \forall \Delta.$$

A hipótese de Δ ser estável poderia ser dispensada, entretanto isso traria dificuldades para estabelecer e provar as condições de estabilidade e desempenho. Além disso, é sempre possível representar qualquer planta incerta utilizando perturbações estáveis. Assim, assumir Δ estável não é realmente uma restrição.

O principal problema na aplicação do teorema 2.1 é que teríamos de testar a condição de estabilidade robusta para uma quantidade infinita de Δ s e isso é difícil de se verificar numericamente. Por outro lado, esse mesmo teorema, que se aplica a incertezas mistas, forma a base da definição geral do valor singular estruturado, a ser estudado a seguir.

O valor singular estruturado, representado pela letra grega μ , é uma função que possibilita a obtenção de condições necessárias e suficientes para a robustez em sistemas com incertezas estruturadas. Mas além disso, ele também caracteriza o quão robusto é um determinado sistema. Antes de passarmos para a definição formal de μ , considere a estabilidade da estrutura $M\Delta$ na FIG. 2.3 onde Δ pertence ao conjunto de perturbações bloco-diagonal limitadas em norma $\mathbf{B}\Delta$. Da condição de estabilidade do determinante (2.9), que se aplica a ambas perturbações complexas e reais, tem-se

$$\text{Estabilidade Robusta} \Leftrightarrow \det(I - M\Delta(j\omega)) \neq 0, \forall \omega, \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta. \quad (2.10)$$

Note que (2.10) não nos mostra o quão próximo o sistema está da instabilidade, sendo simplesmente uma condição que verifica se há ou não estabilidade robusta. Dessa forma, surge naturalmente a ideia de se quantificar essa robustez, o que significa verificar qual a margem de estabilidade robusta, ou seja quanto se pode aumentar a norma de Δ até que o sistema fique instável. Esse aumento da norma é equivalente a aumentar a incerteza no modelo. Assim, a pior combinação de incertezas equivale ao Δ de menor norma possível que leva à instabilidade. Intuitivamente, podemos chamar isso de o tamanho da menor incerteza que leva à instabilidade. Obviamente, quanto maior for esse tamanho, maior a estabilidade robusta, pois seria necessária uma incerteza também maior para desestabilizar o sistema. Ora, isso é exatamente uma forma de se verificar o quão próximo o sistema está da instabilidade. O valor singular estruturado está intimamente ligado à esta quantificação de estabilidade robusta, sendo definido a seguir.

Definição 2.1 (Valor Singular Estruturado μ (FAN, 1991)). *Seja M uma matriz complexa e seja Δ uma matriz complexa pertencente ao conjunto Δ . A função real não-negativa $\mu(M)$, chamada de valor singular estruturado é definida por:*

$$\mu(M) \triangleq \left(\min_{\Delta \in \Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0 \} \right)^{-1},$$

onde $\bar{\sigma}(\Delta)$ denota o maior valor singular de Δ . Se não existe $\Delta \in \Delta$ tal que $\det(I - M\Delta) = 0$, então $\mu(M) \triangleq 0$.

É importante notar que o valor de $\mu(M)$ também depende da estrutura de Δ , o que pode ser explicitado pela notação $\mu_{\Delta}(M)$. Um valor de $\mu = 1$ significa que existe uma perturbação com $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$ que é grande o suficiente para tornar $I - M\Delta$ singular. Assim,

um valor de μ elevado é “ruim”, pois significa que existe uma pequena perturbação que torna $I - M\Delta$ singular.

Duas propriedades de μ que valem tanto para incertezas reais como complexas são (SKOGESTAD, 2005):

- $\mu(\alpha M) = |\alpha| \mu(M)$, para qualquer escalar α real.
- Seja $\Delta = \text{diag} \{\Delta_1, \Delta_2\}$ um conjunto bloco-diagonal de incertezas. Considere a partição da matriz M de acordo com as dimensões de Δ_1 e Δ_2 . Então:

$$\mu_{\Delta}(M) \geq \max \{\mu_{\Delta_1}(M_{11}), \mu_{\Delta_2}(M_{22})\}. \quad (2.11)$$

Em outras palavras, (2.11) mostra que a característica de robustez em relação a duas incertezas tomadas juntas é, no mínimo, tão ruim quanto a pior incerteza considerada sozinha, ou seja, não é possível melhorar a estabilidade robusta incluindo-se outra incerteza.

Utilizando o valor singular estruturado, o teorema a seguir apresenta uma condição equivalente para a estabilidade robusta.

Teorema 2.2 (Estabilidade Robusta para perturbações bloco diagonais reais ou complexas (SKOGESTAD, 2005)). *Assuma que o sistema nominal M e o bloco de perturbações Δ sejam estáveis. Então o sistema $M\Delta$ da FIG. 2.3 é estável para toda incerteza permitida ($\Delta \in \mathbf{B}\Delta$) se, e somente se*

$$\mu(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega. \quad (2.12)$$

Sendo (2.12) uma condição necessária e suficiente para a estabilidade robusta, podemos reescrevê-la como

$$\text{Estabilidade Robusta} \quad \Leftrightarrow \quad \mu(M(j\omega)) \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1, \forall \omega,$$

que pode ser interpretada como uma generalização do Teorema do Ganho Pequeno (ZHOU, 1996) que também leva em consideração a estrutura de Δ .

Até este ponto, o valor singular estruturado só foi utilizado para se verificar estabilidade robusta. Entretanto, μ também pode ser utilizado para se verificar o desempenho robusto, que pode ser visualizado como um caso especial de estabilidade robusta, conforme mostra a FIG. 2.4. O passo B apresenta o surgimento de um bloco de perturbações

fictícias Δ_P , que representa as especificações de desempenho e que, em modelos normalizados, possui norma H_∞ igual a 1. Como esse bloco não tem estrutura, a estabilidade robusta do sistema $F\Delta_P$ equivale a

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}(F(j\omega)) < 1, \quad (2.13)$$

o que, de acordo com (2.8), equivale ao desempenho robusto do sistema F desde que a desigualdade em (2.13) se mantenha para $\forall \Delta$ permitido. Isso pode ser visualizado no passo C da FIG. 2.4. Finalmente, no passo D, aplica-se o valor singular estruturado à nova estrutura formada. Dessa forma, $\mu(N)$, apresentará condições necessárias e suficientes para o teste da robustez, de acordo com o teorema 2.3.

Teorema 2.3 (Desempenho Robusto (SKOGESTAD, 2005)). *Rearranje o sistema incerto na estrutura $N\Delta$ da FIG. 2.4. Assuma estabilidade nominal de tal forma que N seja (internamente) estável. Então*

$$\text{Desempenho Robusto} \Leftrightarrow \|F\|_\infty = \|\mathcal{F}_u(N, \Delta)\|_\infty < 1, \quad \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta \quad (2.14)$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\hat{\Delta}}(N(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega, \quad (2.15)$$

onde μ está relacionado à estrutura

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix},$$

e Δ_P representa uma estrutura formada por um bloco de incertezas complexo cheio cuja dimensão é igual à de F^T .

Algumas considerações a respeito do teorema 2.3:

1. A condição (2.15) permite que seja testado se $\|F\|_\infty < 1$ para todos os possíveis Δ 's sem ter que se testar cada Δ individualmente. A razão disso é graças ao fato de μ ser definido de tal forma que ele representa o pior caso de combinação de incertezas.
2. De (2.11) tem-se que

$$\underbrace{\mu_{\hat{\Delta}}(N)}_{DR} \geq \max\{\underbrace{\mu_{\Delta}(N_{11})}_{ER}, \underbrace{\mu_{\Delta_P}(N_{22})}_{DN}\}, \quad (2.16)$$

onde $\mu_{\Delta_P}(N_{22}) = \bar{\sigma}(N_{22})$. De acordo com (2.16), estabilidade robusta ($\mu_{\Delta}(N_{11}) < 1$) e desempenho nominal ($\bar{\sigma}(N_{22}) < 1$) são automaticamente satisfeitos quando o

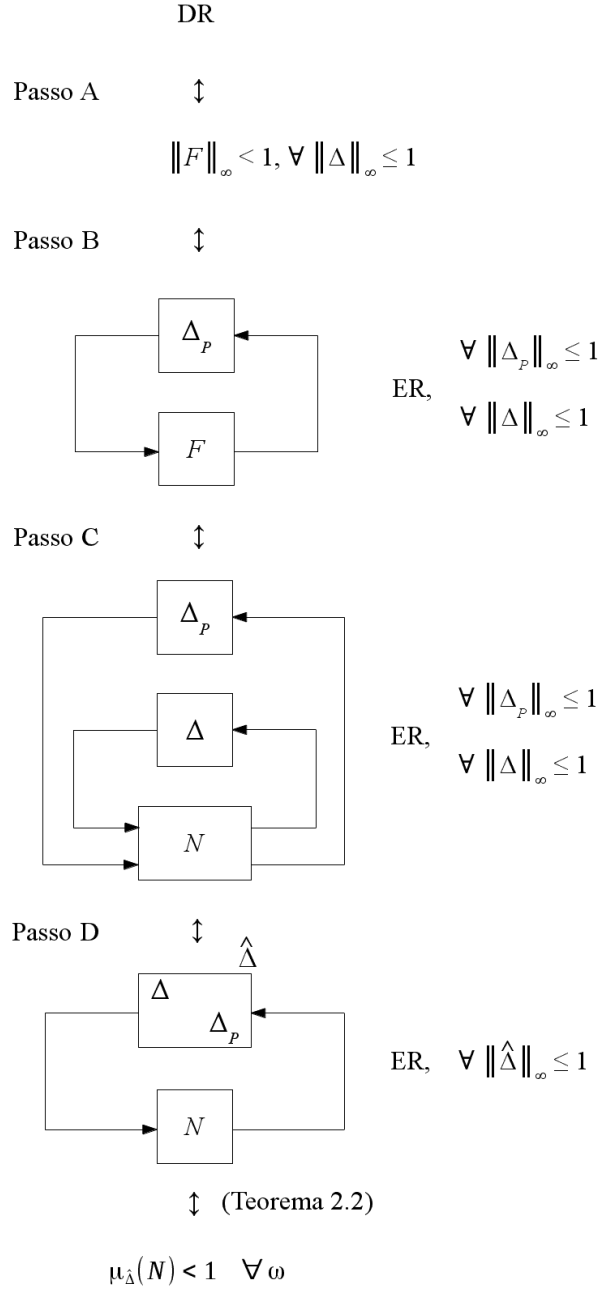


FIG. 2.4: DR como um caso especial de ER estruturada. $F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$

Desempenho Robusto ($\mu(N) < 1$) é satisfeito. Entretanto, a estabilidade nominal (estabilidade de N) não é garantida por (2.15) e portanto deve ser testada separadamente.

2.3 UM LIMITANTE SUPERIOR DE μ

Dada uma matriz quadrada qualquer A , a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\det(I - A) = \prod_i (1 - \lambda_i(A)).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \det(I - M\Delta) = 0 &\Rightarrow \prod_i (1 - \lambda_i(M\Delta)) = 0 \\ &\Rightarrow 1 - \lambda_i(M\Delta) = 0 \quad \text{para algum } i \\ &\Rightarrow \bar{\sigma}(\Delta) \lambda_i \left(M \frac{\Delta}{\bar{\sigma}(\Delta)} \right) = 1 \quad \text{para algum } i \\ &\Rightarrow \lambda_i \left(M \frac{\Delta}{\bar{\sigma}(\Delta)} \right) = \frac{1}{\bar{\sigma}(\Delta)} \quad \text{para algum } i \\ &\Rightarrow \max_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \lambda \left(M \frac{\Delta}{\bar{\sigma}(\Delta)} \right) = \frac{1}{\min_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \bar{\sigma}(\Delta)}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, Δ satisfaz a igualdade $\det(I - M\Delta) = 0$, e como $\frac{\Delta}{\bar{\sigma}(\Delta)} \in \mathbf{\Delta}$ além de possuir o maior valor singular igual a 1, temos

$$\max_{\Delta \in \mathbf{\Delta}/\bar{\sigma}(\Delta)=1} \rho_R(\Delta M) = \mu(M), \quad (2.17)$$

onde λ pôde ser substituído pelo módulo do maior autovalor real ρ_R , pois se $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ então $-\Delta \in \mathbf{\Delta}$.

O valor de μ depende da estrutura de Δ , e será tão maior quanto menos restrita for tal estrutura. A menos restrita ocorre quando $\mathbf{\Delta}$ for uma estrutura complexa cheia. Nesse caso, conhecido também como incertezas não-estruturadas, μ atinge o seu valor máximo, conforme enuncia o teorema a seguir:

Teorema 2.4 (Condição do maior valor singular (ZHOU, 1996)). *Dada uma matriz qualquer M e uma estrutura $\mathbf{\Delta}$ a ela associada, o valor singular estruturado será sempre limitado pelo maior valor singular, ou seja,*

$$\mu(M) \leq \bar{\sigma}(M). \quad (2.18)$$

Além disso, a igualdade ocorre quando a matriz Δ for uma matriz complexa cheia, ou seja, $m_r = m_c = 0$ e $m_C = 1$.

Entretanto, em casos práticos, a utilização de $\bar{\sigma}(M)$ leva a análises de robustez demasiadamente conservadoras. Isso porque esse maior valor singular só é uma condição necessária e suficiente para estabilidade robusta em casos de incertezas não-estruturadas, o que não ocorre na maioria dos problemas reais. Tais problemas são melhor representados por incertezas estruturadas, onde a condição do maior valor singular passa a ser somente suficiente, mas não necessária. Portanto, considere

$$\mathcal{D}_{\Delta} = \left\{ \text{bloco diagonal} \left(D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{k_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_C} I_{k_m} \right) : \right. \\ \left. D_q \in \mathbb{C}^{k_q \times k_q}, \det(D_q) \neq 0, d_q \in \mathbb{C}^* \right\}. \quad (2.19)$$

Uma consequência da estrutura de (2.19) é que $D \in \mathcal{D}_{\Delta} \Rightarrow D\Delta = \Delta D \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$. Dessa forma, considerando (2.17) e sabendo que $\max \rho_R(AB) = \max \rho_R(BA)$, $\forall A, B$ de dimensões compatíveis, segue-se que o limite em (2.18) pode ser refinado para

$$\mu(M) = \mu(DMD^{-1}) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \leq \bar{\sigma}(M) \quad \forall D \in \mathcal{D}_{\Delta}. \quad (2.20)$$

2.3.1 UMA FÓRMULA EQUIVALENTE PARA μ

Ao observarmos (2.17) percebemos que seria necessária alguma maneira de se obter a pior combinação possível de incertezas, ou seja, a matriz Δ de norma 1 tal que o maior autovalor real de ΔM seja máximo. Uma outra ideia seria procurar o autovetor relacionado a esse autovalor. Assim, considere $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ e $\theta \in \mathbb{R}^+$ de tal forma que, para um vetor não nulo x

$$\Delta M x = \theta x. \quad (2.21)$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar x um vetor unitário, ou seja,

$$x \in \partial \mathbf{B} := \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\}.$$

A estrutura de Δ em (2.21) impõe restrições no conjunto de vetores formado por todo x que satisfaça essa equação. Assim, levando-se em consideração a estrutura bloco-diagonal $\mathbf{\Delta}$, tem-se que cada bloco irá impor restrições somente no “subvetor” de x a ele correspondente. Para esclarecer melhor essas restrições, vamos considerar um caso de incerteza composto por um parâmetro real possivelmente repetido e por um bloco complexo. Neste caso particular, temos

$$\mathbf{\Delta} = \{ \text{bloco diagonal}(\delta^r I_{k_r}, \Delta_{k_C}^C) : \delta^r \in \mathbb{R}, \Delta_{k_C}^C \in \mathbb{C}^{k_C \times k_C} \}.$$

Como neste caso específico Δ possui 2 blocos, separa-se o vetor x em dois subvetores de dimensões compatíveis com as de cada bloco. Para isso, utilizam-se duas matrizes de projeção: $Q_r \in \mathbb{R}^{k_r \times n}$ e $Q_C \in \mathbb{R}^{k_C \times n}$ tais que

$$Q_r = \begin{bmatrix} I_{k_r} & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_C = \begin{bmatrix} 0 & I_{k_C} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, (2.21) pode ser desdobrada em outras duas equações

$$\delta^r Q_r Mx = \theta Q_r x \quad (2.22a)$$

$$\Delta_{k_C}^C Q_C Mx = \theta Q_C x. \quad (2.22b)$$

Para que (2.22b) seja satisfeita para algum $\Delta_{k_C}^C$ com $\bar{\sigma}(\Delta_{k_C}^C) \leq 1$, é necessário e suficiente que

$$\|Q_C Mx\| \geq \theta \|Q_C x\|.$$

Isso significa que é sempre possível obter um $\Delta_{k_C}^C$ que, sendo uma matriz complexa cheia, irá rotacionar e contrair o vetor $Q_C Mx$ de tal maneira que ele fique na mesma direção e possua o mesmo tamanho do vetor $\theta Q_C x$. Por outro lado, para que (2.22a) seja satisfeita para algum $|\delta^r| \leq 1$, é necessário (mas não mais suficiente) que

$$\|Q_r Mx\| \geq \theta \|Q_r x\|.$$

O motivo da não suficiência é que δ^r , sendo um número real, não pode rotacionar o vetor $Q_r Mx$, ainda que possa contraí-lo. Por isso, para atingir a suficiência, é necessário também que os vetores $Q_r Mx$ e $Q_r x$ estejam alinhados. Entende-se aqui que “alinhados” significa que os dois vetores se diferem apenas por um fator real. Para isso, é necessário que

$$x_j(\overline{Mx})_i = \bar{x}_i(Mx)_j, \quad i, j = 1, \dots, k_r. \quad (2.23)$$

Assim, $\mu(M) = \theta_*$, sendo θ_* o maior θ para o qual exista algum x que satisfaça a todas essas condições, o que está de acordo com (2.17).

Resumindo, para esse caso específico:

$$\mu_{\Delta}(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{S}_{\Delta}(M) = \emptyset, \text{ caso contrário} \\ \max\{\theta : \|Q_r Mx\| \geq \theta \|Q_r x\|, \|Q_C Mx\| \geq \theta \|Q_C x\| \\ \text{para algum } x \in \mathcal{S}_{\Delta}(M)\} \end{cases}, \quad (2.24)$$

com

$$\mathcal{S}_{\Delta}(M) = \{x \in \partial\mathbf{B} : x_j(\overline{Mx})_i = \bar{x}_i(Mx)_j, \quad i, j = 1, \dots, k_r\} \quad (m_r = m_c = 1, m_c = 0).$$

Note que

$$\begin{aligned} x_j(\overline{Mx})_i &= \bar{x}_i(Mx)_j, \quad i, j = 1, \dots, k_r \\ &\Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^{k_r} \sum_{j=1}^{k_r} g_{ij} x_j(\overline{Mx})_i &= \sum_{i=1}^{k_r} \sum_{j=1}^{k_r} g_{ij} \bar{x}_i(Mx)_j, \quad \forall g_{ij} \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow \\ \underbrace{\begin{bmatrix} (\overline{Mx})_1 & \cdots & (\overline{Mx})_{k_r} \end{bmatrix}}_{\triangleq G_{k_r}} \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k_r} \\ g_{21} & \cdots & g_{2k_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k_r 1} & \cdots & g_{k_r k_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k_r} \end{bmatrix} &= \\ & \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_{k_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k_r} \\ g_{21} & \cdots & g_{2k_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k_r 1} & \cdots & g_{k_r k_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Mx)_1 \\ \vdots \\ (Mx)_{k_r} \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \\ (Mx)^H Q_r^H G_{k_r} Q_r x &= x^H Q_r^H G_{k_r} Q_r Mx \\ &\Leftrightarrow \\ x^H M^H \underbrace{\begin{bmatrix} G_{k_r} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq G} x &= x^H \begin{bmatrix} G_{k_r} \\ 0 \end{bmatrix} Mx, \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde G_{k_r} é qualquer matriz complexa de dimensão $k_r \times k_r$. De forma equivalente, podemos limitar G_{k_r} a matrizes hermitianas, uma vez que toda matriz G_{k_r} pode ser decomposta da seguinte maneira: $G_{k_r} = G_1 + jG_2$, com G_1, G_2 hermitianas de mesma dimensão que G_{k_r} . Assim, se (2.25) é satisfeita para qualquer G_1 e G_2 hermitianas, então também será satisfeita para qualquer $G_{k_r} = G_1 + jG_2$.

Se o bloco real repetido fosse substituído por um complexo repetido ($m_r = 0, m_c = 1$), (2.23) teria a seguinte forma:

$$x_j(Mx)_i = x_i(Mx)_j, \quad i, j = 1, \dots, k_c. \tag{2.26}$$

A partir daí, é possível estendermos para o caso da estrutura bloco-diagonal geral de (2.1). Para isso, considere as matrizes de projeção $Q_q, q = 1, \dots, m$, assim definidas:

$$Q_q = \begin{bmatrix} 0_{k_q \times k_1} & \cdots & 0_{k_q \times k_{q-1}} & I_{k_q} & 0_{k_q \times k_{q+1}} & \cdots & 0_{k_q \times k_m} \end{bmatrix}.$$

Além disso, para $q = 1, \dots, m_r + m_c$, considere o conjunto de índices J_q assim definido:

$$J_q = \left\{ \sum_{p=1}^{q-1} k_p + 1, \sum_{p=1}^{q-1} k_p + 2, \dots, \sum_{p=1}^q k_p \right\}.$$

Esse conjunto de índice se refere ao subvetor de x correspondente ao bloco q . Por exemplo: o bloco $q = 2$ está relacionado ao subvetor $x = [x_{k_1+1} \ x_{k_1+2} \ \cdots \ x_{k_1+k_2}]^T$.

Dessa forma, (2.24) pode ser generalizada conforme o teorema 2.5.

Teorema 2.5 (FAN, 1991). *Dada uma matrix qualquer M e uma estrutura Δ a ela associada*

$$\mu_{\Delta}(M) = \begin{cases} 0 \text{ se } \mathcal{S}_{\Delta}(M) = \emptyset, \text{ caso contrário} \\ \max\{\theta : \|Q_q M x\| \geq \theta \|Q_q x\|, q = 1, \dots, m \text{ para algum } x \in \mathcal{S}_{\Delta}(M)\} \end{cases}, \quad (2.27)$$

com

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{S}_{\Delta}(M) = \{x \in \partial \mathbf{B} : x_j(\overline{Mx})_i = \bar{x}_i(Mx)_j, (i, j) \in \bigcup_{q=1}^{m_r} J_q \times J_q; \\ x_j(Mx)_i = x_i(Mx)_j, (i, j) \in \bigcup_{q=m_r+1}^{m_r+m_c} J_q \times J_q \}. \end{aligned} \right.$$

Nesse caso, (2.25) pode ser generalizada de maneira que G pertença ao conjunto de matrizes hermitianas \mathcal{G}_{Δ} tal que

$$\mathcal{G}_{\Delta} = \left\{ \text{bloco diagonal}(G_1, \dots, G_{m_r}, 0_{k_{m_r+1}}, \dots, 0_{k_m}) : G_q = G_q^H \in \mathbb{C}^{k_q \times k_q} \right\}, \quad (2.28)$$

e o conjunto de vetores x admissíveis passa a ter uma condição não mais equivalente, mas necessária:

$$\mathcal{S}_{\Delta}(M) \subseteq \{x \in \partial \mathbf{B} : x^H(M^H G - GM)x = 0 \quad \forall G \in \mathcal{G}_{\Delta}\}. \quad (2.29)$$

Essa não equivalência é consequência de os m_c blocos de G , referentes aos escalares complexos repetidos, serem tratados da mesma forma que os m_c blocos referentes aos complexos

cheios, ou seja, igualados a zero. Isso significa que as restrições de mesma forma que (2.26) foram ignoradas e, sendo assim, a equivalência só ocorre quando $m_c = 0$. Nesse caso, (2.29) passa a ser uma igualdade.

A seguinte proposição, uma consequência do teorema 2.5 e de (2.29) provê dois limites intermediários em (2.18).

Proposição 2.1 (FAN, 1991). *Dada uma matriz M e uma estrutura Δ a ela associada*

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \eta_{\Delta}(M) \leq \inf_{G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \nu(M, G) \leq \bar{\sigma}(M),$$

onde

$$\eta_{\Delta}(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{S}_{\Delta}(M) = \emptyset, \text{ caso contrário} \\ \max_{x \in \mathcal{S}_{\Delta}(M)} \|Mx\| & \end{cases}$$

e

$$\nu(M, G) = \sqrt{\max \left\{ 0, \bar{\lambda} [M^H M + j(GM - M^H G)] \right\}}. \quad (2.30)$$

Analisaremos a seguir a Proposição 2.1 para o caso em que $\mu_{\Delta}(M) > 0$, pois o contrário implica em $\mathcal{S}_{\Delta}(M) = \emptyset$, o que permite que tal proposição possa ser verificada de maneira trivial. Assim, com relação à primeira desigualdade, e de acordo com o teorema 2.5, $\mu_{\Delta}(M) > 0 \Rightarrow \exists x_* \in \mathcal{S}_{\Delta}(M)$ tal que o par $(\mu_{\Delta}(M), x_*)$ é solução de (2.27). Isso significa que para $q = 1, \dots, m$, $\|Q_q M x_*\| \geq \mu_{\Delta}(M) \|Q_q x_*\|$. Portanto,

$$\|M x_*\|^2 = \sum_{q=1}^m \|Q_q M x_*\|^2 \geq \mu_{\Delta}^2(M) \sum_{q=1}^m \|Q_q x_*\|^2 = \mu_{\Delta}^2(M).$$

Com relação à segunda desigualdade, sendo $\mu_{\Delta}(M) > 0$, e de acordo com (2.29), temos que para todo $x \in \mathcal{S}_{\Delta}(M)$ e $G \in \mathcal{G}_{\Delta}$,

$$\|Mx\|^2 = x^H M^H M x = x^H [M^H M + j(M^H G - GM)] x \leq \bar{\lambda} [M^H M + j(GM - M^H G)]$$

e assim

$$\begin{aligned} \eta_{\Delta}^2(M) &= \max_{x \in \mathcal{S}_{\Delta}(M)} \|Mx\|^2 \\ &\leq \inf_{G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \bar{\lambda} [M^H M + j(GM - M^H G)] \\ &\leq \inf_{G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \max \left\{ 0, \bar{\lambda} [M^H M + j(GM - M^H G)] \right\} \\ &= \inf_{G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \nu^2(M, G). \end{aligned}$$

Finalmente, como \mathcal{G}_Δ contém a matriz zero, a última desigualdade da Proposição 2.1 resulta em $\bar{\lambda}(M^H M) = \bar{\sigma}^2(M)$. O próximo teorema é uma consequência direta de (2.20) e da Proposição 2.1.

Teorema 2.6 (FAN, 1991). *Dada uma matrix qualquer M e uma estrutura Δ a ela associada*

$$\begin{aligned} \mu_\Delta(M) &\leq \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta} \eta_\Delta(DMD^{-1}) \\ &\leq \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} \nu(DMD^{-1}, G) \\ &\leq \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta} \bar{\sigma}(DMD^{-1}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

O teorema 2.6 fornece dois limites superiores que são menos conservadores que $\inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$. Entretanto, como $\max_{x \in \mathcal{S}_\Delta(DMD^{-1})} \|DMD^{-1}x\|$ pode ter máximo local que não é global, tentativas de se obter $\eta_\Delta(DMD^{-1})$ podem resultar em limites estritamente menores, o que pode levar a uma estimação errônea de que $\mu_\Delta(M)$ é um valor menor do que o verdadeiro. Felizmente, o segundo limite superior em (2.31) não sofre desse inconveniente. De fato, podemos escrever

$$\inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} \nu(DMD^{-1}, G) = \sqrt{\max\left\{0, \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} F(D, G)\right\}}, \quad (2.32)$$

onde $F : \mathcal{D}_\Delta \times \mathcal{G}_\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$F(D, G) = \bar{\lambda} \left[M_D^H M_D + j(GM_D - M_D^H G) \right],$$

com $M_D = DMD^{-1}$. Assim, para qualquer $D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta$, a exceção de $F(D, G) < 0$ (que no caso resulta em $\mu_\Delta(M) = 0$), $\sqrt{F(D, G)}$ é um limite superior para $\mu_\Delta(M)$. Por esse motivo, $\nu(M_D, G)$ será utilizado como ponto de partida para a definição do novo limite superior a que se refere o título desta dissertação. Além disso, o mesmo limite superior pode ser obtido por meio de uma forma computacionalmente mais simples, conforme será visto a seguir. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ seja $\Phi_\alpha : \mathcal{D}_\Delta \times \mathcal{G}_\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ definido da seguinte forma:

$$\Phi_\alpha(D, G) = \bar{\lambda} \left[M^H D M + j(GM - M^H G) - \alpha D \right].$$

Assim, a função $F(D, G)$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(D, G) &= \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha : \bar{\lambda} \left[D^{-H} M^H D^H D M D^{-1} + j(GD M D^{-1} - D^{-H} M^H D^H G) - \alpha I \right] \geq 0 \right\} \\ &= \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha : \bar{\lambda} \left[D^{-H} \left(M^H D^H D M + j(D^H G D M - M^H D^H G D) - \alpha D^H D \right) D^{-1} \right] \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

$$= \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha : \bar{\lambda} \left[M^H D^H D M + j \left(D^H G D M - M^H D^H G D \right) - \alpha D^H D \right] \geq 0 \right\}, \quad (2.33)$$

o que nos leva à seguinte proposição:

Proposição 2.2 (FAN, 1991). *Para qualquer $D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta$*

$$F(D, G) = \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha : \Phi_\alpha(D^H D, D^H G D) \geq 0 \right\},$$

que é o único valor de α para o qual $\Phi_\alpha(D^H D, D^H G D) = 0$, pois sendo $D^H D \succeq 0$, $\Phi_\alpha(D^H D, D^H G D)$ torna-se uma função de α estritamente decrescente. Além disso,

$$\inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} F(D, G) = \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha : \Phi_\alpha(D^H D, G) \geq 0 \right\}. \quad (2.34)$$

A relação 2.34 baseia-se no fato de que o mapeamento $\mathcal{G}_\Delta \rightarrow \mathcal{G}_\Delta$ definido por $G \rightarrow D^H G D$ é uma bijeção.

Podemos assumir em (2.20) que D pertence ao conjunto

$$\mathcal{D}_\Delta^+ := \{D \in \mathcal{D}_\Delta : D \succ 0\},$$

o que, segundo (SKOGESTAD, 2005), não afeta a otimização. Portanto, a partir de (2.34) temos

$$\inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta^+, G \in \mathcal{G}_\Delta} F(D, G) = \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta^+, G \in \mathcal{G}_\Delta} \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha : \Phi_\alpha(D^2, G) \geq 0 \right\}. \quad (2.35)$$

Como o mapeamento $\mathcal{D}_\Delta^+ \rightarrow \mathcal{D}_\Delta^+$ definido por $D \rightarrow D^2$ também é uma bijeção, podemos reduzir (2.35) a

$$\inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta^+, G \in \mathcal{G}_\Delta} F(D, G) = \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta^+, G \in \mathcal{G}_\Delta} \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha : \Phi_\alpha(D, G) \geq 0 \right\},$$

com a vantagem de que $\Phi_\alpha(D, G)$ é uma função convexa. Por essa razão, atualmente o limite superior mais próximo de μ , utilizado em análise de robustez, deriva da seguinte minimização:

$$\mu(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta^+, G \in \mathcal{G}_\Delta} \nu(D M D^{-1}, G) \quad (2.36)$$

$$= \sqrt{\max \left\{ 0, \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta^+, G \in \mathcal{G}_\Delta} \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha : \Phi_\alpha(D, G) \geq 0 \right\} \right\}}. \quad (2.37)$$

Esse limitante superior deu origem a técnicas de síntese de controladores robustos, sendo apresentadas no capítulo seguinte.

3 SÍNTESE μ DE CONTROLADORES

Sintetizar um controlador robusto face a incertezas estruturadas é uma tarefa em geral difícil, pois envolve um problema de otimização que não é convexo. Além disso, de maneira intuitiva, podemos perceber que o problema de síntese é pelo menos tão difícil quanto o de análise, sendo este último um problema do tipo NP-difícil (TOKER, 1995). Assim, até o presente momento não existe uma solução de minimização global para o problema geral de síntese, mesmo para o caso puramente complexo.

Entretanto, existem alguns métodos menos ambiciosos com o objetivo de obter um controlador que minimize um limite superior do valor singular estruturado. Tal minimização é em geral uma minimização local, o que não garante que esse limite superior seja o menor possível. Sendo assim, veremos a seguir, de maneira sucinta, três desses métodos: síntese por iteração $D - G - K$ (YOUNG, 1996), síntese sob restrição integrais quadráticas (APKARIAN, 2006a) e síntese não-diferenciável (APKARIAN, 2011). Após isso, será proposto um método baseado em um novo limite do valor singular estruturado, objetivo deste trabalho.

3.1 SÍNTESE POR ITERAÇÃO $D - G - K$

A iteração $D - G - K$ foi concebida a partir de uma condição de equivalência constante na seguinte proposição:

Proposição 3.1 (FAN, 1991). *Seja $\beta > 0$, então*

$$\inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} F(D, G) \leq \beta^2 \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} \bar{\sigma} \left[\left(\frac{DM D^{-1}}{\beta} + jG \right) (I + G^2)^{-1/2} \right] \leq 1. \quad (3.2)$$

Além disso, o mínimo da esquerda existe se e somente se o mínimo da direita também existe.

Assim, combinando-se a Proposição 3.1 com (2.31) e (2.32), chegamos à seguinte inequação:

$$\mu_\Delta(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} \inf_{\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0} \left\{ \beta : \bar{\sigma} \left(\left(\frac{DM D^{-1}}{\beta} + jG \right) (I + G^2)^{-1/2} \right) \leq 1 \right\}, \quad (3.3)$$

o que, visando obter robustez a uma determinada especificação de desempenho, nos leva ao seguinte problema de síntese:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \beta(\omega) \\
& \text{sujeito a} && \bar{\sigma} \left(\left(\frac{D(\omega)N(K,\omega)D^{-1}(\omega)}{\beta(\omega)} + jG(\omega) \right) (I + G^2(\omega))^{-1/2} \right) \leq 1 \\
& && \beta(\omega) \in \mathbb{R}, \beta(\omega) > 0 \\
& && D(\omega) \in \mathcal{D}_{\hat{\Delta}}, G(\omega) \in \mathcal{G}_{\hat{\Delta}} \\
& && K \text{ estabiliza o sistema nominal em malha fechada,}
\end{aligned}$$

A síntese μ é feita da seguinte forma: para um K fixo, determina-se $D(\omega), G(\omega), \beta(\omega)$, o que é um problema de síntese mista baseada no limite superior de μ similar a (3.3) só que através da frequência. Isso é um problema convexo que pode ser resolvido de forma eficiente. Após determinar $D(\omega), G(\omega), \beta(\omega)$ para um intervalo de pontos na frequência, procuram-se matrizes de transferências reais racionais cuja resposta em frequência melhor se ajuste às curvas em função da frequência dessas matrizes $D(\omega), G(\omega), \beta(\omega)$, de tal maneira que as interconexões sejam estáveis. De forma alternada, para matrizes de transferências fixas, agora denominadas de $D(s), G(s)$, e para um $\beta > 0$ fixo, o problema de se encontrar K será um problema de síntese H_∞ , sendo também convexo e, portanto, pode ser resolvido de maneira eficiente. Isso irá resultar numa rotina biconvexa para o problema de síntese μ mista, conhecida como “*iteração D-G-K*” .

Embora cada etapa seja individualmente convexa, o problema de otimização conjunto de $D(s), G(s)$ e $K(s)$ não é convexo. Portanto, essa técnica não garante encontrar o mínimo global, que é a solução ótima do problema. Também não há garantia de convergência para um mínimo local.

3.2 SÍNTESE SOB RESTRIÇÃO INTEGRAIS QUADRÁTICAS

Em (APKARIAN, 2006a), foi desenvolvida uma técnica de síntese que se beneficia de uma condição entre desempenho robusto e duas Restrições Integrais Quadráticas (IQC, do inglês *Integral Quadratic Constraint*). Para verificar tal condição, considere a hipótese de que para todo $\Delta \in \mathbf{B}\hat{\Delta}$ a seguinte IQC definida por $\Pi_\Delta = \Pi_\Delta^H$ seja satisfeita

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} y_\Delta(j\omega) \\ \Delta(y_\Delta)(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi_\Delta \begin{bmatrix} y_\Delta(j\omega) \\ \Delta(y_\Delta)(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0 \quad (3.4)$$

para todos sinais quadraticamente integráveis y_Δ e, além disso, a condição de desempenho pode ser expressa pela seguinte IQC

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi_p \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \leq 0 \quad (3.5)$$

para todo sinal quadraticamente integrável w , onde y_Δ, z, w representam sinais de entrada e saída, conforme a FIG. 2.2, $\Pi_\Delta \triangleq \begin{bmatrix} S & (jG)^H \\ jG & -S \end{bmatrix}$, $\Pi_p \triangleq \begin{bmatrix} \gamma^{-1}I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $S = D^H D$, $D \in \mathcal{D}_\Delta$, $G \in \mathcal{G}_\Delta$.

O teorema a seguir propõe um método de síntese onde as condições de estabilidade robusta e desempenho robusto são observadas para todo Δ que satisfaça à (3.4), ou seja, para todo Δ admissível, conforme assumimos por hipótese.

Teorema 3.1 (APKARIAN, 2006a). *Suponha que K estabilize o sistema nominal em malha fechada e que a seguinte Inequação no Domínio da Frequência (FDI, do inglês Frequency Domain Inequality) seja satisfeita:*

$$F(K, \Pi; j\omega) := \left[\frac{N(j\omega, K)}{I} \right]^H \Pi \left[\frac{N(j\omega, K)}{I} \right] \prec 0 \quad \forall \omega \in [0, \infty],$$

onde

$$\Pi := \left[\begin{array}{c|c} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \hline \Pi_{12}^H & \Pi_{22} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{cc|cc} \Pi_{\Delta,11} & 0 & \Pi_{\Delta,12} & 0 \\ 0 & \Pi_{p,11} & 0 & \Pi_{p,12} \\ \hline \Pi_{\Delta,12}^H & 0 & \Pi_{\Delta,22} & 0 \\ 0 & \Pi_{p,12}^H & 0 & \Pi_{p,22} \end{array} \right].$$

Então

- i) O sistema representado pela FIG. 2.2 é estável para todo Δ admissível em (3.4).
- ii) A condição de desempenho é observada para todo Δ admissível em (3.4).

Note que Π pertence a um conjunto formado por multiplicadores, denominado aqui de $\mathbf{\Pi}$, que por sua vez depende dos conjuntos \mathcal{D}_Δ e \mathcal{G}_Δ . Assim, dado que

$$F(K, \Pi; j\omega) \prec 0 \quad \forall \omega \Leftrightarrow \bar{\lambda}(K, \Pi; j\omega) < 0 \quad \forall \omega,$$

e considerando a seguinte função não diferenciável

$$f(K, \Pi) := \max_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\lambda} \left(\left[\frac{N(j\omega, K)}{I} \right]^H \Pi \left[\frac{N(j\omega, K)}{I} \right] \right),$$

foi proposta por (APKARIAN, 2006a) uma técnica de síntese que consiste em um programa de otimização local cuja função objetivo e restrições estão descritas a seguir

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(K, \Pi) \\ & \text{sujeito a} && \Pi \in \mathbf{\Pi} \end{aligned}$$

K estabiliza o sistema nominal em malha fechada.

Tal minimização ocorrerá até que um valor $f(K, \Pi) < 0$ seja encontrado. Entretanto, como não se trata de uma minimização convexa, pode ocorrer de o programa finalizar em um mínimo local que seja não negativo, o que significa que não foi possível obter uma solução para o problema de controle robusto. Nesse caso, o método é reiniciado com uma condição inicial diferente, o que, poderá (ou não) resultar em um valor < 0 .

Infelizmente, este método de síntese não está disponível para o MATLAB[®] e, não dispomos do programa de otimização local. Além disso, a minimização do autovalor presente na função objetivo baseia-se no algoritmo em (KAO, 2004) cuja eficiência ainda precisa ser comprovada. Por essa razão, tal método não será usado para fins de comparação com a nova técnica.

3.3 SÍNTESE NÃO-DIFERENCIÁVEL COM MULTIPLICADORES DINÂMICOS

Este método foi desenvolvido em (APKARIAN, 2011) e aplica-se a modelos incertos onde a estrutura em (2.19) se restringe a

$$\Delta = \left\{ \text{bloco diagonal}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \Delta_P) : \delta_i^r \in \mathbb{R}, \Delta_P \in \mathbb{C}^{k_{m_r+1} \times k_{m_r+1}} \right\}, \quad (3.6)$$

onde Δ_P está associada às especificações de desempenho e k_{m_r+1} é igual à dimensão do canal de desempenho.

De acordo com (2.33), considere a seguinte desigualdade no domínio da frequência:

$$\bar{\lambda} \left[N^H D^H D N + j \left(D^H G D M - N^H D^H G D \right) - \alpha D^H D \right] < 0, \quad (3.7)$$

onde N é dado por (2.3) e (D, G) são blocos dinâmicos que obedecem à condição $(D(j\omega), G(j\omega)) \in (\mathcal{D}_\Delta, \mathcal{G}_\Delta) \forall \omega$. A FDI em (3.7) é uma condição suficiente para $\mu < \alpha$. Nesse sentido, a idéia é atribuir inicialmente um valor elevado para α e, através de uma minimização, encontrar algum D, G e K que satisfaça essa condição. Trata-se de um problema de factibilidade, o qual verifica se é possível obter um controlador cujo valor singular estruturado seja menor que α . Caso isso seja possível, diminui-se o valor de α e

verifica-se novamente a factibilidade. Tal procedimento é realizado inúmeras vezes através de um processo de bisseção até que não se consiga mais diminuir o valor de α .

Entretanto, a minimização do autovalor em (3.7) baseia-se no algoritmo em (KAO, 2004) cuja eficiência ainda precisa ser comprovada. Por outro lado, isso não ocorre quando a função de minimização é a norma H_∞ , o que possibilitou o desenvolvimento de uma técnica recente de síntese de controlador desenvolvida em (APKARIAN, 2006b), a qual encapsula os blocos D, G e K em um controlador estruturado. Essa técnica obtém mínimos locais para a norma H_∞ de um determinado sistema conectado ao controlador estruturado em malha fechada. Isso motivou o desenvolvimento de uma condição equivalente a (3.7):

$$\max \left\{ \|\mathcal{F}_l(P_w(s), K(s))\|_\infty, \left\| \mathcal{F}_l \left(P_m, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_\infty \right\} < 1, \quad (3.8)$$

onde \mathcal{F}_l representa uma LFT inferior, e os termos $P_w(s), K(s), P_m, W_1(s)$ e $W_2(s)$ estão detalhados em (APKARIAN, 2011). Note que neste caso a função a ser minimizada é uma norma H_∞ e não mais um autovalor.

Assim, o método sintetiza um controlador que minimiza o valor de α , satisfazendo a condição (3.8). Sendo esse α um limite superior de μ , o qual está relacionado à estrutura em (3.6), tal método é por natureza uma síntese μ específica para sistemas com incertezas paramétricas cujo objetivo é obter um controlador que otimiza o nível de desempenho robusto.

3.4 O NOVO MÉTODO

Assim como ocorre na síntese por iteração $D - G - K$, o novo método também tem como objetivo minimizar o valor singular estruturado de maneira indireta, através de uma minimização de um limite superior de μ , localizado entre $\inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta, G \in \mathcal{G}_\Delta} \nu(DMD^{-1}, G)$ e $\inf_{D \in \mathcal{D}_\Delta} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$. Antes de apresentarmos o novo limite, considere o seguinte lema:

Lema 3.1 (Teorema da Monotonicidade de Weyl (BHATIA, 1997)). *Sejam A e B matrizes hermitianas. Se $B \succeq 0$, então*

$$\lambda_j(A + B) \geq \lambda_j(A) \quad \forall j.$$

Considere também a seguinte proposição:

Proposição 3.2. *Para qualquer matrix M e uma estrutura bloco diagonal Δ a ela associada*

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \nu(M, G) \leq \inf_{G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \bar{\sigma}(M + jG) \leq \bar{\sigma}(M). \quad (3.9)$$

Prova. a Proposição 3.2 é uma consequência de que

$$\text{a) } \nu(M, G) \leq \bar{\sigma}(M - jG) \quad \forall G \in \mathcal{G}_{\Delta}.$$

$$\text{b) } \inf_{G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \bar{\sigma}(M + jG) = \inf_{G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \bar{\sigma}(M - jG).$$

De fato podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(M - jG) &= \bar{\sigma}(G + jM) \\ &= \sqrt{\bar{\lambda} [(G + jM)^H (G + jM)]} \\ &= \sqrt{\bar{\lambda} [G^H G - jM^H G + jGM + M^H M]} \\ &= \sqrt{\bar{\lambda} \left[\underbrace{M^H M + j(GM - M^H G)}_{\text{Hermitiana}} + \underbrace{G^H G}_{\geq 0} \right]} \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\geq \sqrt{\bar{\lambda} [M^H M + j(GM - M^H G)]} \quad (3.10b)$$

$$\begin{aligned} &\geq \sqrt{\max \{0, \bar{\lambda} [M^H M + j(GM - M^H G)]\}} \\ &= \nu(M, G), \end{aligned}$$

onde a passagem de (3.10a) para (3.10b) é uma consequência direta do Lema 3.1. \square

A partir de (3.9) introduz-se o multiplicador $D \in \mathcal{D}_{\Delta}$, que contribui para a minimização, dando origem ao novo limite superior, conforme o teorema a seguir:

Teorema 3.2 (Novo Limite Superior). *Para qualquer matrix M associada a estrutura bloco diagonal Δ*

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}_{\Delta}, G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \nu(DMD^{-1}, G) \quad (3.11a)$$

$$\leq \inf_{D \in \mathcal{D}_{\Delta}, G \in \mathcal{G}_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1} + jG) \quad (3.11b)$$

$$\leq \inf_{D \in \mathcal{D}_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}).$$

Prova. Substituindo-se o termo M em (3.9) por DMD^{-1} e acrescentando o multiplicador $D \in \mathcal{D}_{\Delta}$ na minimização, chega-se ao lado direito das inequações constantes no teorema 3.2. Basta então que $\mu_{\Delta}(M)$ seja igual a $\mu_{\Delta}(DMD^{-1})$, o que é verdade para todo $D \in \mathcal{D}_{\Delta}$, conforme (2.20). \square

Embora o novo limite (3.11b) seja mais conservador que (3.11a), ele possui a vantagem de ser adequado a uma técnica recente de síntese de controlador desenvolvida em (APKARIAN, 2006b). Além disso, o fato de (3.11b) ser mais conservador não significa que uma técnica de síntese nele baseada seja necessariamente menos eficaz. De fato, um controlador que minimize tal limite irá minimizar indiretamente (3.11a) de tal forma que ele será tão mais eficaz quanto melhor for essa minimização indireta.

Entretanto, o mesmo não se pode dizer da análise, uma vez que o nível de robustez do sistema já está fixado por um dado controlador. Neste caso, a técnica de minimização que fornece um limite mais preciso será sempre preferível, desde que ela seja convexa e demande um esforço computacional aceitável. Por esse motivo, todas as técnicas de síntese usadas neste trabalho serão comparadas, no que tange à robustez, através da mesma técnica de análise (2.36).

A nova técnica de síntese proposta nesta dissertação, doravante denominada de “Síntese DjG ”, consiste em uma otimização cuja função objetivo e restrições estão descritas a seguir

$$\text{minimize} \quad \max_{\omega} \bar{\sigma}(DN(K)D^{-1} + jG)$$

$$\text{sujeito a} \quad D(j\omega) \in \mathcal{D}_{\Delta}, G(j\omega) \in \mathcal{G}_{\Delta}$$

K estabiliza o sistema nominal em malha fechada,

onde $N(K) = \mathcal{F}_l(P, K)$, conforme (2.3). De maneira gráfica, podemos ver o sistema $(DN(K)D^{-1} + jG)$ conforme a FIG. 3.1.

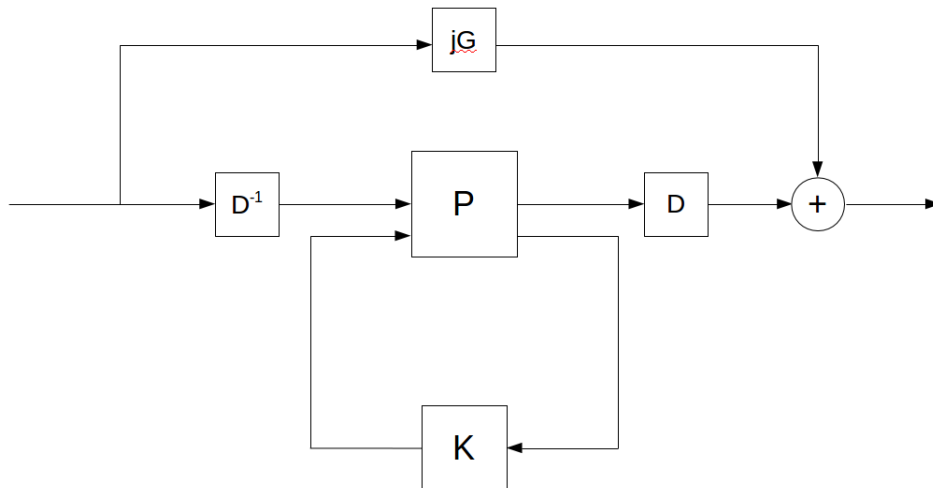


FIG. 3.1: Configuração inicial para a Síntese DjG

Nessa representação, os blocos D e G não existem fisicamente, sendo apenas sistemas

dinâmicos a serem parametrizados de maneira que $(D(j\omega), G(j\omega)) \in (\mathcal{D}_\Delta, \mathcal{G}_\Delta) \forall \omega$. Para isso, o bloco dinâmico $D(s)$ deve ter a mesma estrutura de (2.19), com a ressalva de que cada bloco D_q passe a ser uma matriz de transferência com k_q entradas e k_q saídas e cada bloco d_q passe a ser uma função de transferência. Além disso, ambos os tipos de blocos não devem possuir zeros no eixo imaginário, o que garante que $\det[D_q(j\omega)], d_q(j\omega) \neq 0 \forall q, \omega$.

Por outro lado, para que $(G(j\omega)) \in (\mathcal{G}_\Delta) \forall \omega$, é necessário que o bloco dinâmico $G(s)$ possua a mesma estrutura que (2.28), onde cada bloco G_q passa a ser uma matriz de transferência com k_q entradas e k_q saídas. Além disso, é necessário que $G_q(j\omega) = G_q^H(j\omega) \forall q, \omega$. Para isso, cada matriz de transferência $G_q(s)$ deverá ser do tipo *Para-Hermitiana*, cuja representação em espaço de estado está definida no teorema a seguir.

Teorema 3.3 (Matrizes de Transferência Para-Hermitiana (ZHONG, 2005)). *Uma matriz de transferência quadrada, racional e mínima $G(s)$ que não possui polos ou zeros no eixo $j\omega$ (incluindo ∞), é uma matriz Para-Hermitiana se e somente se possui uma representação mínima em espaço de estado da seguinte forma:*

$$\left[\begin{array}{cc|c} A & R & -B \\ -E & -A^T & C^T \\ \hline C & B^T & D \end{array} \right],$$

onde $D = D^T$, $E = E^T$ e $R = R^T$.

Um inconveniente da representação na FIG. 3.1 é que o bloco D^{-1} não é parametrizável. Por esse motivo, faz-se necessária uma mudança de variável que seja parametrizável de maneira que o bloco D continue a pertencer ao conjunto \mathcal{D}_Δ . Assim, seja \tilde{D} tal que $D = \tilde{D} + I$. Note que

$$\begin{aligned} D\Delta = \Delta D &\Leftrightarrow (\tilde{D} + I)\Delta = \Delta(\tilde{D} + I) \\ &\Leftrightarrow \tilde{D}\Delta + \Delta = \Delta\tilde{D} + \Delta \\ &\Leftrightarrow \tilde{D}\Delta = \Delta\tilde{D}. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\tilde{D} \in \mathcal{D}_\Delta \Leftrightarrow D \in \mathcal{D}_\Delta,$$

e a nova representação gráfica fica conforme a FIG. 3.2.

Conforme dito anteriormente, a Síntese DjG possui a vantagem de ser adequada a uma técnica recente de síntese de controlador desenvolvida em (APKARIAN, 2006b).

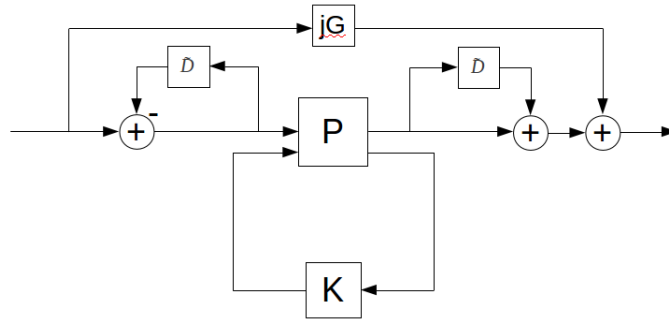


FIG. 3.2: Configuração parametrizável para a Síntese DjG

Trata-se de uma otimização não diferenciável cujo propósito é encontrar um controlador estruturado que minimize a norma H_∞ de um determinado sistema em malha fechada, conforme a FIG 3.3. Nela, P é um modelo linear invariante no tempo (LTI, do inglês

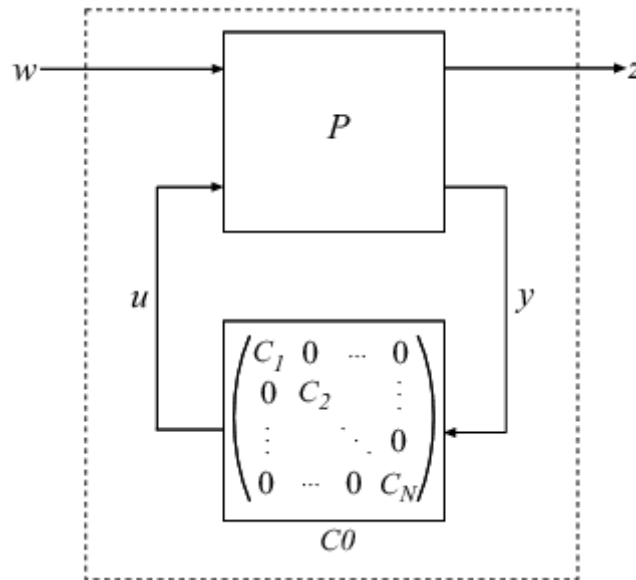


FIG. 3.3: Configuração de síntese com controlador estruturado

Linear Time Invariant) que representa os elementos fixos da arquitetura de controle a ser otimizada, sendo composto pela planta e por funções de ponderação que capturam as especificações de desempenho. $C0$ representa uma estrutura bloco diagonal de controle, composta de elementos ajustáveis.

A teoria e os algoritmos por traz dessa otimização não diferenciável não é objeto desta dissertação. Portanto, iremos utilizá-la apenas como uma ferramenta, permanecendo como uma caixa preta. Resta-nos agora realizar uma manipulação na FIG. 3.2 de

maneira que ela se ajuste à FIG. 3.3. Assim, o controlador a ser sintetizado e os blocos parametrizáveis serão encapsulados em C_0 , pois representam a parte ajustável do modelo. Para isso, é necessário separar os blocos sintonizáveis da parte fixa do modelo, conforme se verifica na FIG 3.4.

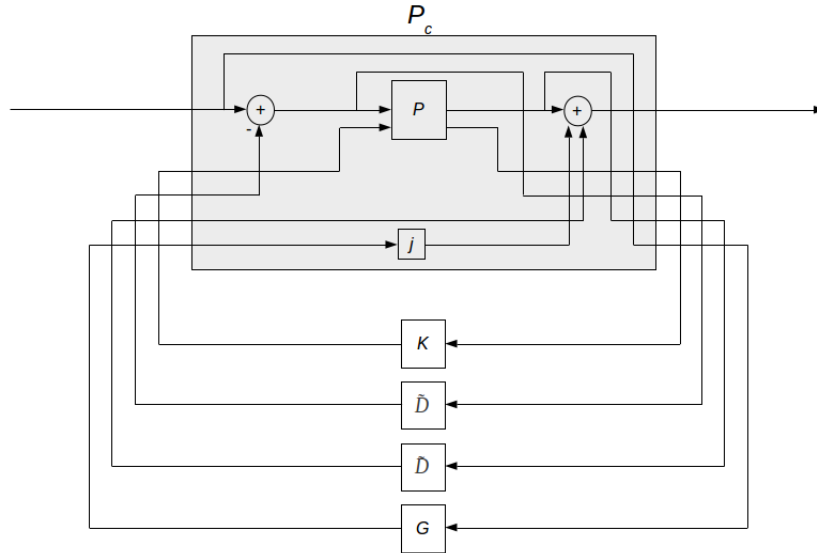


FIG. 3.4: Configuração LFT com blocos sintonizáveis fora da planta de síntese

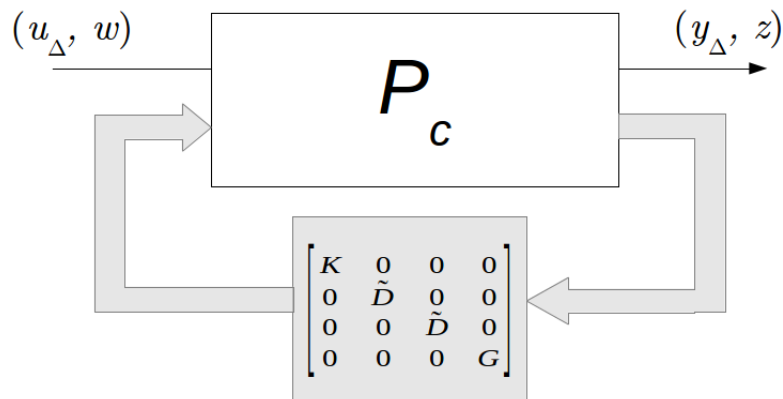


FIG. 3.5: Configuração LFT para a Síntese DjG

Finalmente, a FIG. 3.5, cuja transferência é equivalente a da FIG. 3.1, representa o

modelo de síntese, onde

$$P_c = \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_{P_2} \\ 0 & 0 \\ I_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} I_N & 0 & -I_N & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_N & jI_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_N & 0 & -I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_N & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entretanto, existe um inconveniente relativo ao bloco j , que aparece na FIG. 3.4. Teoricamente, tal bloco possui a propriedade de fornecer um ganho de 0 db e uma mudança de fase de 90° para toda frequência, conforme se verifica na FIG. 3.6.

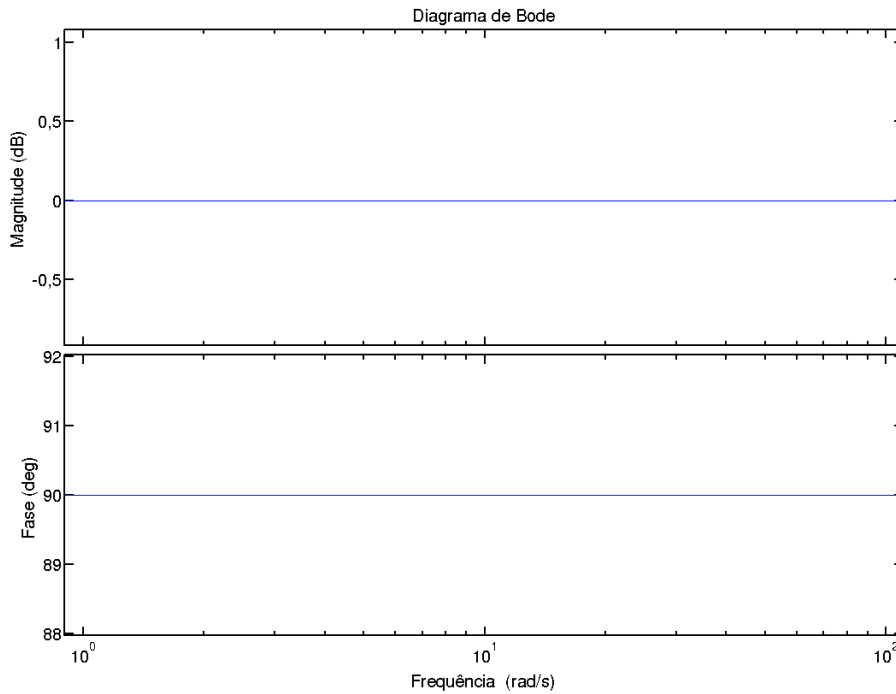


FIG. 3.6: Gráfico de Bode teórico do bloco j

Nesse caso, o bloco j seria um ganho estático complexo, o que não é permitido na técnica de síntese em (APKARIAN, 2006b), onde a planta de síntese P_c deve ser composta somente por blocos com representação em espaço de estado a coeficientes reais. Para contornar esse problema, é necessária uma função de transferência a coeficientes reais cuja resposta em frequência se aproxime da FIG. 3.6. Tal função de transferência pode ser obtida em (BEDROSIAN, 1961), com o uso de funções elípticas, historicamente utilizadas

no projeto de circuitos eletrônicos de diferença de fase de 90° . A FIG 3.7 e a FIG 3.8 apresentam o diagrama de polos e zeros e o diagrama de bode, respectivamente, de uma função de transferência de ordem 20 desse tipo, que iremos chamar de $J(s)$.

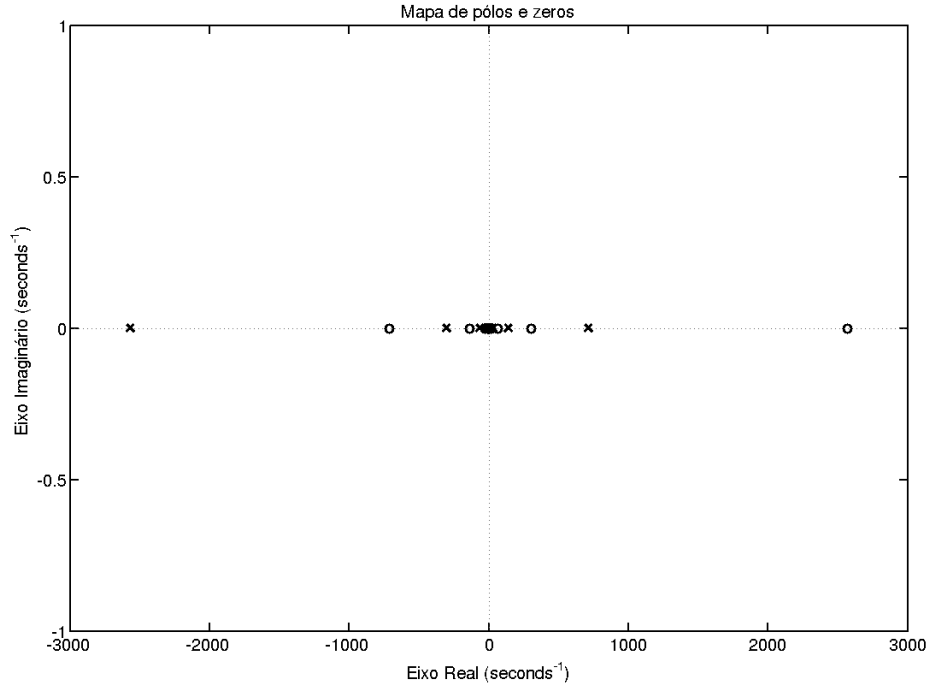


FIG. 3.7: Diagrama de polos e zeros da função $J(s)$

Note que na FIG. 3.7 para cada polo/zero existe um zero/polo simétrico em relação ao eixo imaginário, o que é responsável pelo ganho de 0 db constante. Já os motivos pelos quais a fase permanece próxima a 90° dentro de uma faixa de frequência encontram-se em (BEDROSIAN, 1961) e não serão abordados aqui.

Com relação à FIG. 3.8, note que, no nível DC e em frequências muito baixas, a fase está indo a zero, o que poderá causar erros na minimização nos casos em que o valor de pico de $\max_{\omega} [\bar{\sigma}(DND^{-1} + jG)]$ ou de $\max_{\omega} [\bar{\sigma}(DND^{-1} + J(s)G)]$ estiver nessa faixa de frequência, onde $J(s) \neq j$. Para contornar esse problema, podemos conectar tal função de transferência a um filtro passa-alta com diferença de fase de 90° em DC e em frequências muito baixas. A FIG. 3.9 apresenta o diagrama de bode desse filtro e a FIG. 3.10 o diagrama de bode do conjunto função de transferência mais filtro, que chamaremos de $\tilde{J}(s)$, sendo a melhor aproximação para o bloco teórico j .

Conseqüentemente, a função objetivo que queremos minimizar terá um comporta-

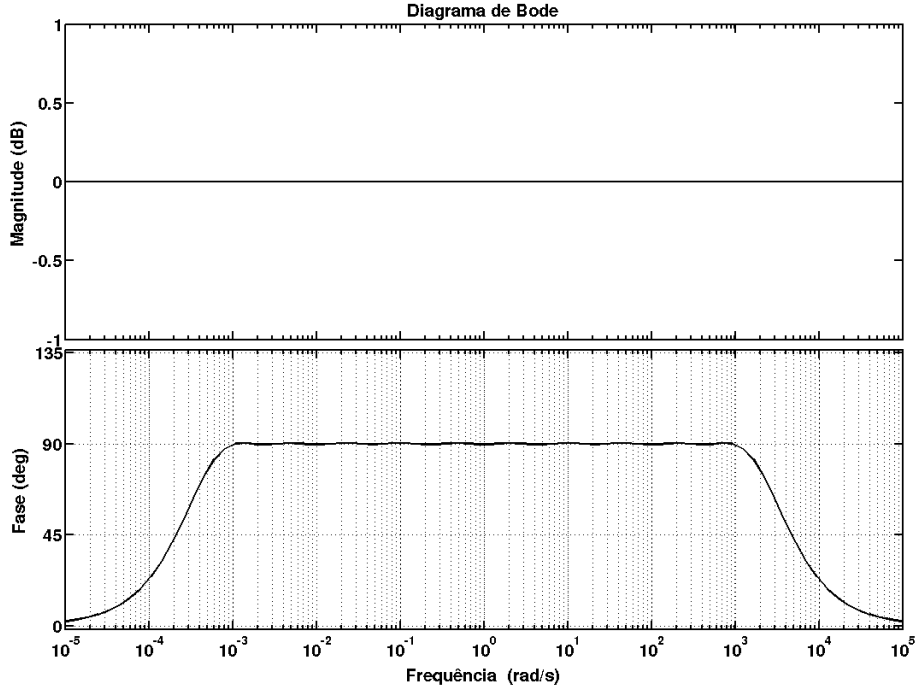


FIG. 3.8: Diagrama de Bode da função $J(s)$

mento diferente em baixas frequências, onde o ganho do bloco $\tilde{J}(s)$ tende a zero. Como resultado, temos

$$DND^{-1} + \tilde{J}(s)G \approx \begin{cases} DND^{-1}, & \text{para } \omega < 10^{-3} \\ DND^{-1} + jG, & \text{para } \omega \geq 10^{-3}. \end{cases} \quad (3.12a)$$

$$(3.12b)$$

O bloco G , relacionado às incertezas reais paramétricas e responsável por inserir um maior grau de liberdade na minimização, acaba sendo desprezado nas frequências abaixo de 10^{-3} rad/s. Como consequência, (3.12a) representa uma síntese complexa, onde as incertezas reais paramétricas são tratadas como incertezas complexas. Isso significa que o controlador sintetizado resulta de duas sínteses simultâneas, uma complexa em frequências abaixo de 10^{-3} rad/s e outra real/mista em frequências acima de 10^{-3} rad/s.

Conforme variamos os parâmetros do controlador aumentado, o valor de $\|DND^{-1} + \tilde{J}(s)G\|_{\infty}$ também se altera. Nesse sentido, a técnica de otimização não diferenciável irá variar tais parâmetros até que essa norma atinja um valor mínimo. Infelizmente, essa minimização não é convexa o que pode nos levar com frequência a mínimos locais. Para amenizar esse problema, utilizaremos repetidamente essa mesma rotina de minimização,

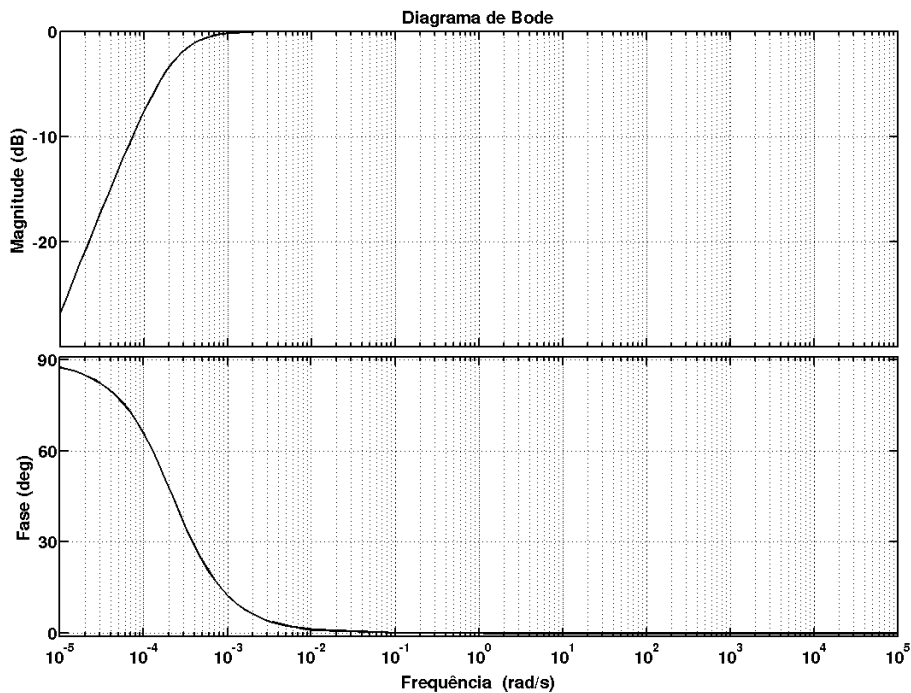


FIG. 3.9: Diagrama de Bode do filtro passa-altas

porém partindo-se de condições iniciais diferentes, o que nos leva a atingir um número maior de mínimos locais, o que, por sua vez, aumenta a probabilidade de atingirmos o menor valor possível, ou seja, o mínimo global. Obviamente, isso tem um preço: o tempo de execução do algoritmo computacional aumentará conforme for o número de condições iniciais.

Algumas características desse método de síntese, consequências da técnica de otimização não diferenciável, são:

- 1) A ordem e a estrutura do controlador K são escolhidas previamente, assim como a ordem dos multiplicadores D e G . Isso possibilita a síntese de controladores estruturados de baixa ordem, o que é uma característica atrativa para o processo de fabricação de controladores.
- 2) Com relação aos multiplicadores, não há a necessidade de que eles sejam estabilizantes. Também não há a necessidade de ajuste de curvas, como acontecia na iteração $D - G - K$.
- 3) O controlador e os multiplicadores são obtidos simultaneamente, uma vez que com-

põem o mesmo controlador estruturado aumentado.

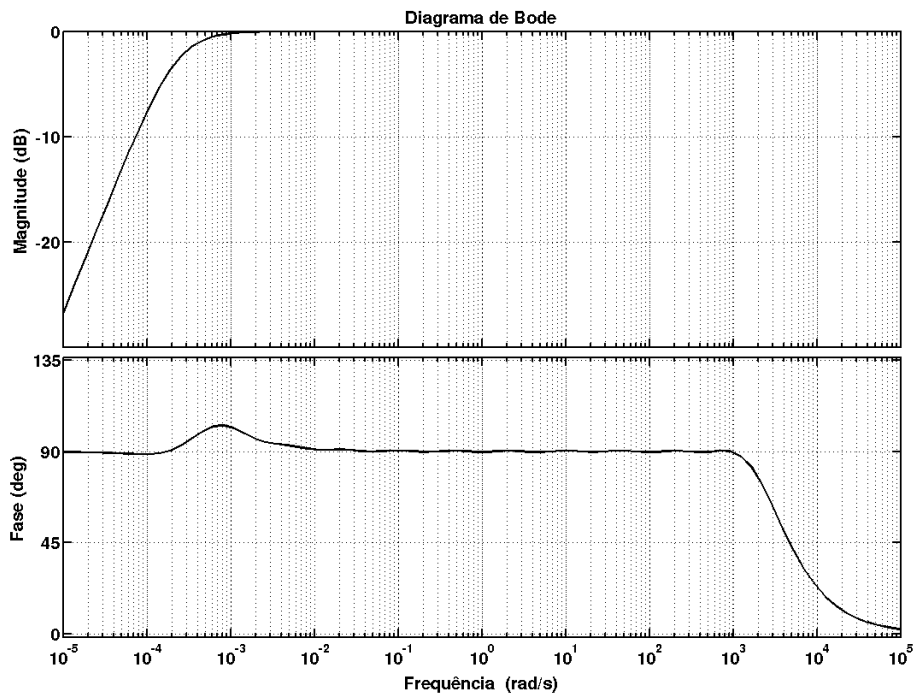


FIG. 3.10: Diagrama de Bode de $\tilde{J}(s)$

Aumentar a ordem de K , D e G significa oferecer um maior grau de liberdade ao sistema o que possibilitará uma diminuição da norma, objeto da síntese. Entretanto, novamente paga-se o mesmo preço por isso: aumento no tempo de execução do algoritmo. Essa relação de custo benefício será melhor visualizada em aplicações numéricas, objeto do próximo capítulo. Além disso, quanto maior a dimensão do espaço paramétrico, maior a incidência de mínimos locais.

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

São apresentados 6 exemplos numéricos de síntese de controlador robusto nos quais se aplicam as técnicas apresentadas no capítulo anterior. Tais exemplos são:

- 1) Planta Levemente Amortecida (APKARIAN, 2011).
- 2) Massa-Mola-Amortecedor (BARROS, 2005).
- 3) Míssil (WISE, 1990).
- 4) Integrador Duplo (YOUNG, 1994).
- 5) Massa-Mola (ROTEA, 1994).
- 6) Míssil (PELLANDA, 2001).

As técnicas constante nos exemplos visam minimizar o pico do valor singular estruturado na frequência, ou seja, têm por objetivo:

$$\min_K [\max_{\omega} (\mu(\omega))].$$

Entretanto, para simplificar a notação, evitaremos explicitar a frequência. Como consequência, os termos μ e $\max_{\omega}(\mu(\omega))$ serão intercambiados indiscriminadamente, de maneira que o contexto irá dizer se estamos nos referindo a um valor pontual na frequência ou ao valor de pico.

Cada exemplo é composto basicamente de uma planta com incertezas reais e de blocos dinâmicos de ponderação, que representam especificações de desempenho no domínio da frequência. Dessa forma, sintetizaremos controladores pelo uso de diferentes métodos e realizaremos comparações em dois aspectos: nível de desempenho robusto, que será verificado pela análise μ e ordem do controlador.

Essas comparações serão apresentadas em tabelas, onde usaremos a seguinte padronização:

- As colunas D , G e K referem-se às ordens dos multiplicadores e do controlador, respectivamente.

- A coluna μ se refere à análise μ do sistema em malha fechada conectado ao controlador sintetizado pela técnica em questão. Tal análise é baseada no limite superior (2.36).
- A coluna $\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$ utiliza o valor exato de j e tem por objetivo mostrar a distância entre a análise μ e o limite superior da Síntese DjG , que utiliza (3.11b).
- A coluna ω_p refere-se à frequência em rad/s onde $\bar{\sigma}(DND^{-1} + \tilde{J}(s)G)$ é máximo e tem por finalidade verificarmos situações onde ocorre (3.12a).
- A coluna $\mu|_{G=0}$ refere-se a uma análise μ também baseada no limite superior (2.36), só que aplicada em um sistema que foi resultado de uma Síntese D , ou seja, fazendo-se $G = 0$. Tal síntese é por natureza uma síntese complexa e tem por objetivo mostrar o quanto se perde em robustez quando desprezamos a informação da fase nos parâmetros reais incertos.

Quanto menor for o valor de μ e a ordem do controlador, melhor será a técnica usada. Entretanto, em alguns casos, a comparação de técnicas depende de qual aspecto é mais relevante uma vez que pode ocorrer de uma determinada técnica obter um valor de μ reduzido às custas de uma elevada ordem do controlador, ao passo que outra técnica poderá obter o contrário.

4.1 PLANTA LEVEMENTE AMORTECIDA (APKARIAN, 2011)

O exemplo tratado nesta seção refere-se a uma planta incerta nominalmente instável com incertezas paramétricas, cuja função de transferência é descrita por (4.1)

$$G(s, \delta) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + \delta_1)}{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + \delta_2)}, \quad (4.1)$$

onde δ_1 e δ_2 são parâmetros reais incertos e $\omega_n = 1$, $\zeta = 0, 2$. Tal descrição é típica de modos levemente amortecidos, com frequência natural incerta, e pode ser rearranjada no formato LFT da FIG. 4.1.

Note que este exemplo possui somente incertezas reais paramétricas e não há canais de desempenho z, w . Isso significa que o controlador a ser sintetizado terá por objetivo somente a robustez em estabilidade. Entretanto, a planta possui um problema específico: se os parâmetros incertos δ_1 e δ_2 forem iguais a -1 , ocorrerá um cancelamento de uma pólo instável em $s = 0$. Como consequência, haverá um modo instável não observável,

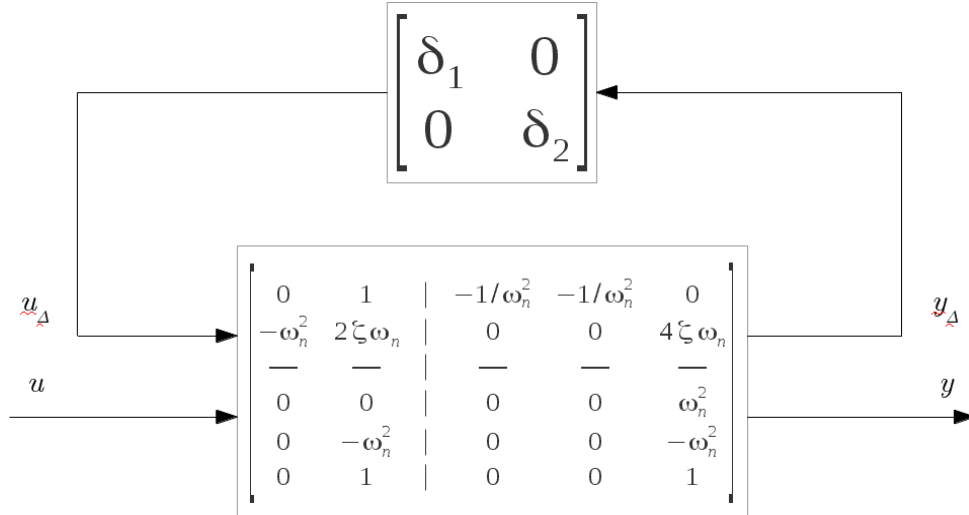


FIG. 4.1: Modelo LFT da planta levemente amortecida

o que inviabiliza a estabilização da planta para qualquer controlador adotado. Por esse motivo, a margem paramétrica, que neste caso pode ser representada por $\bar{\sigma}(\Delta)$, deverá sempre ser menor que 1. Assim, o controlador que atinge o maior nível de robustez será aquele em que a menor incerteza desestabilizante tenha norma 1. Isso é equivalente a dizer que, nesse problema, $\mu \geq 1$.

A TAB. 4.1 apresenta a análise μ para controladores obtidos por diferentes métodos.

TAB. 4.1: Análise da estabilidade robusta da planta levemente amortecida em malha fechada

Iteração $D - G - K$		(APKARIAN, 2011)		Síntese DjG				
μ	K	μ	K	μ	$\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$	K	ω_p	$\mu _{G=0}$
1.22	26	1.0	0	1.0	1.57	0	0.79	1.0

Verifica-se, portanto, que tanto a síntese (APKARIAN, 2011), quanto a síntese DjG conseguiram maximizar a margem paramétrica com um controlador composto simplesmente por um ganho estático, ou seja, de ordem zero. Assim, para este exemplo específico e a despeito de outros critérios, ambas as técnicas são similares e preferíveis à iteração $D - G - K$, que obteve uma margem paramétrica menor ($\frac{1}{1.22} = 0.82$).

4.2 MASSA-MOLA-AMORTECEDOR (BARROS, 2005)

Este exemplo apresenta um problema de controle de um sistema composto por duas massas conectadas conforme a FIG. 4.2. A mola k_2 e o amortecedor b_2 estão fixados em uma parede e conectados à massa m_2 . A massa m_2 também está conectada à massa m_1 por meio da mola k_1 e do amortecedor b_1 . A massa m_2 é afetada por uma força ruidosa f_2 . O sistema é controlado via força f_1 , agindo na massa m_1 . O valor nominal dos parâmetros do sistema são $m_1 = 1$ Kg, $m_2 = 2$ Kg, $k_2 = 1$ N/m, $b_1 = b_2 = 0.05$ N.s/m, e $k_1 = 2$ N/m.

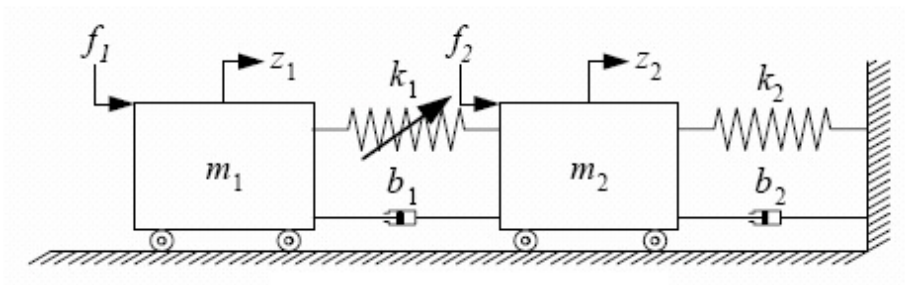


FIG. 4.2: Sistema massa-mola-amortecedor

Nosso objetivo de projeto é usar a força de controle f_1 para atenuar os efeitos da força ruidosa f_2 na posição da massa m_2 . A força f_1 não age diretamente na massa m_2 , mas por meio da rigidez da mola k_1 . Dessa forma, qualquer incerteza em k_1 tornará o problema de controle mais difícil. O problema de controle é formulado como se segue (vide FIG. 4.3):

- O controlador mede a posição da massa m_2 e aplica a força de controle f_1 . Entretanto, no sensor existe um ruído W_n , que é modelado como uma constante de valor 0.001.
- O comando do atuador é penalizado por um fator de 0.1 em baixas frequências e por um fator de 10 em altas frequências (filtro $W_u = \frac{10(s+10)}{s+1000}$).
- O filtro de 1ª ordem $W_{\text{dist}} = \frac{0,25}{s+0,25}$ modela a força ruidosa f_2 .
- O objetivo de desempenho é atenuar a perturbação na posição da massa m_2 por um fator de 80 abaixo de 0.1 rad/s ($W_p = \frac{8}{s+0,1}$).

Dessa forma, será usada a seguinte estrutura para a síntese do controlador:

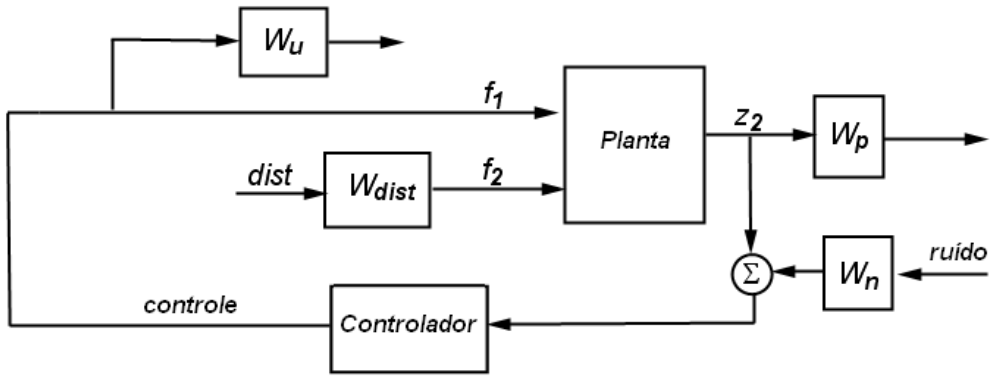


FIG. 4.3: Interconexão para síntese do controlador do sistema massa-mola-amortecedor

A constante de elasticidade da mola é um parâmetro incerto. Seu valor nominal é 2 e pode variar entre 1.2 e 2.8 ($1.2 \leq k_1 \leq 2.8$). Além disso, existe um atraso máximo no atuador f_1 de 0.06 segundos ($\tau \leq 6$ s). Um atraso no tempo equivale a uma exponencial na frequência, o que pode ser modelado conforme a FIG. 4.4.

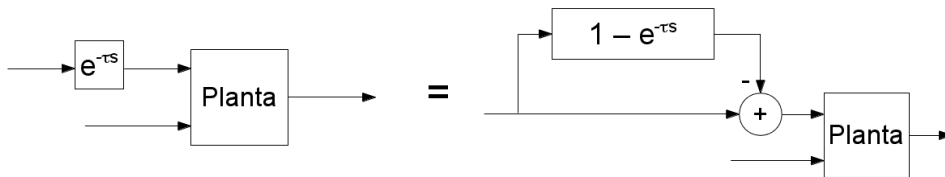


FIG. 4.4: Representações equivalentes para o atraso τ

Entretanto, isso resultaria em uma representação em espaço de estado de dimensão infinita. Para solucionar esse problema, iremos negligenciar esse atraso e inserir uma incerteza complexa $\delta^c(s)$ com tamanho limitado em 1 e ponderada por $W_I(s) = 2,6 \frac{s}{s+40}$ (FIG. 4.5).

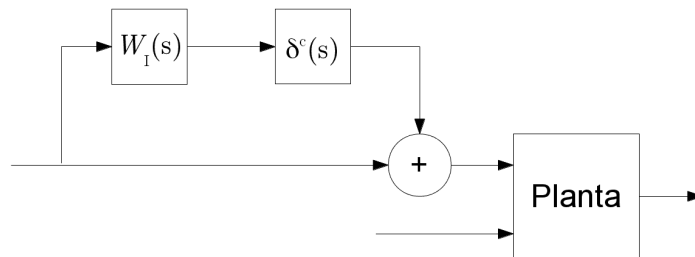


FIG. 4.5: Representação incerta para o atraso τ

A FIG. 4.6 mostra que o modelo incerto “cobre” o modelo real na medida em que variamos a incerteza complexa $\delta^c(s)$.

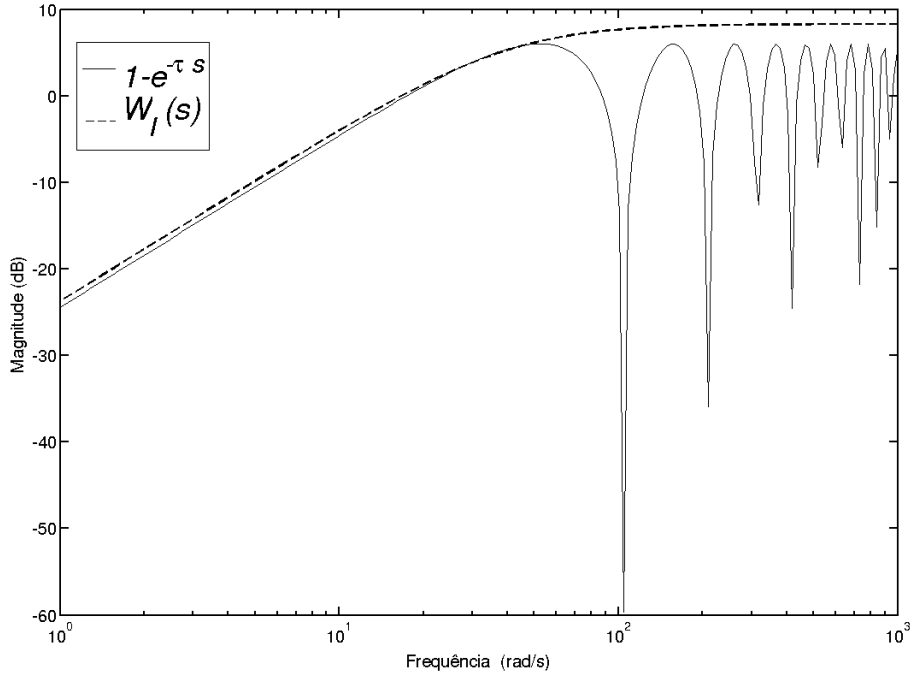


FIG. 4.6: Diagrama de Bode para dinâmica não-modelada do atraso

A representação em espaço de estado A, B, C e D da planta é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad \text{e} \quad D = [0 \quad 0].$$

onde as posições z_1 e z_2 e as velocidades \dot{z}_1 e \dot{z}_2 formam o vetor de estados nesta sequência. A saída da planta é dada por z_2 .

A partir desses dados, é possível representar o modelo incerto na forma da FIG. 2.1 e, então, realizar a síntese do controlador. Entretanto, a técnica (APKARIAN, 2011) não se

aplica em modelos onde $m_c + m_C > 1$, ou seja, onde existem mais de um bloco complexo. Neste exemplo, existem dois blocos complexos: um referente à negligência do atraso τ e outro referente às especificações de desempenho.

A TAB. 4.2 apresenta alguns resultados. Nela, podemos verificar que, na Síntese DjG , aumentar a ordem do controlador a partir de 10 não trás melhoras significativas para a robustez. Além disso, as ordens constantes na última linha da tabela ocasionaram um tempo elevado de processamento. Isso ocorre pois ordens elevadas aumentam o número de parâmetros sintonizáveis e também o número de mínimos locais. Este último fator resulta na necessidade de executar o algoritmo de forma recursiva, onde os parâmetros são inicializados várias vezes com valores diferentes, o que piora ainda mais o tempo de processamento. O mesmo não ocorre na iteração $D - G - K$, que obteve o melhor nível de robustez, embora às custas de um controlador de ordem 30.

TAB. 4.2: Análise do desempenho robusto do sistema massa-mola-amortecedor em malha fechada

Ordem		Iteração $D - G - K$		Síntese DjG					
D	G	μ	K	μ	$\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$	K	ω_p	$\mu _{G=0}$	
1	1	1.97	12	1.18	1.18	6	0.10	1.22	
2	2	1.68	18	1.09	1.10	6	1.85	1.12	
3	3	1.08	22	1.05	1.06	7	0.06	1.09	
4	4	1.01	28	1.01	1.02	7	2.09	1.1	
5	5	0.98	32	1.02	1.03	8	21.3	1.09	
4	2	1.04	26	1.00	–	10	–	–	
4	6	0.93	30	0.99	–	30	–	–	

Neste exemplo fica claro, portanto, que a Síntese DjG é vantajosa para estruturas de síntese de ordens reduzidas e menos eficiente para ordens elevadas.

4.3 MÍSSIL ASSIMÉTRICO (WISE, 1990)

A FIG. 4.7 apresenta um esquema simplificado de um míssil assimétrico, onde as variáveis (p, q, r) representam, respectivamente, as variações angulares dos eixos de rolagem, arfagem e guinada. Tais eixos encontram-se fixados ao corpo do míssil, e as variáveis (ϕ, θ, ψ) são as respectivas integrais de (p, q, r) . Trata-se de um míssil do tipo BTT (do inglês *Bank-To-Turn*), ou seja, “incline para virar”. Isso significa que para o míssil fazer

uma curva, por exemplo para a direita, ele primeiro deverá realizar uma rotação $+\phi$ seguida de uma outra $+\theta$. São necessários, portanto, dois controladores para realizar tal movimento, entretanto, iremos nos concentrar somente na síntese do controlador relativo ao eixo de arfagem, o qual irá controlar a aceleração normal, que está na direção do eixo w .

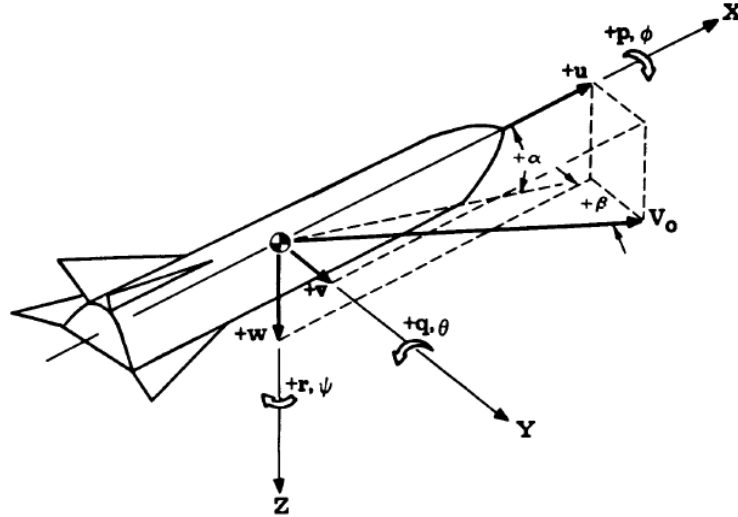


FIG. 4.7: Diagrama físico do míssil (WISE, 1988)

Foi dado em (WISE, 1988) um sistema de controle de vôo longitudinal, conforme mostrado na FIG. 4.8, onde a matriz de transferência $K(s)$ descreve a dinâmica do controlador, sendo descrito pela seguinte representação em espaço de estado:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_q a_q & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} K_a a_z & 0 \\ K_a K_q a_q & K_q a_q \end{bmatrix}$$

$$C_c = [K_q \quad 1], \quad D_c = [K_a K_q \quad K_q],$$

onde $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$. As entradas do controlador são a aceleração normal comandada menos a aceleração normal medida, e o negativo da taxa de arfagem q . A saída do controlador é a deflexão comandada da aleta δ_c (rad). Os parâmetros do controlador são $K_a = -0.0015$, $K_q = -0.32$, $a_z = 2.0$ e $a_q = 6.0$.

Na forma de espaço de estado, conforme (WISE, 1990), a dinâmica longitudinal do

A função de transferência em malha aberta do sistema é

$$G(s) = \left[\frac{\omega^2 V (Z_\delta s^2 + Z_\alpha M_\delta - Z_\delta M_\alpha)}{(s^2 - Z_\alpha s - M_\alpha)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \right] \cdot \left[\frac{\omega^2 (M_\delta s + M_\alpha Z_\delta - M_\delta Z_\alpha)}{(s^2 - Z_\alpha s - M_\alpha)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \right]$$

Note que a função de transferência da aceleração contém um zero no semi-plano da direita.

Em (WISE, 1990) não foram definidas especificações de desempenho. Por essa razão iremos, inicialmente, realizar a Síntese DjG , visando somente a estabilidade robusta. A estrutura do controlador a ser sintetizado será idêntica à do controlador da FIG. 4.8. A TAB. 4.3 apresenta um comparativo entre a estabilidade robusta obtida com a Síntese DjG e a obtida com o controlador fornecido.

TAB. 4.3: Análise da estabilidade robusta do sistema míssil assimétrico em malha fechada

(WISE, 1988)		Síntese DjG						
μ	K	μ	$\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$	K	D	G	ω_p	$\mu _{G=0}$
1.68	2	1.25	1.41	2	0	0	0.24	1.28
		1.24	1.29	2	1	1	0.94	1.24
		1.24	1.24	2	2	2	1.4	1.24
		1.24	1.27	2	3	3	0.71	1.24
		1.24	1.25	2	4	4	0.01	1.24
		1.24	1.25	2	5	5	0.01	1.24

Note que o nível de estabilidade robusta do sistema com o controlador obtido pela Síntese DjG é melhor. Na TAB. 4.3, verificamos que utilizando por exemplo multiplicadores de ordem 1, obtivemos uma melhor robustez que o controlador de (WISE, 1988), resultando em $\mu = 1.24$. Neste caso, a Síntese DjG ajustou os parâmetros do controlador para os seguintes valores: $K_a = -5.5308 \times 10^{-10}$, $K_q = -0.5470$, $a_z = 0.4793$ e $a_q = 11.8962$. Entretanto, não sabemos ao certo se o controlador de (WISE, 1988) cumpre algum requisito de desempenho robusto às custas de uma diminuição do nível de estabilidade robusta. Assim, na tentativa de realizarmos uma comparação mais justa, iremos inserir também especificações de desempenho. Para isso, vamos primeiramente levantar o gráfico da função sensibilidade $S(s)$ do sistema nominal em malha fechada com o controlador de (WISE, 1988). Tal função é uma boa representação de desempenho no domínio da frequência, e pode ser obtida pela transferência de A_{zc} para o erro e , localizado na entrada do primeiro bloco do controlador, conforme a FIG. 4.8. Após isso, insere-se um canal de desempenho, conforme a FIG. 4.9, onde $W(s) = S^{-1}(s)$.

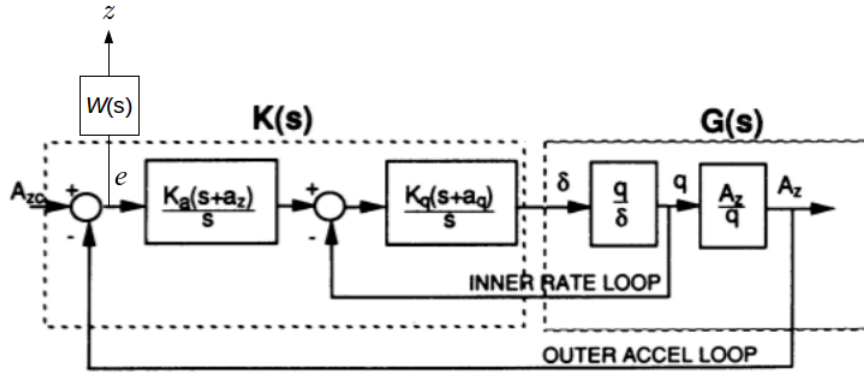


FIG. 4.9: Estrutura de controle com canal de desempenho para o míssil assimétrico

A TAB. 4.4 apresenta um comparativo entre o nível de desempenho robusto obtido pelo controlador (WISE, 1988) e o obtido com a Síntese DjG , mantendo-se a mesma estrutura do controlador. Nesse caso, o valor singular estruturado é maior que o obtido na TAB. 4.3, uma vez que a síntese do controlador possui um menor grau de liberdade, pois visa também o cumprimento de requisitos de desempenho mesmo na presença de incertezas.

TAB. 4.4: Análise do desempenho robusto do sistema míssil assimétrico em malha fechada

(WISE, 1988)		Síntese DjG						
μ	K	μ	$\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$	K	D	G	ω_p	$\mu _{G=0}$
2.03	2	2.00	2.18	2	0	0	0.94	2.04
		1.99	2.16	2	1	1	10.6	2.02
		2.02	2.15	2	2	2	1.52	2.01
		1.92	2.02	2	3	3	1.59	2.01
		1.91	1.96	2	4	4	2.61	2.00
		1.92	1.96	2	5	5	71.3	2.01

Analisando a TAB. 4.4, verificamos que o melhor nível de robustez obtido resultou em $\mu = 1.91$. Neste caso, $K_a = -0.0019$, $K_q = -0.3521$, $a_z = 1.2358$ e $a_q = 9.0289$. Ainda assim, o nível de robustez obtido pela síntese DjG foi ligeiramente menor que o obtido com o controlador fornecido em (WISE, 1988), o que sugere que este controlador fornecido também foi projetado visando robustez.

É possível obtermos um valor de μ menor retirando-se as restrições na estrutura do controlador, entretanto tal estrutura pode ser uma limitação na fabricação do controlador, e assim não teria sentido desprezar tais restrições.

4.4 INTEGRADOR DUPLO (YOUNG, 1994)

O exemplo a seguir trata de um modelo simplificado motivado pela dinâmica de uma cabeça de leitura e gravação de um disco rígido. Tal modelo pode ser aproximado, em baixas frequências, pela função de transferência

$$\tilde{P}(s) = \frac{k_p}{s^2}.$$

Para altas frequências ($\omega > \omega_0$), as dinâmicas da planta são incertas devido aos modos oscilatórios de ordens elevadas. Assume-se que o ganho da planta é um parâmetro incerto com variação

$$k_{\min} < k_p < k_{\max},$$

onde a razão de k_{\max} para k_{\min} pode ser tão grande quanto 100. Para facilitar a comparação de técnicas de síntese diferentes, utilizaremos os valores $\omega_0 = 100$ rad/s e $k_{\min} = 0.1, k_{\max} = 10$, que são valores não muito realistas fisicamente. Entretanto, isso não representa um problema quando estamos interessados somente em realizar comparações de técnicas.

O objetivo da síntese é projetar um controlador fixo (dinamicamente) de maneira que a resposta em malha fechada seja invariante às variações do ganho da planta e seja tão rápida quanto possível, com um nível tolerado de ultrapassagem. Também queremos que o esforço do controlador não seja muito alto, além de decair a valores desprezíveis para frequências acima de ω_0 , onde o modelo das dinâmicas da planta se torna incerto. Para isso, o controlador K deverá cumprir certas especificações de desempenho para toda variação do ganho incerto. Tais especificações são representadas por restrições na função sensibilidade e sensibilidade complementar.

Dessa forma, considere a interconexão de realimentação da FIG. 4.10, onde a planta incerta é dada por

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s^2}(5.05 + 4.95\delta^r),$$

onde o parâmetro $\delta^r \in \mathbb{R}$ é uma incerteza real paramétrica. Note que isso consiste em um integrador duplo com incerteza no ganho, isto é, $\tilde{P}(s) = \frac{k_p}{s^2}$ onde k_p varia, e o problema é normalizado de tal forma $\delta^r \in [-1 \ 1]$ implica em $0.1 \leq k_p \leq 10$.

É desejável controlar essa planta para qualquer valor de ganho k_p no intervalo acima. O requisito de desempenho é maximizar a largura de banda do sistema em malha fechada, com um nível tolerável de sensibilidade. Como consequência, isso maximiza a velocidade

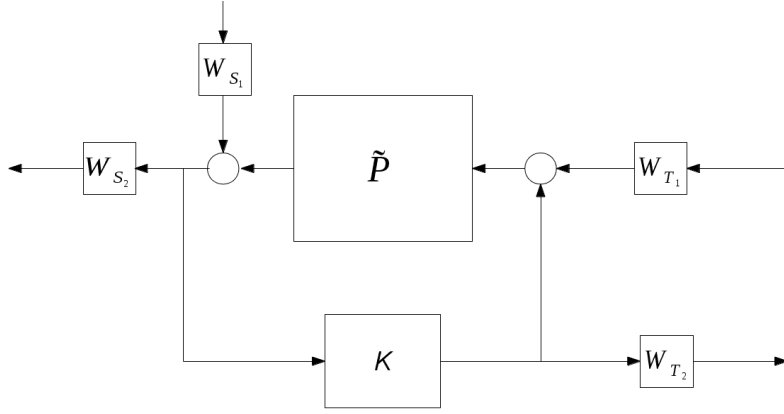


FIG. 4.10: Estrutura de controle com canal de desempenho para o sistema integrador duplo

da resposta ao degrau para um nível tolerado de *overshoot*. Ao mesmo tempo, a ação de controle não deve ser muito alta, e o projeto deve funcionar para todo valor permitido de k_p .

Para atingir esses objetivos, a planta foi colocada na estrutura de síntese da FIG. 4.10. A ideia é, portanto, utilizar ponderações na sensibilidade e na sensibilidade complementar e minimizar a norma da função de transferência resultante. Assim, as ponderações dadas em (YOUNG, 1994) que refletem tais critérios de desempenho são:

$$W_{S_1} = W_{S_2} = \frac{0.03}{s + 0.05}$$

$$W_{T_1} = W_{T_2} = \frac{5(s + 0.001)}{s + 5}.$$

Para as sínteses (APKARIAN, 2011) e DjG foram utilizadas 20 condições iniciais dis-

TAB. 4.5: Análise do desempenho robusto do sistema integrador duplo em malha fechada

Ordem		Iteração $D - G - K$		(APKARIAN, 2011)		Síntese DjG				
D	G	μ	K	μ	K	μ	$\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$	K	ω_p	$\mu _{G=0}$
1	1	1.80	8	1.39	6	1.35	1.37	6	0.19	1.46
2	2	1.61	12	1.15	6	1.33	1.33	6	0.36	1.41
3	3	1.72	14	1.24	7	1.31	1.31	7	0.05	1.41
4	4	1.53	16	1.25	7	1.32	1.33	7	2.31	1.41
5	5	1.53	18	1.25	8	1.33	1.33	8	0.38	1.41

tintas, sendo que aquele método demandou em média um tempo de processamento 2

vezes maior em relação a este. Analisando a TAB. 4.5, verificamos que o valor de $\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$ foi praticamente igual ao valor obtido na análise μ . Com relação ao nível de robustez, a técnica (APKARIAN, 2011) foi a que apresentou o melhor resultado para ordens $D, G > 1$.

4.5 MASSA-MOLA (ROTEA, 1994)

Considere o sistema da FIG. 4.11, composto por duas massas conectadas por uma mola, onde os parâmetros incertos são a constante da mola $k \in [0.94 \ 1.06]$ N/m e a massa $m_2 \in [0.46 \ 0.54]$ Kg. A massa m_1 é um parâmetro conhecido com valor 1 Kg. A força de controle f_1 e a perturbação f_2 agem na massa m_1 , e o sensor mede a posição x_2 da massa m_2 . Em (ROTEA, 1994) os parâmetros incertos variam com o tempo, entretanto, iremos considerá-los fixos e com valores diferentes, o que não afeta a comparação das técnicas.

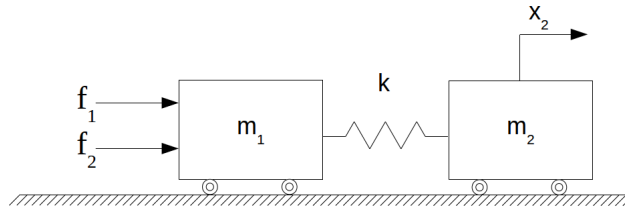


FIG. 4.11: Sistema massa-mola

A planta incerta possui a seguinte representação A, B, C e D em espaço de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \text{ e } D = [0 \ 0].$$

onde as posições das massas m_1 e m_2 , respectivamente x_1 e x_2 , e as velocidades \dot{x}_1 e \dot{x}_2 formam o vetor de estados nesta sequência. A saída da planta é dada por x_2 .

O problema de controle será regular a posição x_2 , sem que haja excessiva potência do atuador. Conforme (ROTEA, 1994), w_1 é a perturbação normalizada na entrada,

sendo ponderada pela constante $\alpha_d = 0.1$, e w_2 é o ruído normalizado de medida, sendo ponderado pela constante $\alpha_v = 0.1$. Tais sinais representam as entradas do canal de desempenho, ao passo que a posição x_2 e a força f_1 representam sinais de saída desse canal de desempenho, sendo representados por z_1 e z_2 . A FIG. 4.12 apresenta a estrutura de controle.

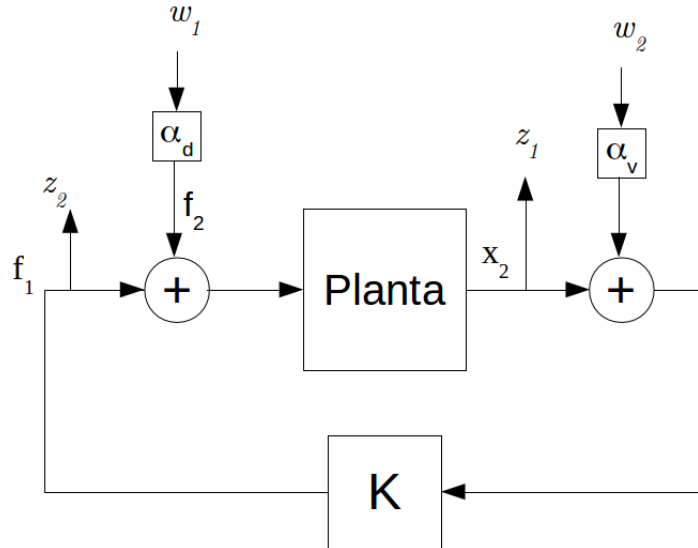


FIG. 4.12: Estrutura de síntese de controle para o sistema massa-mola

A TAB. 4.6 apresenta os resultados.

TAB. 4.6: Análise do desempenho robusto do sistema massa-mola em malha fechada

Ordem		Iteração $D - G - K$		(APKARIAN, 2011)		Síntese DjG				
D	G	μ	K	μ	K	μ	$\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$	K	ω_p	$\mu _{G=0}$
1	1	0.65	8	0.58	3	0.55	0.56	3	0.63	0.6
2	2	0.63	20	0.63	3	0.54	0.55	3	0.51	0.6
3	3	0.65	20	0.59	4	0.54	0.54	4	0.78	0.6
4	4	0.62	38	0.63	4	0.54	0.55	4	9.77	0.6
5	5	0.59	34	0.59	5	0.54	0.54	5	1.96	0.6

Neste exemplo, o tempo de processamento do método (APKARIAN, 2011) foi em média praticamente igual à Síntese DjG , sendo que este último obteve melhor robustez. Além disso, esses dois métodos possibilitaram a obtenção de controladores de ordens reduzidas, além de uma robustez melhor que a da iteração $D - G - K$.

4.6 MÍSSIL AR-AR (PELLANDA, 2001)

A FIG 4.13 apresenta um esquema longitudinal de um míssil do tipo “controle na cauda” cujo objetivo é acompanhar uma aceleração normal de referência $\eta_c(t)$, através de uma deflexão do profundor $\delta(t)$. Embora haja variações na posição do centro de gravidade e do centro de pressão, devido ao consumo de combustível, velocidade e ângulo de ataque, eles normalmente se localizam conforme a figura, o que garante que o míssil tenha a manobrabilidade adequada. Entretanto, isso torna a planta instável por natureza, demandando, portanto, um controlador que a estabilize, além de cumprir as especificações de desempenho.

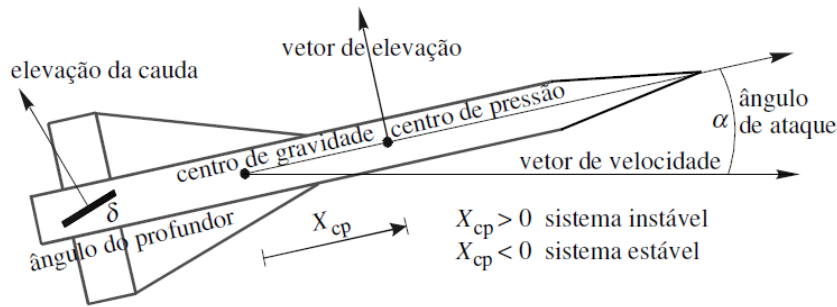


FIG. 4.13: Diagrama físico do míssil ar-ar (PELLANDA, 2001)

4.6.1 MODELO NÃO LINEAR

O modelo não-linear do míssil e a dinâmica do atuador encontram-se em (REICHERT, 1992; NICHOLS, 1993)

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_\delta & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c, \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\alpha & 0 & N_\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned}
Z_\alpha &= K_\alpha M \cos \alpha [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - \frac{M}{3})] \\
Z_\delta &= K_\alpha M \cos \alpha d_n \\
M_\alpha &= K_q M^2 [a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m (-7 + \frac{8M}{3})] \\
M_\delta &= K_q M^2 d_m \\
N_\alpha &= K_z M^2 [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - \frac{M}{3})] \\
N_\delta &= K_z M^2 d_n.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Os estados $\alpha(t)$, $q(t)$, $\delta(t)$ e $\dot{\delta}(t)$ correspondem respectivamente ao ângulo de ataque (em $^\circ$), à velocidade angular em arfagem (em $^\circ/s$), ao ângulo de deflexão do profundor (em $^\circ$) e a sua derivada (em $^\circ/s$). A aceleração normal vertical $\eta(t)$ (em g) e a velocidade angular em arfagem $q(t)$ são as saídas medidas, enquanto que $\delta_c(t)$ representa o ângulo comandado para o profundor da cauda.

Para simulações em regime não estacionário à velocidade variável, a trajetória do número de Mach $M(t)$ em função do tempo é gerada por

$$\dot{M} = \frac{1}{v_s} [-|\eta| \operatorname{sen}(|\alpha|) + A_x M^2 \cos(\alpha)], \tag{4.4}$$

que é um perfil de velocidade bem realista.

O modelo não linear (4.2)-(4.4) representa um míssil voando a uma altitude de 2000 ft. Note que ele é completamente caracterizado pela variável externa $M(t)$ e pelo ângulo de ataque $\alpha(t)$, responsável pela não-linearidade. Além disso, esse modelo é simétrico em relação a $\alpha = 0$. Os valores numéricos e descrições das constantes estão listados a seguir:

$$\begin{aligned}
K_\alpha &= 0,7P_0 \frac{180S}{\pi m v_s}, & K_q &= 0,7P_0 \frac{180S_d}{\pi I_y} \\
K_z &= 0,7P_0 \frac{S}{mg}, & A_x &= 0,7P_0 \frac{180SC_a}{m} \\
P_0 &= 973,3 \text{ lbs/ft}^2 - \text{pressão estática a 20.000 ft} \\
S &= 0,44 \text{ ft}^2 - \text{superfície de referência} \\
m &= 13,98 \text{ slugs} - \text{massa} \\
v_s &= 1036,4 \text{ ft/s} - \text{velocidade do som a 20.000 ft} \\
d &= 0,75 \text{ ft} - \text{diâmetro}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_y &= 182,5 \text{ slug.ft}^2 - \text{momento de inércia em arfagem} \\
C_a &= 0,3 - \text{coeficiente de arrasto} \\
\zeta &= 0,7 - \text{fator de amortecimento do atuador} \\
\omega_a &= 150 \text{ rad/s} - \text{frequência natural não-amortecida do atuador} \\
g &= 32,2 \text{ ft/s}^2 - \text{constante de gravidade} \\
a_n &= 0,000103 \text{ graus}^{-3}, \quad a_m = 0,000215 \text{ graus}^{-3} \\
b_n &= -0,00945 \text{ graus}^{-2}, \quad b_m = -0,0195 \text{ graus}^{-2} \\
c_n &= -0,1696 \text{ graus}^{-1}, \quad c_m = 0,051 \text{ graus}^{-1} \\
d_n &= -0,034 \text{ graus}^{-1}, \quad d_m = -0,206 \text{ graus}^{-1}.
\end{aligned}$$

4.6.2 MODELO LFT

De acordo com (PELLANDA, 2001), e considerando que

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &\in [\alpha_{mín}, \alpha_{máx}] \quad \forall t \geq 0 \\
M(t) &\in [M_{mín}, M_{máx}] \quad \forall t \geq 0 \\
T_\alpha &= \frac{\alpha_{mín} + \alpha_{máx}}{2}, \quad S_\alpha = \frac{\alpha_{máx} - \alpha_{mín}}{2} \\
T_M &= \frac{M_{mín} + M_{máx}}{2}, \quad S_M = \frac{M_{máx} - M_{mín}}{2},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

o modelo do míssil descrito na Subseção 4.6.1 pode ser aproximado por uma LFT superior $\mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$ conforme a FIG. 4.14, onde $G(s)$ é o sistema LTI englobando o corpo rígido do míssil $G'(S)$ e as matrizes reais

$$T = \begin{bmatrix} T_\alpha I_6 & 0 \\ 0 & T_M I_6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} S_\alpha I_6 & 0 \\ 0 & S_M I_6 \end{bmatrix},$$

que correspondem respectivamente a uma translação e a uma mudança de escala necessárias para se obter o bloco normalizado

$$\Delta(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \theta_\alpha(t) I_6 & 0 \\ 0 & \theta_M(t) I_6 \end{bmatrix}.$$

onde $\theta_\alpha = \frac{|\alpha(t) - T_\alpha|}{S_\alpha}$ e $\theta_M = \frac{M(t) - T_M}{S_M}$. Note que (4.5) implica em

$$\begin{aligned}
|\theta_\alpha(t)| &\leq 1, \quad \forall t \geq 0 \\
|\theta_M(t)| &\leq 1, \quad \forall t \geq 0 \\
T_\alpha, S_\alpha, T_M \text{ e } S_M &> 0.
\end{aligned}$$

$$C_\theta = \begin{bmatrix} 2b_n \text{sign}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 3a_n - 2K_\pi(3c_n - 7c_m d_n/d_m) & 0 & -d_n K_\pi & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2b_m \text{sign}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 2b_n \text{sign}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 2c_n & 0 & d_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7c_m & 0 & d_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2c_n & 0 & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_n/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8c_m/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c_n/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\theta g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{g\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{gg} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $K_\pi = \frac{\pi^2}{2(180)^2}$, $D_{28} = \frac{K_\pi}{3}(3c_n + 16c_m d_n/d_m)$ e $D_{34} = K_\pi(-5a_n + 2a_m d_n/d_m)$.

O sistema $G(s)$ é então determinado pelas interconexões e valores numéricos. O modelo LFT foi validado em (PELLANDA, 2001).

4.6.3 ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO E ESTRUTURA DE SÍNTESE

A faixa de operação do ângulo de ataque e velocidade são, respectivamente $\alpha \in [-30, 30]$ graus e $M \in [2, 4]$ *mach*. As especificações de desempenho relativas à aceleração normal, η , no domínio do tempo são: constante de tempo máxima de 0.35 s, *overshoot* máximo de 10 % e erro em regime estacionário máximo de 1 %. Tais especificações serão expressas através de funções de ponderações frequenciais.

A FIG. 4.15 apresenta a estrutura de síntese, onde o pré-compensador $W_i(s)$ é usado para bloquear variações rápidas do sinal de comando, evitando a saturação do atuador, e função de ponderação $W_e(s)$ penaliza o erro de referência em baixa frequência. Tais

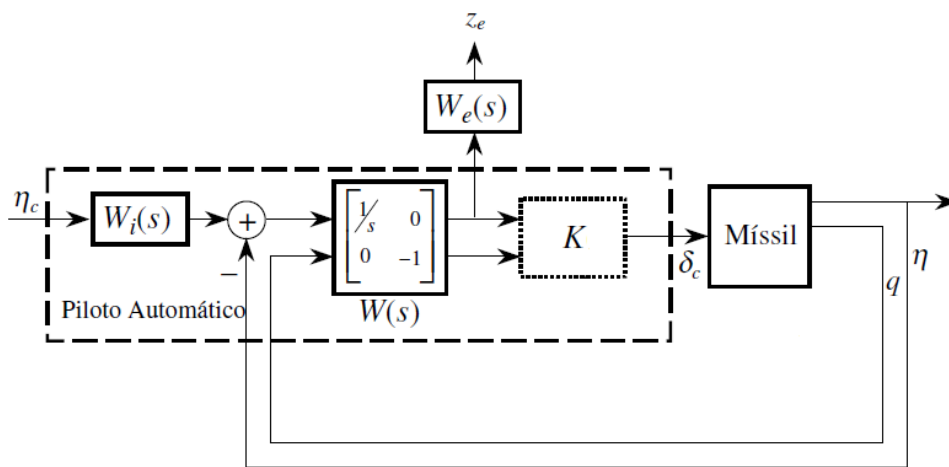


FIG. 4.15: Estrutura de síntese de controle para o míssil ar-ar

ponderações foram obtidas de (PELLANDA, 2001) e estão descritas a seguir:

$$W_i(s) = \left[\begin{array}{cc|c} -14 & 1 & 1 \\ - & - & - \\ 14 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

e

$$W_e(s) = \left[\begin{array}{cc|c} -472,38 & 917,43 & -164,68 \\ -917,43 & -1078,2 & -121,66 \\ - & - & - \\ -164,68 & 121,66 & 0,1112 \end{array} \right].$$

Para realizar a síntese do controlador, foram utilizados somente multiplicadores D, G estáticos, ou seja de ordem 0. De acordo com (SHAMMA, 1994) isso é uma consequência

de os parâmetros pertencentes ao bloco Δ variarem no tempo. Essa característica não ocorreu nos outros exemplos, onde embora os parâmetros pudessem estar dentro de um intervalo finito, eles eram fixos, o que possibilitou o uso de multiplicadores dinâmicos.

A TAB. 4.7 apresenta os resultados. Nela não consta a iteração $D - G - K$, cujo algoritmo foi desenvolvido especificamente para plantas incertas e não para plantas não-lineares ou para modelos LFT, que são características deste último exemplo.

TAB. 4.7: Análise do desempenho robusto do sistema míssil ar-ar em malha fechada

Síntese DjG				
μ	$\max_{\omega} \bar{\sigma}(D + jG)$	K	ω_p	$\mu _{G=0}$
1.54	1.62	4	4.13	1.55
1.55	1.61	8	5.46	1.54
1.53	1.60	16	4.43	1.55

Existe uma incoerência aparente na tabela: a síntese de um controlador de ordem 8 resultou em uma robustez menor que a de um controlador de ordem 4. Na verdade, foi utilizado um número reduzido de condições iniciais, uma vez que a grande quantidade de parâmetros incertos ocasionava um elevado tempo de processamento. Assim, se aumentássemos as condições iniciais da síntese do controlador de ordem 8, provavelmente conseguiríamos atingir outros mínimos menores que resultaria em uma robustez melhor que a do controlador de ordem 4.

4.7 ANÁLISE NUMÉRICA DA SÍNTESE DJG

No exemplo da Seção 4.2, sistema massa-mola-amortecedor, percebemos que ordens elevadas na estrutura de síntese não estavam trazendo benefícios significativos para a robustez, além de despenderem um tempo significativo de processamento. Por isso, faz-se necessária uma análise do comportamento do valor singular estruturado obtido pela Síntese DjG e do tempo de processamento em função da ordem dos blocos parametrizados constantes na estrutura de síntese. Para isso, iremos utilizar os exemplos das seções 4.2, 4.4 e 4.5 que se referem respectivamente ao sistema massa-mola-amortecedor, integrador duplo e sistema massa-mola.

A ideia inicial era, para cada um desses exemplos, verificar o valor de μ para $[D \ G \ K] = [0 \ 0 \ 0], [1 \ 1 \ 1], [2 \ 2 \ 2] \dots [10 \ 10 \ 10]$. Entretanto, os exemplos integrador duplo e massa mola precisam de controladores de no mínimo ordens 1 e 2, respectivamente,

para estabilizar o sistema nominal. Portanto, nesses dois casos não podemos admitir, por exemplo, $[D \ G \ K] = [0 \ 0 \ 0]$. Por isso, nos exemplos integrador duplo e massa mola, iremos verificar o valor de μ inicialmente para $[D \ G \ K] = [1 \ 0 \ 0]$ e $[D \ G \ K] = [2 \ 0 \ 0]$, respectivamente e, em seguida, iremos aumentar a ordem de todos os blocos gradativamente, verificando o comportamento do valor singular estruturado. Isso significa que o próximo valor de μ a ser verificado será, nesses dois casos, para $[D \ G \ K] = [2 \ 1 \ 1]$ e $[D \ G \ K] = [3 \ 1 \ 1]$ respectivamente. Já o exemplo massa-mola-amortecedor admite um controlador de ordem zero estabilizante e, por isso, sua análise procederá de acordo com a ideia inicial.

Além disso, para colocarmos o resultado dos três exemplos no mesmo gráfico, iremos utilizar o valor de μ normalizado em porcentagem relativa ao valor inicial, onde os multiplicadores D, G possuem ordem zero. A FIG 4.16 apresenta o comportamento do valor singular estruturado em função da ordem dos blocos multiplicadores e do controlador. O algoritmo foi executado recursivamente para 100 condições iniciais diferentes.

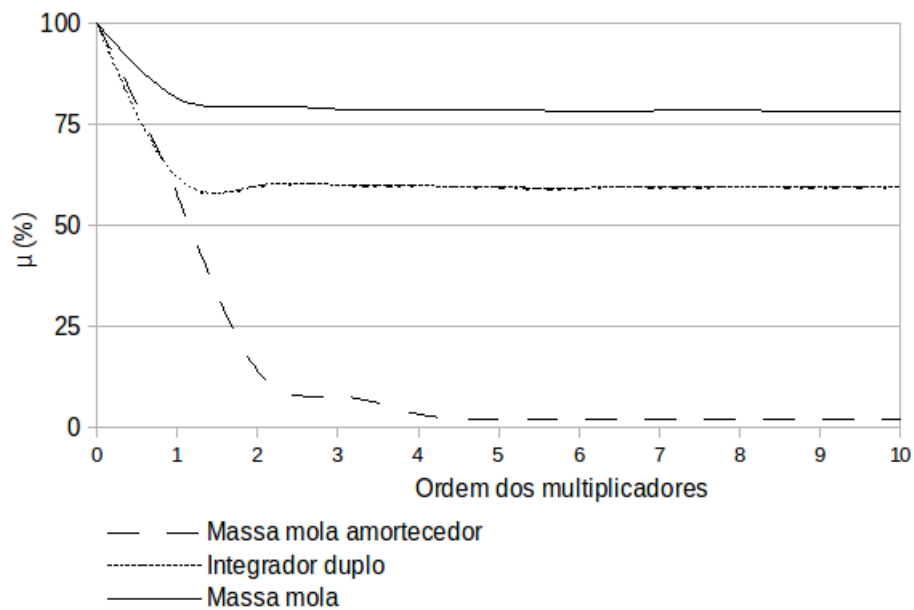


FIG. 4.16: Comportamento de μ em função da ordem (D, G, K)

Analisando a FIG. 4.16, percebemos que o valor de μ decai bastante inicialmente, conforme aumentamos a ordem dos blocos sintonizáveis. Entretanto, esse decaimento cessa rapidamente de maneira que ordens acima de 4 não estão acrescentando vantagem alguma. Além disso, ordens elevadas demandam um aumento significativo no tempo de

processamento, conforme podemos verificar na FIG. 4.17.

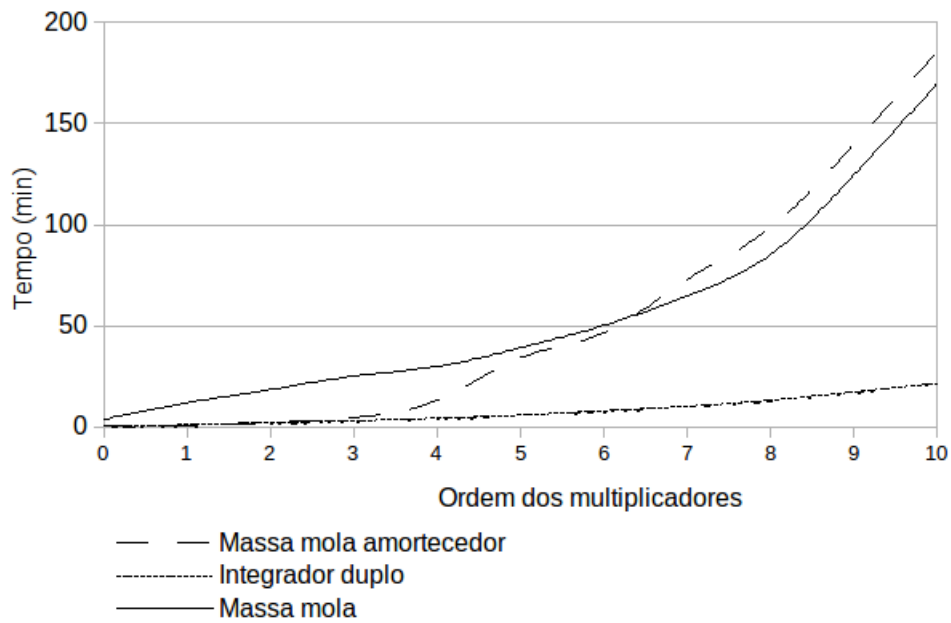


FIG. 4.17: Tempo de processamento em função da ordem (D, G, K)

O exemplo da seção 4.1, planta levemente amortecida, não foi usado nesta análise, pois a minimização do valor singular estruturado convergiu para o mínimo global já na ordem 0 dos blocos D, G e K . O exemplo da seção 4.3, míssil assimétrico, também não foi usado pois existe restrição na estrutura parametrizada do controlador. Finalmente, o exemplo da seção 4.6, míssil simétrico, não foi usado nesta análise, pois a ordem dos multiplicadores é fixa e igual a zero.

5 CONCLUSÃO

A última seção do capítulo 3 representa a parte de maior relevância, uma vez que contém o desenvolvimento do método de síntese proposto. Dentro desse método, a aproximação do bloco complexo j para uma função de transferência a coeficientes reais não degradou a precisão do limite superior do SSV, fato este que foi observado em todas as aplicações numéricas, onde, para os blocos D, G, K resultantes, verificamos que $\|DND^{-1} + \tilde{J}(s)G\|_\infty \approx \max_{\omega} \bar{\sigma}(DND^{-1} + jG)$.

Em vista do capítulo 4, concluímos que para os exemplos apresentados a Síntese DjG é eficiente frente à técnica de iteração $D - G - K$ quando são utilizados controladores de ordem reduzida. Isso pode ser verificado nas tabelas comparativas, constante no final de cada exemplo. Entretanto, os critérios de comparação foram somente a robustez e a ordem do controlador, a despeito do tempo de processamento. Esse último critério não foi objeto de comparação, pois na Síntese DjG utilizamos um número arbitrário de condições diferentes de inicialização do algoritmo de minimização, o que levou a um tempo de processamento arbitrário. A comparação de tempo de processamento só seria possível se a Iteração $D - G - K$ usasse um método de minimização que também precisasse ser reinicializado em diferentes condições iniciais, o que não ocorre.

Já o método de síntese (APKARIAN, 2011) utiliza a mesma técnica de minimização, o que permitiu a comparação desse critério. De fato, pudemos verificar que a Síntese DjG também é eficiente frente a esse método nos aspectos de robustez, ordem do controlador e tempo de processamento, além de ser uma técnica mais geral, pois também pode ser aplicada em síntese mista onde o número de blocos complexos $m_c + m_C$ é maior que 1.

Como a iteração $D - G - K$ também resulta de uma minimização, uma possibilidade a ser estudada seria substituir a minimização biconvexa desse método pela minimização não diferenciável (APKARIAN, 2006b) e verificar se ocorrem melhoras no resultado.

Outro aspecto a ser estudado relativo ao algoritmo de minimização seria a possibilidade de algumas condições iniciais serem abandonadas no início do processo de minimização, levando-se em conta o valor inicial da norma H_∞ e sua taxa inicial de decaimento. Isso poderia economizar um tempo considerável de processamento, pois evitaria as frequentes minimizações que, por partirem de condições iniciais desfavoráveis, atingem mínimos

locais ineficazes. Talvez isso seria mais simples do que desenvolver algum método que forneça as condições iniciais mais adequadas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- APKARIAN, P. **Nonsmooth μ synthesis**. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 21(13):1493–1508, 2011. ISSN 1099-1239.
- APKARIAN, P. e NOLL, D. **IQC analysis and synthesis via nonsmooth optimization**. Systems & Control Letters, 55:971–981, 2006a.
- APKARIAN, P. e NOLL, D. **Nonsmooth H_∞ synthesis**. IEEE Transactions Automatic Control, 51:71–86, 2006b.
- BARROS, D., FEKRI, S. e ATHANS, M. **Robust mixed- μ synthesis performance for mass-spring system with stiffness uncertainty**. Mediterrean Conference on Control and Automation in Proceedings IEEE International Symposium, págs. 743–748, 2005.
- BEDROSIAN, S. Elliptic functions in network synthesis. *Journal of the Franklin Institute*, 271:12–30, 1961. ISSN 0016-0032.
- BHATIA, R. **Matrix Analysis**. Springer, 1997.
- DOYLE, J. Guaranteed margins for lqg regulators. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 23(4):756–757, 1978. ISSN 0018-9286.
- FAN, M., TITS, A. e DOYLE, J. **Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics**. IEEE Transactions Automatic Control, 36(1):25–38, 1991.
- KAO, C.-Y., MEGRETSKI, A. e JÖNSSON, U. Specialized fast algorithms for IQC feasibility and optimization problems. *Automatica*, 40(2):239 – 252, 2004. ISSN 0005-1098.
- NICHOLS, R. A., REICHERT, R. T. e RUGH, W. J. **Gain scheduling for H_∞ controllers: a flight control example**. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1:69–79, 1993.
- PELLANDA, P. C. **Commande de Systèmes Instationnaires: Séquencement de Compensateurs et Commande LPV**. Tese de Doutorado, ENSAE, 2001.
- REICHERT, R. T. **Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles**. IEEE Control Systems Magazine, 12:35–42, 1992.
- ROTEA, M. e IWASAKI, T. An alternative to the d-k iteration? Em *American Control Conference, 1994*, volume 1, págs. 53–57 vol.1, 1994.
- SHAMMA, J. S. **Robust stability with time-varying structured uncertainty**. IEEE Transactions on Automatic Control, 39:714–724, 1994.

- SKOGESTAD, S. e POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. John Wiley & Sons, 2005.
- TOKER, O. e OZBAY, H. On the np-hardness of the purely complex mu; computation, analysis/synthesis, and some related problems in multidimensional systems. Em *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, volume 1, págs. 447–451 vol.1, 1995.
- WISE, K. Optimizing singular value robustness measures in a conventional bank-to-turn missile autopilot design. Em *Proceedings of the AIAA GNC Conference*, págs. 296–306, 1988.
- WISE, K. A comparison of six robustness tests evaluating missile autopilot robustness to uncertain aerodynamics. Em *American Control Conference, 1990*, págs. 755–763, 1990.
- YOUNG, P. M. **Controller design with real parametric uncertainty**. International Journal of Control, 65:469–509, 1996.
- YOUNG, P. e ASTROM, K. mu; meets bode. Em *American Control Conference, 1994*, volume 2, págs. 1223–1227 vol.2, 1994.
- ZHONG, Q.-C. spectral factorization of regular para-hermitian transfer matrices. *Automatica*, 41(7):1289 – 1293, 2005. ISSN 0005-1098. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109805000695>.
- ZHOU, K., DOYLE, J. C. e GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.