

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

EDUARDO FELIPE MENDONÇA DE MENEZES

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ESTRUTURADOS ROBUSTOS A
INCERTEZAS MISTAS**

**Rio de Janeiro
2015**

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

EDUARDO FELIPE MENDONÇA DE MENEZES

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ESTRUTURADOS ROBUSTOS A
INCERTEZAS MISTAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Alberto Mota Simões

Rio de Janeiro
2015

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

621.3 Menezes, Eduardo Felipe Mendonça de
M543s Síntese de Controladores Estruturados Robustos a Incertezas Mistas / Eduardo Felipe Mendonça de Menezes; orientado por Alberto Mota Simões - Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2015.

84 p.: il.

Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia - Rio de Janeiro, 2015.

1. Curso de Engenharia Elétrica – teses e dissertações.
2. Controle Robusto. 3. Valor Singular Estruturado. I. Simões, Alberto Mota. II. Título. III. Instituto Militar de Engenharia.

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

EDUARDO FELIPE MENDONÇA DE MENEZES

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ESTRUTURADOS ROBUSTOS A
INCERTEZAS MISTAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Alberto Mota Simões

Aprovada em 26 de agosto de 2015 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Alberto Mota Simões - D.Sc. do IME - Presidente

Prof. Josiel Alves Gouvêa - D.Sc. do CEFET/RJ

Prof. Paulo César Pellanda - D.Sc. do IME

Prof. Antonio Eduardo Carrilho da Cunha - D.Sc. do IME

Rio de Janeiro
2015

AGRADECIMENTOS

Ao Exército Brasileiro, por ter me acolhido no Instituto Militar de Engenharia. À CAPES pela bolsa de estudos que viabilizou este curso de Mestrado. Ao Governo Brasileiro pelo incentivo à educação.

Ao meu orientador, Alberto Mota Simões. Sem sua competência não teria chegado ao fim desta etapa. Muito obrigado por ser este grande motivador, por toda a dedicação e compreensão. Aos membros da banca examinadora, por suas valiosas contribuições.

Ao professor Geraldo Magela Pinheiro Gomes, grande responsável pelo meu ingresso no IME. Sua forma de tornar o aprendizado algo simples sempre me inspirou. Aos professores e servidores da Seção de Engenharia Elétrica, por suas contribuições para o sucesso deste trabalho.

Aos amigos e colegas pelos estudos, conselhos e precioso auxílio durante o período em que convivemos. Em especial ao grande amigo e autarquia Mauro Vasconcellos.

À minha família, por todo apoio e compreensão. À minha vó, por sua infinita fé no sucesso.

À Paula, pelo amor, respeito e companheirismo. Pelas críticas e pelo apoio incondicional. Por repetidamente me convencer de que eu poderia vencer a mim mesmo.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	7
LISTA DE TABELAS	8
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	9
1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Contexto e Motivação	13
1.2 Objetivo do Trabalho	14
1.3 Organização do Trabalho	15
2 FUNDAMENTOS DE CONTROLE ROBUSTO	17
2.1 Representação de Sistemas Incertos	17
2.1.1 Exemplo de Decomposição LFT	19
2.1.2 Estrutura $M - \Delta$	20
2.2 Tipos de Incertezas	20
2.3 Análise de Robustez	23
2.4 Estrutura da Incerteza	24
2.5 Valor Singular Estruturado	26
2.6 Robustez em Desempenho	30
2.7 Síntese- μ	34
2.7.1 Síntese por Iteração $D - K$	35
2.7.2 Síntese por Iteração $D, G - K$	37
2.7.3 Síntese- μ não-diferenciável	39
3 SÍNTESE DE CONTROLADORES ESTRUTURADOS ROBUSTOS A IN- CERTEZAS MISTAS	41
3.1 Análise de robustez via limitante superior para μ	41
3.2 Uma nova condição de estabilidade robusta	45
3.3 Síntese- μ mista - WD	48
4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS	51
4.1 Problema de Controle de uma Planta Levemente Amortecida com Incertezas Paramétricas	52

4.1.1	Apresentação do Problema	52
4.1.2	Resultados	53
4.2	Integrador Duplo	55
4.3	Controle de um Sistema Massa-Mola-Amortecedor	57
4.3.1	Apresentação do Problema	57
4.3.2	Resultados	60
4.3.2.1	Síntese- μ Complexa	60
4.3.2.2	Síntese- μ Mista	62
4.4	Estabilização Robusta de um Foguete	64
5	CONCLUSÃO GERAL	71
5.1	Resumo da Contribuição	71
5.2	Sugestões e Perspectivas Futuras	72
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73
7	APÊNDICES	75
7.1	Conceitos de Álgebra Linear Utilizados	76
7.1.1	Valores Singulares de Matrizes	77
7.1.2	Propriedades de Determinantes de Matrizes	78
7.2	Desenvolvimento algébrico detalhado	80
7.3	Demonstrações dos Lemas e Teoremas	82
7.4	Funções Sensibilidade e Sensibilidade Complementar	84

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Estrutura $N\Delta$	18
FIG.2.2	Representação da transferência $P'(s)$ em diagrama de blocos	19
FIG.2.3	Estrutura $M\Delta$	20
FIG.2.4	Uso de multiplicador D comutável com Δ	25
FIG.2.5	Estrutura $G\hat{\Delta}$	32
FIG.2.6	Δ_P incluso na estrutura $N\Delta$	32
FIG.2.7	Estrutura $N\hat{\Delta}$	33
FIG.2.8	Configuração geral de controle	35
FIG.3.1	Translações do multiplicador D	47
FIG.4.1	Estrutura de controle com canal de desempenho para o sistema integrador duplo	56
FIG.4.2	Sistema massa-mola-amortecedor	57
FIG.4.3	Interconexão para síntese do controlador	57
FIG.4.4	Diagrama de Bode para dinâmica não-modelada	59
FIG.4.5	Diagrama de Bode da planta para 20 amostras de k_1	60
FIG.4.6	Amostras do valor incerto k_1 (real <i>versus</i> complexo)	61
FIG.4.7	Interconexão em malha fechada para a síntese μ	66
FIG.4.8	Diagrama de Nyquist de $L(j\omega)$	69
FIG.4.9	Resposta em frequência de $T_K(s)$	69
FIG.4.10	Diagrama de Bode de $K_{31}(s)$	70

LISTA DE TABELAS

TAB.2.1	Comparativo resumido das características das técnicas de síntese- μ	40
TAB.4.1	Resultados para diferentes ordens de controladores (K)	54
TAB.4.2	Análise do desempenho robusto do sistema em malha fechada	56
TAB.4.3	Limites de μ obtidos na síntese WD	63
TAB.4.4	Valor de γ para a síntese WD	68

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

dim	-	dimensão
DN	-	Desempenho Nominal
DR	-	Desempenho Robusto
DVS	-	Decomposição em Valores Singulares
EN	-	Estabilidade Nominal
ER	-	Estabilidade Robusta
EQ(s)	-	Equação(ões)
FIG(s)	-	Figura(s)
LFT	-	<i>Linear Fractional Transformation</i>
LMI	-	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LTI	-	<i>Linear Time-Invariant</i>
TAB	-	Tabela
TEO(s)	-	Teorema(s)

SÍMBOLOS

\triangleq	-	igual, por definição
\forall	-	para todo
\Rightarrow	-	se, então
\Leftrightarrow	-	se, somente se
\mathbb{R}	-	conjunto dos números reais.
\mathbb{C}	-	conjunto dos números complexos.
$A_{m \times n}$	-	matriz de m linhas e n colunas.
$\Re(A)$	-	parte real de uma matriz A .
$\Im(A)$	-	parte imaginária de uma matriz A .
I_n	-	matriz identidade de ordem $n \times n$
$\bar{\lambda}(A)$	-	maior autovalor da matriz A .
$\det(A)$	-	determinante da matriz A .
ρ	-	raio espectral
σ	-	valor singular

$\bar{\sigma}$	-	maior valor singular
$\underline{\sigma}$	-	menor valor singular
μ	-	valor singular estruturado
$\mu_{\Delta}(M)$	-	o valor singular estruturado (μ) de uma matriz M dado um conjunto de incertezas Δ .
k_m	-	margem de robustez.
A^{-1}	-	inversa de uma matriz quadrada A .
$A > 0$	-	a matriz A é positiva definida.
$A \geq 0$	-	a matriz A é positiva semidefinida.
$A < 0$	-	a matriz A é negativa definida.
$A \leq 0$	-	a matriz A é negativa semidefinida.
$\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$	-	matriz bloco diagonal tendo M_i como i -ésimo bloco.
λ_i	-	i -ésimo autovalor.
$\min S,$ $\max S$	-	menor, maior elemento de um conjunto S não vazio, desde que tal elemento exista.
norma H_{∞}	-	máximo valor singular no domínio da frequência.
$\ T(s)\ _{\infty}$	-	norma H_{∞} da matriz de transferência $T(s)$.
ω	-	frequência em rad/s.
$\partial \mathbf{B}$	-	círculo unitário.
$\mathbf{B}\Delta$	-	Conjunto das matrizes de transferência $\Delta(s)$ com norma H_{∞} limitada em 1.
m_r, m_c e m_C	-	número de blocos escalares reais repetidos, escalares complexos repetidos e complexos cheios, respectivamente.
m	-	número total de blocos ($m = m_r + m_c + m_C$).
$A \star B$	-	operador LFT entre as matrizes A e B . Este operador é um caso particular do produto estrela de Redheffer.
A^T	-	transposta da matriz A .
A^*	-	transposta conjugada (ou transconjugada) da matriz A .
\mathcal{F}_u	-	LFT superior
\mathcal{F}_l	-	LFT inferior
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	-	representação de um sistema em espaço de estados pelas matrizes A, B, C e D .

RESUMO

Em um contexto onde não há técnicas com soluções ótimas para o problema de síntese robusta, as técnicas atuais apresentam consideráveis vantagens e desvantagens. Aquelas capazes de produzir controladores estruturados não tratam incertezas mistas, e vice-versa. Almejando combinar estas duas características em uma só técnica, uma nova técnica de síntese de controladores sujeitos a restrições de estrutura e robustos contra incertezas tanto paramétricas quanto dinâmicas é apresentada, a síntese WD . A ferramenta proposta baseia-se no limite superior do valor singular estruturado (μ) e representa uma extensão para o caso de incertezas mistas de uma técnica de síntese- μ real via otimização não-diferenciável introduzida recentemente. Ao oferecer certificado de otimalidade local e permitir a imposição de restrições estruturais sobre o controlador, a abordagem não-diferenciável supera as principais limitações de uma das mais populares técnicas de síntese- μ mista atualmente disponíveis, a iteração $D, G - K$. Sua eficiência é comprovada por resultados de aplicações numéricas.

ABSTRACT

In a context where there are no techniques providing optimal solutions for the robust synthesis problem, the current techniques present considerable advantages and disadvantages. Those capable of producing structured controllers do not address mixed uncertainties, and vice-versa. Aiming to combine those two features in a single technique, a new synthesis technique for controllers bound to structure restrictions and robust against uncertainties both parametric and dynamics is presented, the WD synthesis. The proposed tool is based on the upper limit of the structured singular value (μ) and represents an extension for the mixed uncertainties case of a real μ -synthesis technique via nonsmooth optimization recently introduced. By offering local optimality certificate and allowing the imposing of structural restrictions over the controller, the nonsmooth approach overcomes the major limitations of one of the most popular mixed- μ -synthesis techniques currently available, the $D, G - K$ iteration. Its efficiency is proved by results from numerical applications.

1 INTRODUÇÃO

No campo da engenharia, em especial nos problemas de projeto de sistemas de controle, o comportamento dos sistemas físicos reais é frequentemente descrito por modelos matemáticos. Infelizmente, por mais precisos que tais modelos sejam, a representação que fazem dos sistemas físicos é em geral imperfeita. Tais imprecisões no modelo tipicamente advêm do fato de que determinadas dinâmicas do sistema são de difícil representação ou pela presença de parâmetros com valores variantes ou indetermináveis com precisão. no entanto, as imprecisões também podem ser provocadas por simplificações introduzidas intencionalmente no modelo. Se por um lado a adoção de simplificações reduz a precisão obtida nos resultados, por outro lado reduz-se também a complexidade da tratativa numérica. Assim, simplificações podem ser intencionalmente introduzidas com base nesta relação entre o ganho na precisão e o custo computacional envolvido. Outra razão capaz de motivar simplificações propositais é a intenção de analisar um problema específico ao invés do todo.

As eventuais diferenças entre o modelo matemático e sistema físico real são denominadas incertezas. Em problemas realistas de projeto de controladores, um grande desafio é atender às especificações de projeto mesmo na presença de incertezas. A análise ou o projeto realizado com base somente em um modelo limitado às condições nominais é em geral inadequado quando existe significativo grau de incerteza nos parâmetros ou dinâmicas do modelo utilizado em relação ao sistema físico.

1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

A Teoria de Controle Robusto (ZHOU, 1996; SKOGESTAD, 2005) surgiu em decorrência da necessidade de se levar em consideração as incertezas inerentes aos modelos matemáticos. Os principais objetivos do controle robusto são possibilitar uma análise sistemática do problema de robustez em estabilidade e desempenho, e o desenvolvimento de técnicas de projeto que sejam capazes de tratar modelos com incertezas. Assim, no controle robusto leva-se em consideração não somente o modelo nominal, mas também o conjunto de incertezas que o afetam. Um sistema em malha fechada é, então, considerado robusto se satisfaz as especificações de estabilidade e desempenho para todas as incertezas admissíveis. A robustez do sistema de controle é questão de grande importância no controle por realimentação.

A maioria das ferramentas de análise robusta e de projeto de controladores robustos disponíveis

atualmente na literatura pode ser dividida em dois grupos. Um primeiro grupo de técnicas é baseado em formulações envolvendo funções de Lyapunov (BOYD, 1994). Nesse caso, o problema é em geral traduzido em termos de um programa de otimização envolvendo desigualdades matriciais lineares, ou LMI (do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Trata-se, então, de um programa de otimização convexo, dotado de certificado de otimalidade global. Outra vantagem da abordagem Lyapunov é que é possível incorporar ao problema de análise ou de projeto limites sobre a taxa de variação do parâmetro, levando assim a resultados menos conservadores. Infelizmente, uma limitação dessas técnicas é que nos problemas de projeto a convexidade das restrições é em geral preservada apenas se o controlador for não-estruturado, de ordem plena. Consequentemente, tais técnicas são incapazes de manipular restrições de estruturas sobre o controlador, restrições essas que estão inevitavelmente presentes em problemas realistas de projeto.

Um segundo grupo de técnicas baseia-se no domínio da frequência, dentre as quais destaca-se a síntese de controladores baseada no valor singular estruturado (μ), também conhecida como síntese- μ . O conceito do valor singular estruturado permite resumir a um valor numérico a margem de robustez de um sistema, sendo por este motivo uma reconhecida ferramenta de análise de robustez de sistemas incertos (ZHOU, 1996). Por outro lado, o conjunto de técnicas disponíveis para o emprego de μ na síntese de controladores robustos é mais restrito, especialmente se for considerado o caso mais geral, englobando todos os tipos de incertezas.

Dentre as técnicas de síntese propostas na literatura capazes de tratar todos os tipos de incertezas, a iteração $D, G-K$ (YOUNG, 1996) é uma das mais comumente utilizadas, apesar de apresentar importantes limitações. Primeiramente, a técnica não oferece nenhum certificado de otimalidade. Além disso, por ser baseada em uma síntese H_∞ de ordem plena, a iteração $D, G-K$ tende a fornecer controladores não-estruturados de ordem elevada. Consequentemente, torna-se geralmente mandatório o emprego *a posteriori* de uma técnica de redução de ordem.

A técnica de síntese- μ via otimização não-diferenciável introduzida recentemente em (APKARIAN, 2011) permite superar as duas limitações da iteração $D, G-K$ apontadas acima. Além de oferecer certificado de otimalidade local, a técnica permite que restrições estruturais sejam previamente impostas sobre o controlador. O grande ponto negativo desta síntese- μ é sua aplicabilidade limitada a apenas um tipo de incertezas, um aspecto que será explorado por esta dissertação.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Na síntese- μ não-diferenciável introduzida em (APKARIAN, 2011), a ordem e a estrutura do controlador são definidas previamente, bem como a ordem dos multiplicadores utilizados para o cálculo do limite superior de μ . O problema de síntese a ser solucionado envolve o projeto de um

controlador aumentado que engloba tanto o controlador quanto os multiplicadores. Esse problema de síntese, no qual o controlador e os multiplicadores são obtidos simultaneamente, é então resolvido por uma técnica local de otimização não-diferenciável. A utilização de uma técnica de otimização com certificado de otimalidade local é evidentemente menos ambiciosa do que abordagens globais. Porém, graças a eficácia numérica da técnica de otimização não-diferenciável, é possível resolver de forma eficiente problemas de projeto de controladores robustos envolvendo restrições de estrutura sobre o controlador. Graças ao certificado de otimalidade local, evita-se as terminações prematuras possíveis na iteração $D, G-K$.

O objetivo desta dissertação é encontrar uma técnica de síntese de controladores robustos que combine as características de convergência local, controladores estruturados e aplicabilidade a todos os tipos de incertezas. O método utilizado será uma extensão da técnica de síntese- μ não-diferenciável real introduzida em (APKARIAN, 2011) para o caso mais geral de incertezas, englobando assim todos os tipos possíveis. Esta técnica de síntese- μ foi selecionada como base para o trabalho por apresentar formas de evitar a maioria dos problemas atuais no campo de síntese- μ de controladores robustos. Será realizado um estudo sobre a mesma empregando ferramentas matemáticas que viabilizam uma alteração na estrutura a ser resolvida. Utilizam-se manipulações matemáticas nas estruturas dos blocos multiplicadores de forma a possibilitar a inclusão de incertezas inicialmente não tratáveis pela formulação original. A técnica resultante do processo é denominada síntese WD . A técnica de síntese proposta é em seguida testada em exemplos numéricos para sua validação. Almeja-se que a nova formulação permita que sejam superadas as supra-citadas limitações da iteração $D, G - K$ empregando a abordagem não-diferenciável para a síntese- μ .

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação é composta por quatro capítulos, além desta introdução, organizados na seguinte forma:

O capítulo 2 apresenta os fundamentos da teoria de controle robusto necessários ao trabalho. Inicialmente são definidos conceitos e representações das incertezas e modelos incertos na configuração geral de controle robusto. São introduzidos os tipos de incertezas e as suas características, e definidos os problemas de estabilidade e desempenho que a análise deverá tratar. É apresentado o conceito de valor singular estruturado, suas propriedades e aplicações. É demonstrado como a análise de desempenho pode ser realizada através de um problema equivalente de análise de estabilidade. Por fim, são brevemente apresentadas as técnicas de síntese- μ e as suas características.

O capítulo 3 retoma brevemente a síntese- μ não-diferenciável, e como a análise de robustez

via limite superior é desenvolvida. Este capítulo mostra os teoremas e os resultados matemáticos envolvidos na mudança de estrutura proposta por este trabalho. O desenvolvimento do método é demonstrado passo a passo até sua conclusão em um formato computacionalmente aplicável, a denominada síntese WD .

O capítulo 4 apresenta a aplicação da síntese WD proposta em exemplos numéricos, com o propósito de verificação da consistência e da capacidade da técnica apresentada. Os resultados são apresentados e comparados aos obtidos através das iterações $D - K$ e $D, G - K$.

O capítulo 5 traz a conclusão da contribuição do trabalho, realizada a partir dos resultados obtidos e as perspectivas futuras para o tema de síntese de controladores robustos.

2 FUNDAMENTOS DE CONTROLE ROBUSTO

Na maioria dos casos, a aplicação das ferramentas de análise e de projeto de controladores é baseada em modelos matemáticos que representam o sistema físico real. Os modelos matemáticos inevitavelmente apresentam discrepâncias em relação aos sistemas que devem representar. São denominadas **incertezas** todas as diferenças entre o modelo matemático e o sistema físico representado. Assim, as incertezas aparecem quando a representação matemática não reflete de maneira exata a realidade física.

O conceito de incertezas pode ser utilizado de modo a se evitar a aplicação de modelos matemáticos extremamente complexos, impossíveis de serem tratados computacionalmente. Além disso, é utilizado também no tratamento de sistemas nos quais valores de determinados parâmetros não são conhecidos de maneira precisa, ou que variam com o tempo.

A chamada Teoria de Controle Robusto trata dos sistemas representados por modelos com incertezas. No contexto desta teoria, foram desenvolvidas representações padronizadas para os modelos incertos e foram desenvolvidas técnicas associadas para analisar ou controlar tais modelos. Este capítulo expõe os elementos fundamentais da teoria existente atualmente nesta área. Uma abordagem mais completa e detalhada encontra-se em (ZHOU, 1996; SKOGESTAD, 2005).

2.1 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS INCERTOS

Nos processos de análise e síntese, é conveniente a adoção de uma representação padrão para o modelo incerto. Considere uma planta incerta qualquer cuja matriz de transferência é representada por $F(s) \in \mathbb{C}^{p \times q}$. Os sinais de entrada e saída de $F(s)$ definem o chamado canal de desempenho, e são respectivamente representados por $(w \in \mathbb{C}^p, z \in \mathbb{C}^q)$, dimensões compatíveis com as de $F(s)$.

Realiza-se uma decomposição na forma de uma Transformação Linear Fracionária (LFT, do inglês *Linear Fractional Transformation*), separando $F(s)$ em dois blocos. A decomposição é feita de forma que todas as incertezas presentes na planta sejam isoladas em um bloco $\Delta(s) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e o comportamento nominal da mesma seja representado em um bloco $N(s) \in \mathbb{C}^{(p+m) \times (q+m)}$.

$$F(s) \triangleq \Delta(s) \star N(s) \tag{2.1}$$

O operador (\star) denota em (2.1) a LFT entre Δ e N , e será usado para representar outras LFT's ao longo do texto. A LFT é um caso particular do produto estrela de Redheffer. Para uma

explicação detalhada sobre tais operações algébricas de matrizes, recomenda-se (HELMERSSON, 1995) como referência.

A estrutura da FIG. 2.1 mostra como as incertezas são representadas no modelo matemático para que sejam então tratadas pelo controle robusto.

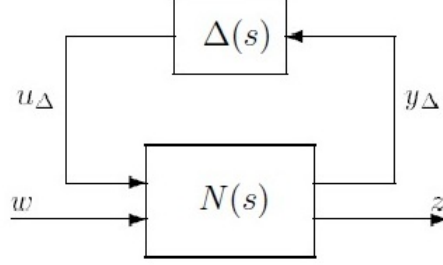


FIG. 2.1: Estrutura $N\Delta$

Nesse quadro de trabalho, o bloco $\Delta(s)$ concentra todas as incertezas afetando o sistema original, tais como incertezas paramétricas, dinâmicas negligenciadas ou não-modeladas, ou ainda uma incerteza fictícia como no caso da análise de robustez em desempenho via o Teorema Principal de Malha (PACKARD, 1993).

Os sinais de entrada e saída de $\Delta(s)$ definem o chamado canal de incerteza, e são respectivamente representados por $(y_\Delta \in \mathbb{C}^m, u_\Delta \in \mathbb{C}^m)$, dimensões compatíveis com as de $\Delta(s)$.

A matriz de transferência do modelo nominal é particionada na seguinte forma:

$$N(s) \triangleq \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad N_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m} \quad (2.2)$$

onde suas componentes têm dimensões compatíveis com os respectivos sinais de entrada e saída, conforme explicitado pela igualdade abaixo:

$$\begin{bmatrix} y_\Delta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\Delta \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Considerando a partição proposta para $N(s)$, a matriz de transferência $F(s)$ pode ser escrita na forma:

$$F(s) \triangleq \Delta(s) \star N(s) = N_{22}(s) + N_{21}(s)\Delta(s)(I - N_{11}(s)\Delta(s))^{-1}N_{12}(s). \quad (2.4)$$

2.1.1 EXEMPLO DE DECOMPOSIÇÃO LFT

Para ilustrar a separação das incertezas de uma planta incerta em um bloco isolado Δ , é demonstrado a seguir um exemplo simples desta decomposição. Neste exemplo, considere que os sinais e matrizes de transferência de nomes iguais aos já definidos nesta seção retêm também as dimensões correspondentes.

Considere um sistema mecânico massa-amortecedor, cujo sinal de entrada w é a força atuando sobre a massa m e o sinal de saída z , a posição da massa. O sistema é representado pela transferência $P(s)$ e o coeficiente de amortecimento por b . A equação característica da planta, obtida por meio das leis fundamentais da mecânica e já convertida para o domínio da frequência por meio da Transformada de Laplace é dada por $ms^2Z(s) + bsZ(s) = W(s)$. Separando a integral, obtém-se a transferência de primeira ordem $P'(s)$, que será usada neste exemplo:

$$P(s) = \frac{Z(s)}{W(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs} = \frac{1}{s} \times P'(s); \quad P'(s) \triangleq \frac{\frac{1}{m}}{s + \frac{b}{m}}. \quad (2.5)$$

Porém nesta planta há incerteza no parâmetro b , que será representada por:

$$b = \bar{b}(1 + r_b\delta_b). \quad (2.6)$$

Esta representação de incerteza paramétrica será detalhada em (2.15), na seção 2.2.

Usando esta representação para o parâmetro incerto b o diagrama em blocos da transferência $P'(s)$ é apresentado na FIG. 2.2. Note que, na estrutura em blocos, a parte incerta da planta é facilmente isolada, e os blocos restantes podem ser reagrupados compondo a parte nominal $N(s)$.

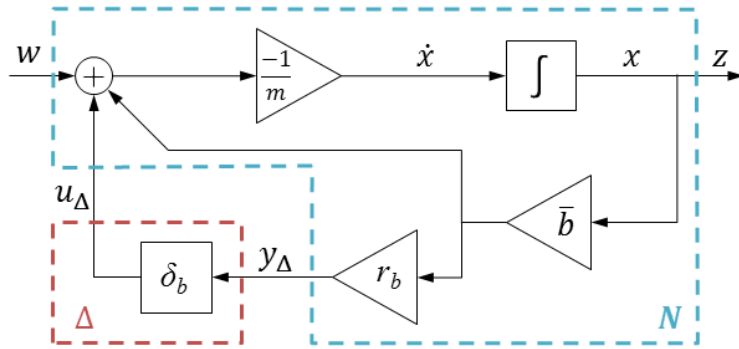


FIG. 2.2: Representação da transferência $P'(s)$ em diagrama de blocos

Neste exemplo, para reconstruir a parte nominal da planta será empregada a representação em espaço de estados. O ponto de partida é definir as equações de estado, as quais representam as as

derivadas dos estados (\dot{x}) e as saídas (y_Δ e z) em função dos estados (x) e das entradas (u_Δ e w):

$$\dot{x} = \frac{-1}{m}(\bar{b}x + u_\Delta + w), \quad (2.7)$$

$$y_\Delta = r_b \bar{b}x, \quad (2.8)$$

$$z = x. \quad (2.9)$$

E a representação em espaço de estados de $N(s)$ é obtida diretamente das equações de estado, concluindo assim a decomposição de $P'(s)$ em um bloco nominal $N(s)$ e um incerto $\Delta(s)$:

$$N(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{-1}{m}\bar{b} & \frac{-1}{m} & \frac{-1}{m} \\ \hline r_b\bar{b} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \Delta(s) = [\delta_b]. \quad (2.10)$$

2.1.2 ESTRUTURA $M - \Delta$

Havendo necessidade de se analisar somente a estabilidade do sistema incerto, o canal de desempenho pode ser desconsiderado, resultando na estrutura apresentada na FIG. 2.3. Define-se $M(s) \triangleq N_{11}(s)$, ou seja, a transferência direta da saída u_Δ para a entrada y_Δ das incertezas.

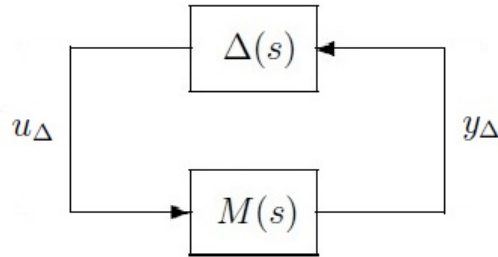


FIG. 2.3: Estrutura $M\Delta$

Para aliviar a notação, nas seções que seguem N representa $N(j\omega)$ para uma determinada frequência ω . O mesmo vale para as outras matrizes de transferência ao longo do texto.

2.2 TIPOS DE INCERTEZAS

As diferenças existentes entre o modelo matemático e o sistema físico real, chamadas de incertezas, podem ser classificadas em dois tipos: as paramétricas e as dinâmicas. As incertezas paramétricas estão associadas a parâmetros com valores que podem variar durante a operação ou que não podem ser precisamente determinados. Já as incertezas dinâmicas estão associadas às

dinâmicas do sistema negligenciadas ou não representadas no modelo matemático. Dinâmicas negligenciadas são aquelas intencionalmente removidas para simplificação do modelo, enquanto que as não-modeladas são aquelas que não puderam ser modeladas por alguma dificuldade, como por exemplo comportamentos de alta frequência ou não linearidades. A ocorrência dos dois tipos de incertezas em um mesmo sistema caracteriza incerteza mista. Exemplos que ilustram a ocorrência dos diferentes tipos de incertezas serão apresentados no capítulo 4, nas aplicações numéricas.

Na representação LFT do modelo incerto na FIG. 2.1 é conveniente estabelecer uma estrutura padrão para as incertezas, organizando-as em uma matriz que por construção é bloco-diagonal. Assim, ainda que individualmente as incertezas não possuam estrutura (sejam blocos complexos cheios), a representação global é inerentemente estruturada. Dependendo da natureza da incerteza, sua representação no bloco Δ será diferente, podendo assumir três formas distintas: reais escalares, complexas escalares ou complexas cheias. O bloco Δ combina estas três formas de incertezas em uma estrutura diagonal, na seguinte notação padronizada:

$$\Delta \triangleq \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_{m_r+1}^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_1^c I_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) \\ : \delta_i^r \in \mathbb{R}, \delta_i^c \in \mathbb{C}, \Delta_i^C \in \mathbb{C}^{k_{m_r+m_c+i} \times k_{m_r+m_c+i}} \} , \quad (2.11)$$

onde os números reais escalares (δ^r) estão associados às incertezas paramétricas e os números complexos escalares (δ^c) e os blocos complexos cheios (Δ^C) estão associados às incertezas dinâmicas. Os inteiros m_r , m_c e m_C denotam respectivamente o número de escalares reais, escalares complexos e blocos complexos cheios. O bloco de incertezas Δ é dito real se é composto somente por escalares reais, e puramente complexo se é composto somente por escalares complexos ou blocos complexos cheios. É dito misto se possui incertezas reais e complexas simultaneamente.

É comum assumir-se que cada incerteza individual em (2.11) é estável e normalizada, o que não restringe a aplicação da estrutura, já que é sempre possível representar qualquer planta incerta utilizando incertezas estáveis (LOPES, 2014). Nesse caso, para as incertezas com bloco cheio, assume-se que

$$\bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega, \quad (2.12)$$

onde Δ_i representa uma fonte específica de incerteza. Analogamente, para uma incerteza escalar complexa, tem-se $|\delta_i(j\omega)| \leq 1, \forall \omega$, e para uma incerteza escalar real, $-1 \leq \delta_i \leq 1$. Como o maior valor singular de uma matriz bloco-diagonal é igual ao maior dos maiores valores singulares dos

blocos individuais, tem-se então que, para Δ em (2.11),

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1, \forall \omega \quad \Rightarrow \quad \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1. \quad (2.13)$$

Desta forma, o conjunto normalizado de incertezas admissíveis pode ser representado por

$$\Delta \in \mathbf{B}\Delta := \{\Delta \in \Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}. \quad (2.14)$$

Incertezas paramétricas estão associadas à hipótese de que o parâmetro incerto está limitado a uma faixa de valores. Assim, um dado parâmetro incerto α_p limitado à faixa de valores $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ pode ser representado por:

$$\alpha_p = \bar{\alpha} (1 + r_\alpha \delta). \quad (2.15)$$

onde $\bar{\alpha}$ é o valor paramétrico médio, $r_\alpha \triangleq (\alpha_{max} - \alpha_{min}) / (\alpha_{max} + \alpha_{min})$ é a incerteza relativa no parâmetro e δ é um escalar real que satisfaz $|\delta| \leq 1$.

Um exemplo de normalização de incerteza paramétrica é demonstrado em 4.2, no capítulo 4 desta dissertação.

A fim de facilitar a aplicação das ferramentas de análise ou de projeto, uma abordagem possível consiste na substituição das diversas incertezas afetando o sistema por uma única incerteza sem estrutura representada por bloco de incertezas formado por uma matriz complexa cheia. De fato, para as ferramentas de análise ou de síntese, esse caso não-estruturado é bem mais simples de ser tratado do que o caso de bloco de incertezas estruturado. Por outro lado, os resultados são mais conservadores, já que são levadas em consideração incertezas dinâmicas fictícias que na realidade não acontecem no sistema. Em resumo, quanto maior a precisão na representação das incertezas, maior será a estrutura do bloco de incertezas $\Delta(s)$, que tenderá a se tornar uma matriz bloco-diagonal. Um bloco de incertezas estruturado representa com maior fidelidade as incertezas que realmente ocorrerão no mundo físico, evitando assim a tratativa de situações inexistentes. Por outro lado, a estrutura de $\Delta(s)$ adiciona complexidade no processo de análise ou de síntese.

A análise e a síntese de sistemas com incertezas mistas, compostas por incertezas paramétricas e dinâmicas são fundamentalmente mais difíceis do que em sistemas compostos unicamente por incertezas complexas. Sintetizar controladores robustos para sistemas com incertezas mistas continua a ser um problema muito desafiador até os dias de hoje (APKARIAN, 2011).

2.3 ANÁLISE DE ROBUSTEZ

A partir da interconexão $N\Delta$ apresentada na FIG. 2.1, podem-se definir os seguintes problemas de análise de estabilidade e desempenho, que comporão o presente quadro de trabalho (SKOGESTAD, 2005):

$$\text{Estabilidade Nominal (EN)} \Leftrightarrow N \text{ é internamente estável}; \quad (2.16)$$

$$\text{Desempenho Nominal (DN)} \Leftrightarrow \|N_{22}\|_{\infty} < 1; \text{ e EN}; \quad (2.17)$$

$$\text{Estabilidade Robusta (ER)} \Leftrightarrow F \text{ é estável, } \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta; \text{ e EN}; \quad (2.18)$$

$$\text{Desempenho Robusto (DR)} \Leftrightarrow \|F\|_{\infty} < 1, \forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta; \text{ e EN}. \quad (2.19)$$

Note que nos problemas envolvendo especificações de desempenho, utiliza-se como medida a norma \mathcal{H}_{∞} do canal de desempenho. As condições definidas para a estabilidade e desempenho nominais não dependem da parcela de incertezas do sistema, isoladas no bloco Δ . Já as condições de estabilidade e desempenho robustos devem atender todas as incertezas admissíveis.

Supondo que o sistema seja nominalmente estável, ou seja, que N seja estável, e também que o bloco Δ seja estável, nota-se a partir da EQ. (2.4) que a única fonte de instabilidade possível está no termo de realimentação $(I - N_{11}\Delta)^{-1}$. Então, quando há Estabilidade Nominal, a Estabilidade Robusta do sistema pode ser inferida pela estabilidade da estrutura $M\Delta$ na FIG. 2.3 com $M(s) \triangleq N_{11}(s)$. Desta forma, torna-se importante definir as condições para a verificação da estabilidade da estrutura $M\Delta$. O teorema a seguir apresenta uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema incerto. Pode ser aplicado a qualquer conjunto convexo de incertezas.

Teorema 2.1 (Condição de Estabilidade do Determinante (SKOGESTAD, 2005)). *Assuma que o sistema nominal $M(s)$ e o bloco de incertezas $\Delta(s)$ da FIG. 2.3 são estáveis. Considere o conjunto convexo de incertezas Δ de tal forma que, se Δ' é admissível, então $c\Delta'$ também o é, onde c é qualquer **real** escalar, tal que $|c| \leq 1$. Então, o sistema $M\Delta$ da FIG. 2.3 é estável para todo Δ admissível (ER) se e somente se:*

$$\text{O Diagrama de Nyquist de } \det(I - M\Delta(j\omega)) \text{ não envolve a origem, } \forall \omega, \forall \Delta \quad (2.20)$$

$$\Leftrightarrow \det(I - M\Delta(j\omega)) \neq 0, \forall \omega, \forall \Delta \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i(M\Delta) \neq 1, \forall i, \forall \omega, \forall \Delta. \quad (2.22)$$

O problema da aplicação do teorema acima é que seria necessário testar a condição de esta-

bilidade robusta para as infinitas incertezas admissíveis, o que seria um problema numericamente complexo.

2.4 ESTRUTURA DA INCERTEZA

Nesta seção, considere o caso especial no qual $\Delta(s)$ é não-estruturado, ou seja, uma matriz complexa cheia qualquer que satisfaça $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$. Para este caso, considere o seguinte lema:

Lema 2.1. (SKOGESTAD, 2005) *Seja Δ o conjunto de **todas** as matrizes complexas que satisfazem $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$. Então:*

$$\max_{\Delta} \rho(M\Delta) = \max_{\Delta} \bar{\sigma}(M\Delta) = \max_{\Delta} \bar{\sigma}(\Delta)\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}(M). \quad (2.23)$$

As demonstrações necessárias aos lemas e teoremas encontram-se na seção 7.3 do apêndice.

Ainda para o caso particular de incertezas não estruturadas, considere o seguinte teorema para a estabilidade robusta.

Teorema 2.2 (ER para incertezas não estruturadas (SKOGESTAD, 2005)). *Considere um sistema nominal $M(s)$ estável (EN) e um bloco de incertezas $\Delta(s)$ também estável. Então a estrutura $M\Delta$ mostrada na FIG. 2.3 é estável $\forall \Delta \in \mathbf{B}\Delta$ (isto é, tem-se ER) se e somente se*

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)) < 1, \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad \|M\|_{\infty} < 1. \quad (2.24)$$

Duas considerações sobre o teorema 2.2 devem ser feitas:

- A condição na EQ. 2.24 pode ser reescrita como:

$$ER \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\sigma}(M(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega, \forall \Delta. \quad (2.25)$$

A suficiência da EQ. 2.25 (\Rightarrow) decorre diretamente do teorema do pequeno ganho ao considerar $L = M\Delta$. O teorema do pequeno ganho é aplicável a qualquer norma que satisfaça $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

- Uma razão importante para o uso da norma H_{∞} para descrever a incerteza do modelo é que a condição de estabilidade na EQ. 2.25 é necessária e suficiente. Em contraste, o uso da norma H_2 não provê condições necessárias nem suficientes para a estabilidade. Não se tem a suficiência porque a norma H_2 em geral *não* satisfaz $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

O problema na aplicação do teorema 2.2 é que se trata de uma definição voltada para incertezas não-estruturadas. Havendo estrutura no bloco $\Delta(s)$, a EQ. 2.24 é apenas suficiente para a Estabilidade Robusta, resultando assim em uma condição conservadora. Como exposto anteriormente, incertezas estruturadas demandam uma complexidade maior na sua tratativa. Em contrapartida, os resultados são mais precisos e menos conservadores, já que não contemplam variações que nunca ocorrerão na planta.

No caso de incerteza estruturada, é possível reduzir o conservadorismo da condição de maior valor singular da EQ. 2.24 do teorema 2.2 utilizando-se de multiplicadores. A presença de multiplicadores estáveis e comutáveis com $\Delta(s)$ não afeta a estabilidade do sistema. Aplicando uma matriz multiplicadora D comutável com $\Delta(s)$ (tal que $\Delta D = D\Delta$), a estrutura $M\Delta(s)$ é alterada inserindo-se matrizes D e D^{-1} em ambos os lados, como mostrado na FIG. 2.4.

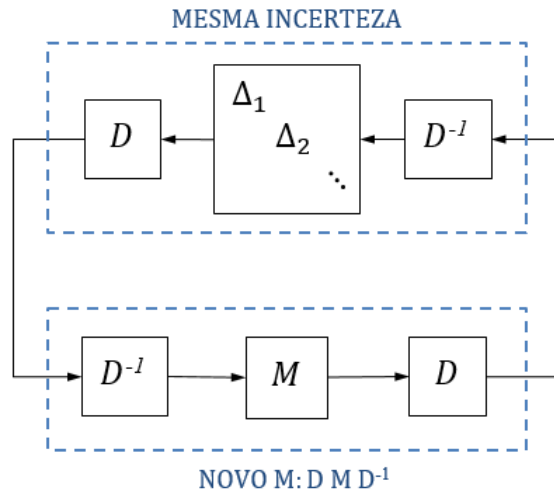


FIG. 2.4: Uso de multiplicador D comutável com Δ

Note que, como D comuta com Δ , então a parte superior da interconexão da FIG. 2.4 corresponde essencialmente o mesmo bloco Δ original. Como o reescalonamento não afeta a estabilidade, a condição de Estabilidade Robusta pode ser reescrita substituindo M por DMD^{-1} .

$$\text{ER se } \bar{\sigma}(DMD^{-1}) < 1, \forall \omega. \quad (2.26)$$

Na prática, a condição acima de estabilidade robusta pode ser formulada como um programa de otimização

$$\min_{D(\omega) \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(D(\omega)M(j\omega)D(\omega)^{-1}) < 1, \forall \omega, \quad (2.27)$$

onde \mathbf{D} é o conjunto de matrizes com estrutura compatível com o pré-requisito exigido: a comutabilidade de D com o bloco Δ .

No caso não-estruturado, ou seja, quando Δ é uma matriz cheia, pode-se então escolher $D = dI$ (onde d é um escalar), de modo que tem-se $\bar{\sigma}(DMD^{-1}) = \bar{\sigma}(M)$, sem prejuízo para o conservadorismo. Conforme a estrutura de Δ aumenta, o grau de liberdade para as possíveis estruturas de D comutáveis com Δ também aumenta. Desta forma torna-se possível a obtenção de um multiplicador D que resulte em $\bar{\sigma}(DMD^{-1})$ menor do que $\bar{\sigma}(M)$. Isto permite reduzir o conservadorismo do teste dado pela EQ. 2.24.

Como exemplo de multiplicadores D que comutam com Δ , considere a seguinte estrutura de incerteza:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 I_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 2}. \quad (2.28)$$

Nesse caso, o multiplicador D assume a forma

$$D = \begin{bmatrix} d_1 I_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad D_2 \in \mathbb{C}^{3 \times 3}. \quad (2.29)$$

Aplicando-se então o conceito dos multiplicadores estáveis e comutáveis com Δ ao teorema 2.2, a estrutura $M\Delta$ da FIG. 2.3 é portanto estável para todas as matrizes $\Delta(s)$ bloco-diagonais que satisfaçam a $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$, se

$$\min_{D(s) \in \mathbf{D}} \|D(s)M(s)D(s)^{-1}\|_\infty < 1. \quad (2.30)$$

2.5 VALOR SINGULAR ESTRUTURADO

O valor singular estruturado é uma grandeza característica denotada pela letra grega μ , e tem como objetivo quantificar a maior norma de incerteza à qual um sistema pode ser submetido sem que o mesmo atinja a instabilidade (DOYLE, 1982). O valor singular estruturado é uma função que provê uma generalização do maior valor singular e do raio espectral, concentrando em um único valor numérico o quanto a incerteza poderia ser aumentada até o limiar onde o sistema se tornaria instável para o caso de incerteza estruturada. É, desta forma, um indicador do quão robusto é um sistema.

A condição de estabilidade do determinante proposta pela EQ. 2.21 define se um sistema é estável ou não, mas não o quão próximo um sistema estável estaria da sua instabilidade. O conceito do valor singular estruturado parte da ideia de quantificar esta robustez, definindo uma grandeza capaz de sintetizar esta informação. A intenção é medir uma "margem de estabilidade robusta", que indicaria o quanto se pode aumentar a norma do bloco Δ de incertezas sem que isto provoque a instabilidade do sistema. Quanto maior for este valor, maior também é a estabilidade

robusta, já que seria necessária uma incerteza de norma maior para desestabilizar o sistema. O valor singular estruturado representa esta quantificação, e é definido a seguir:

Definição 2.1 (Valor Singular Estruturado μ (DOYLE, 1982)). *Seja M uma matriz complexa e seja Δ o conjunto de matrizes complexas com estrutura bloco-diagonal dada pela EQ. (2.11). A função real não-negativa $\mu(M)$, chamada de valor singular estruturado é definida por:*

$$\mu(M) \triangleq \left(\min_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0 \} \right)^{-1}, \quad (2.31)$$

onde $\bar{\sigma}(\Delta)$ denota o maior valor singular de Δ . Se não existe $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ tal que $\det(I - M\Delta) = 0$, então $\mu(M) \triangleq 0$.

Apesar de ser uma função de M , é importante ressaltar que o valor de μ também depende da estrutura de Δ . Se Δ é não-estruturado (matriz complexa cheia), o menor Δ que leva $(I - M\Delta)$ à singularidade possui $\bar{\sigma}(\Delta) = 1/\bar{\sigma}(M)$ e, portanto, $\mu(M) = \bar{\sigma}(M)$, conforme a demonstração do lema 2.1.

O valor singular estruturado foi introduzido em (DOYLE, 1982). Concomitantemente, em (SAFONOV, 1982) foi introduzida a *Margem de Estabilidade Multivariável* k_m para um sistema incerto diagonal, que acaba representando a inversa de μ , ou seja, $k_m(M) = \mu(M)^{-1}$. Em alguns aspectos, esta seria uma definição mais natural para margem de robustez. No entanto, $\mu(M)$ apresenta outras numerosas vantagens, como prover uma generalização do raio espectral $\rho(M)$ e da norma espectral $\bar{\sigma}(M)$ (SKOGESTAD, 2005). Para esta dissertação, k_m representará margem de estabilidade robusta.

Por exemplo, um valor $\mu = 1$ significa que existe uma incerteza com $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$ que é grande o suficiente para fazer com que $(I - M\Delta)$ seja singular. O valor singular estruturado está associado à menor incerteza desestabilizante. Como a definição é feita de forma inversa, note que um valor grande para μ indica que existe uma incerteza de norma pequena capaz de desestabilizar o sistema, tornando $(I - M\Delta)$ singular. Assim, valores reduzidos de μ indicam boa robustez.

É de grande importância ressaltar que, apesar das grandes vantagens que possam ser claramente observadas diante do conhecimento do valor singular estruturado, sua definição simples resulta numa grande complexidade no seu cálculo. A solução para contornar esta dificuldade ainda será abordada neste trabalho.

Duas propriedades de μ que valem tanto para incertezas reais como complexas são (SKOGESTAD, 2005):

- $\mu(\alpha M) = |\alpha| \mu(M)$, para qualquer escalar real α .

- Seja $\Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \Delta_2\}$ um conjunto bloco-diagonal de incertezas. Considere a partição da matriz M de acordo com as dimensões de Δ_1 e Δ_2 . Então:

$$\mu_\Delta(M) \geq \max\{\mu_{\Delta_1}(M_{11}), \mu_{\Delta_2}(M_{22})\}. \quad (2.32)$$

De fato, considere o $\det(I - \frac{1}{\mu}M\Delta)$ onde $\mu = \mu_\Delta(M)$ e use a fórmula de Schur (EQ. 7.11 no apêndice) com $A_{11} = I - \frac{1}{\mu}M_{11}\Delta_1$ e $A_{12} = I - \frac{1}{\mu}M_{22}\Delta_2$.

A segunda propriedade indicada acima revela que a característica de robustez em relação a duas incertezas tomadas juntas é, no mínimo, tão ruim quanto a pior incerteza considerada de forma independente. Ou seja, como era de se esperar, não é possível melhorar a estabilidade robusta incluindo-se mais incertezas no sistema.

Quando todos os blocos de Δ são complexos, o valor singular estruturado μ pode ser calculado com relativa facilidade (PACKARD, 1993). Tal afirmação se baseia principalmente no seguinte lema, o qual pode ser interpretado como uma outra definição de μ apenas para Δ complexo:

Lema 2.2. (SKOGESTAD, 2005) *Para incertezas complexas Δ com $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$:*

$$\mu(M) = \max_{\Delta, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1} \rho(M\Delta). \quad (2.33)$$

O lema acima decorre diretamente da definição de μ e da aplicação do raio espectral à EQ. 2.21. Deste lema decorrem algumas propriedades para μ no caso de incertezas complexas. Dentre elas serão apontadas quatro, significativas para este trabalho:

- Para uma incerteza complexa escalar repetida, tem-se:

$$\Delta = \delta I, \delta \in \mathbb{C} \Rightarrow \mu(M) = \rho(M). \quad (2.34)$$

Esse resultado decorre diretamente da EQ. 2.33 porque não há graus de liberdade para a maximização.

- Para uma incerteza complexa cheia, tem-se das EQs. 2.33 e 2.23:

$$\Delta \in \mathbb{C}^{m \times m} \Rightarrow \mu(M) = \bar{\sigma}(M). \quad (2.35)$$

- μ para incertezas complexas é limitado pelo raio espectral e pelo valor singular (norma espectral):

$$\rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M), \quad (2.36)$$

o que decorre das EQs. 2.34 e 2.35, já que $\Delta = \delta I$ admite o menor grau de liberdade possível para a otimização na EQ. 2.33, enquanto que um Δ cheio permite o máximo em graus de liberdade.

- **Limite superior aprimorado.** Definindo \mathbf{D} como o conjunto de matrizes D comutáveis com Δ e aplicando à EQ. 2.36 o conceito dos multiplicadores comutáveis apresentado na seção anterior, tem-se:

$$\mu(M) \leq \min_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}). \quad (2.37)$$

Este problema admite uma formulação convexa em D , ou seja, pode-se determinar um mínimo global. Apesar deste resultado ser caracterizado para incertezas complexas, este também permanece válido para incertezas reais ou mistas. Isto ocorre porque as incertezas complexas incluem as reais como um caso especial, especificamente para limites superiores. A inequação torna-se uma igualdade apenas em alguns casos especiais (MEINSMA, 1997). Entretanto, o pior exemplo conhecido na literatura apresenta um limite superior apenas 15% maior do que o valor exato de μ (BALAS, 1993).

Considere agora a motivação anteriormente proposta para a definição de μ , apresentada pela EQ. 2.21 que define a Estabilidade Robusta em uma condição simplesmente binária, de existência ou não, sem quantificar a sua margem de estabilidade. Introduzindo em (2.21) um fator k_m para mensurar sua margem, pode-se então escalonar Δ por k_m , e então testar a estabilidade até encontrar o menor fator k_m que satisfaça

$$\det(I - k_m M \Delta) = 0. \quad (2.38)$$

Pela própria definição de μ , decorre que $k_m = 1/\mu(M)$. Como esperado, a margem de estabilidade robusta é o inverso do valor singular estruturado.

Com a introdução do conceito do valor singular estruturado à condição de estabilidade, é possível se obter uma generalização do Pequeno Ganho Generalizado (ZHOU, 1996), que toma também em conta a estrutura de Δ .

Teorema 2.3 (Estabilidade Robusta para Estrutura Bloco-Diagonal de Incertezas (SKOGESTAD, 2005)). *Assuma que o sistema nominal $M(s)$ e o bloco de incertezas $\Delta(s)$ sejam estáveis. Então, a estrutura $M\Delta$ (FIG. 2.3) é estável para todo Δ admissível ($\Delta \in \mathbf{B}\Delta$), se e somente se,*

$$\mu_\Delta(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega. \quad (2.39)$$

Este teorema permitirá uma análise menos conservadora da robustez em estabilidade de um sistema. A informação da margem de robustez pode ser usada para melhorar a precisão de sínteses e análises de desempenho, como serão demonstrados a seguir.

Com o valor singular estruturado tem-se então uma análise de robustez que resulta não somente na informação de estabilidade ou não do sistema, mas efetivamente no quão distante se apresenta o sistema deste limiar entre instabilidade e estabilidade. Ao considerar o pior caso dos valores das incertezas envolvidas, o valor singular estruturado μ revela-se uma ferramenta de grande valor na análise de robustez em estabilidade e desempenho. Como se pode prever, esta é uma informação extremamente valiosa, pois apresenta de forma direta a margem dentro da qual uma síntese pode ser trabalhada. A maior exploração desta região resulta em maior precisão e menor conservadorismo nas aplicações.

Infelizmente, a determinação do valor μ não representa uma tarefa trivial e foi provado que, em geral, trata-se de um problema NP-difícil (TOKER, 1995; BLONDEL, 2000). Para o caso de incertezas puramente reais, até mesmo o cálculo de um valor aproximado de μ é um problema NP-difícil (FU, 1997a). A solução para contornar este problema é então empregar uma estimativa do valor singular estruturado. Na prática, para obtê-la é frequentemente empregado o cálculo de limites superiores e inferiores. A complexidade do cálculo direto do valor de μ atualmente inviabilizaria o uso de técnicas de análise e síntese com esta base, se não fossem empregados limitantes com determinação numericamente viável.

O limitante superior do valor singular estruturado é particularmente importante e mais frequentemente utilizado. Isto ocorre porque, de acordo com o teorema 2.3, é condição suficiente para estabilidade robusta que qualquer limitante superior de μ seja menor do que 1 para toda as frequências, para o caso normalizado. Ou seja, basta a demonstração de que o valor singular estruturado seja limitado superiormente. Note que, neste ponto, o uso de um limite superior muito distante de μ como estimativa do seu valor resulta em conservadorismo excessivo, desfazendo uma grande vantagem deste tipo de técnica. É necessária atenção à qualidade dos limites que serão utilizados.

2.6 ROBUSTEZ EM DESEMPENHO

Muitas vezes, a Estabilidade Robusta não é a única propriedade que precisa ser avaliada em um sistema em malha fechada. Na maioria dos casos, mesmo antes de se atingir a instabilidade, o desempenho em malha fechada pode degradar-se criticamente para uma dada incerteza admissível, comprometendo o funcionamento do sistema. A propriedade da Estabilidade Robusta nos garante que a instabilidade não será alcançada para a incerteza admissível, mas não faz outras garantias

sobre como o sistema se comporta enquanto estável. Em virtude disto, surge a necessidade de se realizar um teste de Desempenho Robusto que tenha como objetivo identificar o pior caso de degradação de desempenho associado a um determinado nível de incertezas.

Como demonstrado anteriormente, o valor singular estruturado é um indicador capaz de verificar a estabilidade robusta, com a vantagem adicional de determinar a margem de estabilidade. Porém, em grande parte das aplicações de controle não é suficiente garantir somente a estabilidade de um sistema, mas também se faz necessário atender a especificações de desempenho predeterminadas.

Apesar da síntese- μ avaliar somente a estabilidade de um sistema, com uma pequena adaptação a mesma técnica pode ser empregada para analisar também o desempenho robusto. Para isto o conjunto de incertezas Δ deve ser alterado de forma a conter as especificações de desempenho em seu interior. Estas especificações, do ponto de vista do valor de μ , funcionarão como incertezas adicionais da planta, fictícias. Uma análise de μ que indique estabilidade para este novo bloco de incertezas indica também que os parâmetros de desempenho foram atingidos. Este processo de inserção de parâmetros de desempenho no bloco de incertezas Δ será demonstrado a seguir. Antes, se faz necessário apresentar o Teorema Principal de Malha, que servirá de base para a mudança proposta.

Teorema 2.4 (Teorema Principal de Malha (PACKARD, 1993)). *Seja G a matriz complexa particionada da seguinte maneira:*

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}.$$

Suponha que existam 2 blocos com a estrutura diagonal definida pela EQ. (2.11), Δ_1 e Δ_2 , que são compatíveis com as dimensões de G_{11} e G_{12} , respectivamente. Considere a estrutura $\hat{\Delta}$ definida da seguinte maneira:

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 \in \mathbf{\Delta}_1, \quad \Delta_2 \in \mathbf{\Delta}_2. \quad (2.40)$$

Obtém-se, assim, a estrutura $G\hat{\Delta}$ representada na FIG. 2.5, similar à estrutura $M\Delta$.

Então, tem-se que

$$\mu_{\hat{\Delta}}(G) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu_{\Delta_1}(G_{11}) < 1, & e \\ \mu_{\Delta_2}(\mathcal{F}_u(G, \Delta_1)) < 1, & \text{com } \bar{\sigma}(\Delta_1) \leq 1. \end{cases} \quad (2.41)$$

O Teorema Principal de Malha embasa a junção de dois blocos de incertezas, demonstrando em

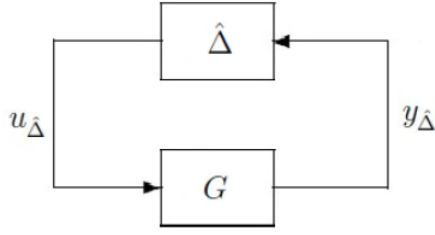


FIG. 2.5: Estrutura $G\hat{\Delta}$

(2.41) como a propriedade do valor singular estruturado definida em (2.32) é usada para realizar uma análise simultânea dos dois blocos.

Seja F decomposto na LFT entre Δ e N . O Desempenho Robusto pode ser então tratado por um caso especial de Estabilidade Robusta por meio da criação de um bloco fictício de incertezas Δ_P para representar as especificações de desempenho H_∞ (FIG. 2.6), onde Δ_P é uma matriz complexa cheia. Em modelos normalizados, Δ_P deve possuir norma H_∞ igual a 1.

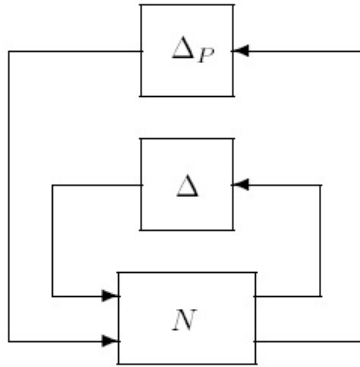


FIG. 2.6: Δ_P incluso na estrutura $N\Delta$

Define-se, então, o bloco de incertezas aumentado $\hat{\Delta}$, que reúne as incertezas originais e as fictícias que representam os parâmetros de desempenho,

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

Aplicando esta definição à estrutura da FIG. 2.6, tem origem a estrutura $N\hat{\Delta}$ na FIG. 2.7.

Por fim, o valor singular estruturado é aplicado, tratando a avaliação do desempenho robusto como um caso especial de estabilidade robusta. Os parâmetros de desempenho desejados ficam contidos dentro de Δ_P , e por fim são testados quando a estabilidade diante das incertezas do bloco total $\hat{\Delta}$ é avaliada.

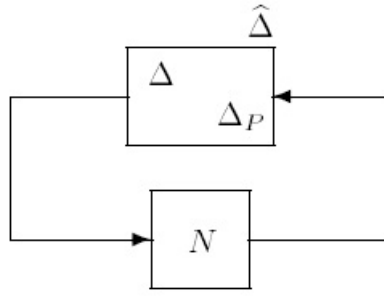


FIG. 2.7: Estrutura $N\hat{\Delta}$

Uma vez confirmada a estabilidade de um bloco de incertezas que contém não somente as incertezas da planta, mas também as suas especificações de desempenho, pode-se garantir que o desempenho desejado foi atingido. Assim $\mu_{\hat{\Delta}}(N)$ apresenta condições necessárias e suficientes para o teste da robustez em desempenho, de acordo com o teorema a seguir.

Teorema 2.5 (Desempenho Robusto como caso especial de Estabilidade Robusta (SKOGESTAD, 2005)). *Rearranje o sistema incerto na estrutura $N\hat{\Delta}$ da FIG.2.7. Assuma estabilidade nominal de tal forma que N seja (internamente) estável. Então*

$$\begin{aligned} DR &\Leftrightarrow \|F\|_{\infty} = \|\mathcal{F}_u(N, \Delta)\|_{\infty} < 1, \forall \Delta \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta} \\ &\Leftrightarrow \mu_{\hat{\Delta}}(N(j\omega)) < 1, \forall \omega. \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde μ está relacionado à estrutura

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix},$$

e Δ_P representa uma estrutura formada por um bloco de incertezas complexo cheio cuja dimensão é igual à de F^T .

A condição (2.43) acaba por verificar se $\|F\|_{\infty} < 1$ para todo $\Delta \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta}$ admissível sem a necessidade de realmente testar cada valor de Δ individualmente. A razão disto é que o valor singular estruturado μ é definido de forma a representar somente o pior caso de combinação de incertezas. Qualquer condição com esta base por consequência toma em conta somente esta pior combinação.

Usando a propriedade do valor singular estruturado descrita na EQ. (2.32) no bloco de incertezas aumentado $\hat{\Delta}$, tem-se que:

$$\underbrace{\mu_{\hat{\Delta}}(N)}_{DR} \geq \max\left\{ \underbrace{\mu_{\Delta}(N_{11})}_{ER}, \underbrace{\mu_{\Delta_P}(N_{22})}_{DN} \right\}, \quad (2.44)$$

onde $\mu_{\Delta_P}(N_{22}) = \bar{\sigma}(N_{22})$. Esta inequação demonstra que se o desempenho robusto é satisfeito ($DR \Leftrightarrow \mu(N) < 1$), então ambos o desempenho nominal ($DN \Leftrightarrow \bar{\sigma}(N_{22}) < 1$) e a estabilidade robusta ($ER \Leftrightarrow \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1$) também automaticamente serão. No entanto, a estabilidade nominal de N não é garantida, e deverá ser testada separadamente.

Neste ponto, torna-se interessante reescrever os problemas de análise de robustez, agora em função de μ :

$$\text{Estabilidade Nominal (EN)} \Leftrightarrow N \text{ é internamente estável}; \quad (2.45)$$

$$\text{Desempenho Nominal (DN)} \Leftrightarrow \bar{\sigma}(N_{22}) = \mu_{\Delta_P} < 1, \forall \omega, \text{ e EN}; \quad (2.46)$$

$$\text{Estabilidade Robusta (ER)} \Leftrightarrow \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1, \forall \omega, \text{ e EN}; \quad (2.47)$$

$$\text{Desempenho Robusto (DR)} \Leftrightarrow \mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1, \forall \omega, \text{ e EN}. \quad (2.48)$$

Note que a estabilidade nominal (ES) deve ser testada separadamente em todos os casos. Em acordo com a definição na EQ. 2.11, Δ é uma matriz bloco diagonal, com sua estrutura interna dependendo das incertezas representadas, enquanto que Δ_P é sempre uma matriz complexa cheia.

2.7 SÍNTESE- μ

Sintetizar um controlador robusto para incertezas estruturadas é uma tarefa em geral difícil, pois envolve um problema de otimização que não é convexo. De maneira intuitiva, pode-se inferir que o problema de síntese é no mínimo tão complexo quanto o de análise. Até o presente momento não existe uma solução de minimização global para o problema geral de síntese, mesmo para o caso puramente complexo.

A partir da demonstração de que μ se apresenta como uma ferramenta eficiente para a análise do desempenho robusto, surge a ideia de sua aplicação à síntese de controladores robustos. Note que, devido às limitações provocadas pelo cálculo de μ , todas as suas aplicações práticas decorrem na verdade do cálculo de seus limitantes. Alguns métodos de síntese- μ são menos ambiciosos ao envolver uma minimização apenas local, não garantindo assim a convergência global da otimização.

O quadro de trabalho para a síntese- μ é definido pela configuração geral de controle apresentada na FIG. 2.8. Assim como na estrutura $N\Delta$ da FIG. 2.1, estão conectados à planta de síntese nominal P os canais de incerteza (u_{Δ}, y_{Δ}) e de desempenho (w, z). O canal de controle é definido pelos sinais ($u \in \mathbb{C}^r, v \in \mathbb{C}^s$).

Como μ é, de fato, uma ferramenta de análise e não de síntese, a síntese- μ consiste na determinação de um controlador que cause os resultados desejados na análise. É, portanto, um processo

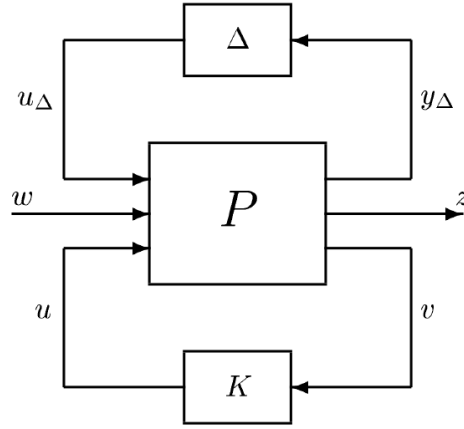


FIG. 2.8: Configuração geral de controle

de síntese iterativo: controladores são projetados seguindo algum critério definido e então testados. Suas performances são por fim avaliadas por meio da análise- μ . O resultado desta avaliação retorna ao início do processo, sendo empregado para afinar a precisão do controlador projetado. O objetivo é atingir um controlador que seja robusto para toda incerteza admissível, mas que não seja desnecessariamente conservador. Não é eficiente projetar um controlador capaz de estabilizar a planta para incertezas de norma muito superior a 1, já que tal condição nunca ocorrerá.

A LFT entre P e K é interpretada pela análise como o bloco N . Nas iterações que compoem a síntese, a análise é realizada não mais por $\mu_\Delta(N)$, mas sim por $\mu_\Delta(P \star K)$. Portanto, o problema da síntese- μ pode ser traduzido pelo programa de otimização

$$\min_K \mu_\Delta(P \star K). \quad (2.49)$$

O presente trabalho se baseia em abordagem via otimização não-diferenciável para resolver o problema de síntese- μ apresentado acima. Os resultados das aplicações numéricas são comparados aos obtidos por intermédio das clássicas iterações $D - K$ e $D, G - K$. No que se segue, essas três técnicas de síntese- μ são descritas de forma breve. As referências bibliográficas para cada processo estão indicadas.

2.7.1 SÍNTESE POR ITERAÇÃO $D - K$

Até o presente momento, não há método direto que permita sintetizar um controlador μ -ótimo. Para incertezas puramente complexas, um método bastante usado na literatura é a Iteração $D - K$ (YOUNG, 1996). Este método combina síntese H_∞ e análise- μ , e frequentemente provê bons resultados.

O ponto de partida é o limite superior de μ em termos do maior valor singular escalonado

$$\mu(N) \leq \min_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DND^{-1}). \quad (2.50)$$

A ideia é, então, encontrar o controlador que minimiza o valor de pico na frequência, deste limite superior:

$$\min_K \min_{D \in \mathbf{D}} \|DN(K)D^{-1}\|_{\infty}. \quad (2.51)$$

Isto é realizado através da minimização de $\|DN(K)D^{-1}\|_{\infty}$ em relação a K ou D . O processo age de forma alternada entre K e D , mantendo um fixo enquanto o outro é minimizado.

Para iniciar as iterações é selecionada uma matriz racional estável de transferência $D(s)$ inicial com estrutura apropriada. A matriz identidade é normalmente uma boa escolha inicial para D . A iteração $D - K$ procede então na seguinte forma (SKOGESTAD, 2005):

1. Passo – K. Sintetizar um controlador H_{∞} para o problema escalonado

$$\min_K \|DN(K)D^{-1}\|_{\infty}, \quad (2.52)$$

com $D(s)$ fixo.

2. Passo – D. Encontrar, para cada frequência, $D(j\omega)$ que minimize $\bar{\sigma}(DND^{-1}(j\omega))$ com N fixo.

3. Ajuste. Ajustar a magnitude de cada elemento de $D(j\omega)$ a fim de determinar a função de transferência $D(s)$ final que seja estável e de fase mínima, e retornar ao Passo 1.

A iteração pode continuar até que um desempenho satisfatório seja atingido, $\|DND^{-1}\|_{\infty} < 1$, ou até que a norma H_{∞} não decresça mais. O grande problema desta abordagem é que, apesar de cada passo de minimização ser convexo (Passo-D e Passo-K), a convexidade conjunta *não* é garantida. Portanto, as iterações podem convergir para ponto que não seja nem um ótimo local. No entanto, a experiência mostra que o método funciona bem na maioria dos casos.

A ordem do controlador resultante de cada iteração é igual à soma dos estados da planta, do número de estados das ponderações e do dobro do número de estados em $D(s)$. Na maioria dos casos, o controlador μ -ótimo não é racional, e por isso, de ordem infinita. Como um $D(s)$ de ordem finita é utilizado para aproximar os multiplicadores D , o resultado é um controlador de ordem finita, porém muito elevada.

2.7.2 SÍNTESE POR ITERAÇÃO $D, G - K$

A iteração $D - K$ considera todas as incertezas como complexas, o que provoca excesso de conservadorismo caso haja incertezas paramétricas no sistema. Para tratar as incertezas paramétricas como tal, é necessário usar um bloco multiplicador G com a estrutura correspondente. A iteração $D, G - K$ apresenta uma formulação do limite superior de μ mais complexa. Inicialmente, considere a seguinte proposição:

Proposição 2.1. (FAN, 1991) *Dada uma matriz M e uma estrutura Δ a ela associada*

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \min_{G \in \mathbf{G}_{\Delta}} \nu(M, G) \leq \bar{\sigma}(M),$$

onde

$$\nu(M, G) = \sqrt{\max \{0, \bar{\lambda} [M^*M + j(GM - M^*G)]\}}. \quad (2.53)$$

Usando este resultado, a iteração $D, G - K$ foi concebida a partir de uma condição de equivalência constante na seguinte proposição:

Proposição 2.2. (FAN, 1991; YOUNG, 1993) *Seja um real escalar $\beta > 0$, então*

$$\min_{D \in \mathbf{D}_{\Delta}, G \in \mathbf{G}_{\Delta}} F(D, G) \leq \beta^2 \quad (2.54)$$

\Leftrightarrow

$$\min_{D \in \mathbf{D}_{\Delta}, G \in \mathbf{G}_{\Delta}} \bar{\sigma} \left[\left(\frac{DMD^{-1}}{\beta} + jG \right) (I + G^2)^{-1/2} \right] \leq 1. \quad (2.55)$$

onde $F : \mathbf{D}_{\Delta} \times \mathbf{G}_{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$F(D, G) = \bar{\lambda} [M_D^* M_D + j(GM_D - M_D^* G)],$$

com $M_D = DMD^{-1}$, e

$$\mathbf{D}_{\Delta} \triangleq \{D = \text{diag}(D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I, \dots, d_{m_c} I) : D_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, \det(D_i) \neq 0, d_i \in \mathbb{C}^*\}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{G}_{\Delta} \triangleq \{G = \text{diag}(G_1, \dots, G_{m_r}, 0, \dots, 0) : G_i = G_i^* \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}\}. \quad (2.57)$$

Além disso, o mínimo em (2.54) existe se e somente se o mínimo em (2.55) também existe.

Considere agora o seguinte teorema:

Teorema 2.6. (FAN, 1991) Dada uma matriz qualquer M e uma estrutura Δ a ela associada,

$$\begin{aligned}\mu_{\Delta}(M) &\leq \min_{D \in \mathbf{D}_{\Delta}} \eta_{\Delta}(DMD^{-1}) \\ &\leq \min_{D \in \mathbf{D}_{\Delta}, G \in \mathbf{G}_{\Delta}} \nu(DMD^{-1}, G) \\ &\leq \min_{D \in \mathbf{D}_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1});\end{aligned}\tag{2.58}$$

De fato, pode-se escrever

$$\min_{D \in \mathbf{D}_{\Delta}, G \in \mathbf{G}_{\Delta}} \nu(DMD^{-1}, G) = \sqrt{\max \left\{ 0, \inf_{D \in \mathbf{D}_{\Delta}, G \in \mathbf{G}_{\Delta}} F(D, G) \right\}},\tag{2.59}$$

combinando a proposição 2.2 com o segundo limitante proposto em (2.58) e a Eq. (2.59), obtém-se a seguinte inequação:

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \min_{D \in \mathbf{D}_{\Delta}, G \in \mathbf{G}_{\Delta}} \min_{\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0} \left\{ \beta : \bar{\sigma} \left(\left(\frac{DMD^{-1}}{\beta} + jG \right) (I + G^2)^{-1/2} \right) \leq 1 \right\},\tag{2.60}$$

Visando obter robustez a uma determinada especificação de desempenho, esta inequação leva ao seguinte problema de síntese:

$$\begin{aligned}\text{minimize} & \quad \beta(\omega) \\ \text{sujeito a} & \quad \bar{\sigma} \left(\left(\frac{D(\omega)N(K,\omega)D^{-1}(\omega)}{\beta(\omega)} + jG(\omega) \right) (I + G^2(\omega))^{-1/2} \right) \leq 1 \\ & \quad \beta(\omega) \in \mathbb{R}, \beta(\omega) > 0 \\ & \quad D(\omega) \in \mathbf{D}_{\hat{\Delta}}, G(\omega) \in \mathbf{G}_{\hat{\Delta}} \\ & \quad K \text{ estabiliza o sistema nominal em malha fechada.}\end{aligned}$$

A síntese- μ é realizada de forma iterativa: para um K fixo, determina-se $D(\omega), G(\omega), \beta(\omega)$, o que é um problema de síntese mista baseada no limite superior de μ (similar à Eq. 2.60, mas através da frequência). Este é um problema convexo que pode ser resolvido de forma eficiente. Após determinar $D(\omega), G(\omega), \beta(\omega)$ para um intervalo de pontos na frequência, procuram-se matrizes de transferências reais racionais cuja resposta em frequência melhor se ajuste às curvas em função da frequência destas matrizes $D(\omega), G(\omega), \beta(\omega)$, de tal maneira que as interconexões sejam estáveis. De forma alternada, para matrizes de transferências fixas, agora denominadas de $D(s), G(s)$, e para um $\beta > 0$ fixo, o problema de se encontrar K será um problema de síntese H_{∞} , sendo também convexo e, portanto, pode ser resolvido de maneira eficiente. Isso irá resultar numa rotina biconvexa para o problema de síntese- μ mista, a iteração $D, G - K$.

Embora cada etapa seja individualmente convexa, o problema de otimização conjunto de $D(s), G(s)$ e $K(s)$ não é convexo. Portanto, essa técnica não garante encontrar o mínimo global, que é a solução ótima do problema. Também não há garantia de convergência para um mínimo local.

2.7.3 SÍNTESE- μ NÃO-DIFERENCIÁVEL

Com o intuito de superar as limitações da iteração $D, G - K$, em (APKARIAN, 2011) foi proposto um método para a síntese de controladores que encapsula os multiplicadores juntamente com o controlador, obtendo um controlador aumentado de estrutura especial. A síntese é então realizada de uma só vez, fixando previamente a ordem do controlador e dos multiplicadores. Esta técnica é denominada síntese- μ não-diferenciável.

Este método é aplicável a modelos incertos onde a estrutura da incerteza se restringe a

$$\Delta = \{ \text{bloco diagonal}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \Delta_P) : \delta_i^r \in \mathbb{R}, \Delta_P \in \mathbb{C}^{k_{m_r+1} \times k_{m_r+1}} \}, \quad (2.61)$$

onde Δ_P está associada às especificações de desempenho e k_{m_r+1} é igual à dimensão do canal de desempenho. Ou seja, a aplicação da técnica se restringe a problemas com somente incertezas reais, admitindo também um bloco fictício de desempenho.

Considere a seguinte desigualdade no domínio da frequência:

$$\bar{\lambda}[N^* D^* D N + j(D^* G D M - N^* D^* G D) - \alpha D^* D] < 0, \quad (2.62)$$

onde $N = (P \star K)$ e (D, G) são blocos dinâmicos que obedecem à condição $(D(j\omega), G(j\omega)) \in (\mathbf{D}_\Delta, \mathbf{G}_\Delta) \forall \omega$. A Inequação no Domínio da Frequência na Eq. 2.62 é uma condição suficiente para $\mu < \alpha$. Partindo, a ideia é atribuir inicialmente um valor elevado para α e, através de uma minimização, encontrar algum D, G e K que satisfaça essa condição. Trata-se de um problema de factibilidade, o qual verifica se é possível obter um controlador cujo valor singular estruturado seja menor que α . Caso isso seja possível, diminui-se o valor de α e verifica-se novamente a factibilidade. Tal procedimento é realizado inúmeras vezes por intermédio de um processo de bissecção até que não se consiga mais diminuir o valor de α .

A minimização do autovalor baseia-se no algoritmo de (KAO, 2004), cuja eficiência ainda precisa ser comprovada. Por outro lado, isso não ocorre quando a função de minimização é uma norma H_∞ . Tal característica possibilitou o desenvolvimento de uma técnica recente de síntese de controlador desenvolvida em (APKARIAN, 2006), a qual encapsula os blocos D, G e K em um controlador estruturado. Essa técnica obtém mínimos locais para a norma H_∞ de um determinado

sistema conectado ao controlador estruturado em malha fechada. Isso motivou o desenvolvimento de uma condição equivalente à EQ. 2.62:

$$\max \left\{ \|\mathcal{F}_l(P_w(s), K(s))\|_\infty, \left\| \mathcal{F}_l \left(P_m, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_\infty \right\} < 1, \quad (2.63)$$

onde \mathcal{F}_l representa uma LFT inferior, e os termos $P_w(s)$, $K(s)$, P_m , $W_1(s)$ e $W_2(s)$ estão detalhados em (APKARIAN, 2011). Estes blocos não são o foco deste trabalho porque um algoritmo de estrutura final semelhante será proposto no capítulo 3, porém apresentando blocos diferentes destes. O ponto mais importante a ser destacado é que neste caso a função a ser minimizada é uma norma H_∞ e não mais um autovalor. A função objetivo baseada em norma H_∞ é não-diferenciável.

Assim, o método sintetiza um controlador que minimiza o valor de α , satisfazendo a condição (2.63). Sendo tal α um limite superior de μ , o qual está relacionado à estrutura em (2.61), tal método é por natureza uma síntese- μ específica para sistemas com incertezas paramétricas cujo objetivo é obter um controlador que otimiza o nível de desempenho robusto.

O próximo capítulo traz o desenvolvimento de processos matemáticos usados para manipular a estrutura desta otimização de norma H_∞ , com o objetivo de adicionar à síntese- μ não-diferenciável a capacidade de tratar incertezas mistas, resultando na síntese WD proposta.

A TAB. 2.1 apresenta de forma resumida as características de cada técnica abordada, bem como as características almeçadas pela técnica introduzida por esta dissertação, a síntese WD .

TAB. 2.1: Comparativo resumido das características das técnicas de síntese- μ

Característica \ Técnica	$D - K$	$D, G - K$	não-dif. real	WD proposta
Incertezas tratadas	complexas	mistas	reais	mistas
É possível definir a estrutura do controlador?	não	não	sim	sim
Ordem do controlador (n_K)	elevada	elevada	reduzida	reduzida
Definição prévia de n_K	não	não	sim	sim
Rotina de minimização H_∞	alternada	alternada	integrada	integrada
Garantia de convexidade local	não	não	sim	sim

3 SÍNTESE DE CONTROLADORES ESTRUTURADOS ROBUSTOS A INCERTEZAS MISTAS

O objetivo principal do presente trabalho é apresentar um método matemático de manipulação dos blocos envolvidos na otimização proposta pela síntese- μ não-diferenciável real. O resultado é a generalização da síntese proposta por (APKARIAN, 2011) de modo que seu espectro de aplicação, antes restrito às incertezas paramétricas, passe a englobar incertezas também mistas. Uma das motivações para a escolha desta técnica é a restrição de estrutura que esta impõe ao controlador, característica não presente na iteração $D, G-K$. A capacidade de impor a estrutura ao controlador permite o seu uso em aplicações mais específicas ou restritas, como a síntese de controladores descentralizados ou baseados em observador, por exemplo. Além disto, o resultado normalmente é um controlador de ordem muito reduzida, quando comparado ao obtido pela iteração $D, G-K$.

3.1 ANÁLISE DE ROBUSTEZ VIA LIMITANTE SUPERIOR PARA μ

A análise de robustez via valor singular estruturado deve ser sempre baseada em um limitante superior, de modo a se evitar estimativas excessivamente otimistas da margem de estabilidade, com o mesmo raciocínio se aplicando na síntese de controladores robustos. O seguinte lema trata da determinação de um limitante superior para μ , e será usado como ponto de partida neste raciocínio.

Lema 3.1. (IWASAKI, 1995; FU, 1997b) *Suponha que exista uma matriz hermitiana Z tal que*

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}^* Z \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \Delta \in \frac{1}{\gamma} \mathbf{B}\Delta, \quad (3.1)$$

e que satisfaça

$$\begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}^* Z \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix} < 0. \quad (3.2)$$

Então, γ é um limite superior para $\mu_{\Delta}(M)$.

Desta forma, a determinação da matriz Z é suficiente para a obtenção de um limite superior para o valor singular estruturado. A maior liberdade na classe de multiplicadores oferecida no lema resulta na obtenção de limites menos conservadores. No entanto, o preço a ser pago é o fato de que a solução de Z representa um problema de dimensão infinita. Isto faz com que o teste apresentado no Lema 3.1 seja infelizmente de difícil aplicação direta, devido ao número infinito

de restrições dado pela inequação (3.1). Para aplicá-lo na prática será necessário antes restringir mais a estrutura do multiplicador. Diversas relaxações para (3.1) foram propostas na literatura, resultando em limitantes superiores computacionalmente tratáveis, embora ao preço de algum conservadorismo. Veja (SCHERER, 2006), por exemplo.

Uma relaxação para (3.1) bastante conhecida é a de (FAN, 1991), discutida a seguir. Considere novamente as classes de multiplicadores associadas a Δ , definidas em (2.56) e (2.57):

$$\mathbf{D}_\Delta \triangleq \{D = \text{diag}(D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I, \dots, d_{m_c} I) : D_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, \det(D_i) \neq 0, d_i \in \mathbb{C}^*\},$$

$$\mathbf{G}_\Delta \triangleq \{G = \text{diag}(G_1, \dots, G_{m_r}, 0, \dots, 0) : G_i = G_i^* \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}\}.$$

Note que as matrizes em \mathbf{D}_Δ comutam com $\Delta \in \Delta$, isto é, $D\Delta = \Delta D$. A partir de \mathbf{D}_Δ , define-se, também,

$$\mathbf{P}_\Delta \triangleq \{P = D^* D : D \in \mathbf{D}_\Delta\}. \quad (3.3)$$

Finalmente, considere a classe de multiplicadores

$$\mathcal{Z}_\gamma \triangleq \left\{ Z = \begin{bmatrix} -\gamma^2 P & jG \\ -jG^* & P \end{bmatrix} : P \in \mathbf{P}_\Delta, G \in \mathbf{G}_\Delta \right\}. \quad (3.4)$$

Para todo $Z \in \mathcal{Z}_\gamma$, a matriz $\begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}^* Z \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}$ é bloco-diagonal. Verificando-a para cada tipo de bloco diagonal, nota-se que é sempre positiva semidefinida, conforme mostrado a seguir:

- blocos de incerteza real:

$$z_j(-\gamma^2 P_j)z_j + z_j jG_j + jG_j^* z_j + P_j = P_j(-\gamma^2 z_j^2 + 1) \geq 0. \quad (3.5)$$

- blocos complexos repetidos:

$$\delta_j^*(-\gamma^2 P_j)\delta_j + P_j = P_j(-\gamma^2 |\delta_j|^2 + 1) \geq 0. \quad (3.6)$$

- blocos complexos cheios:

$$\Delta_j^*(-\gamma^2 p_j I)\Delta_j + p_j I = p_j(-\gamma^2 \Delta_j^* \Delta_j + I) \geq 0. \quad (3.7)$$

Conclui-se portanto que para todo multiplicador $Z \in \mathcal{Z}_\gamma$ a inequação (3.1) é automaticamente satisfeita.

Com a particularização $Z \in \mathcal{Z}_\gamma$, aceita-se um maior conservadorismo decorrente da restrição da classe de multiplicadores admissíveis em prol da tratabilidade computacional do cálculo do limitante superior para $\mu_\Delta(M)$.

Se $Z \in \mathcal{Z}_\gamma$, então a inequação (3.2) por sua vez reduz-se a

$$M^*PM + j(GM - M^*G) - \gamma P < 0. \quad (3.8)$$

No que se segue, a título de simplificação da apresentação, considerar-se-á o caso normalizado $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ correspondendo à seleção $\gamma = 1$.

Para maior conveniência na representação futura, serão definidas aqui as notações herm e sherm:

$$\text{herm}(X) \triangleq X + X^* \quad , \quad \text{sherm}(X) \triangleq X - X^* \quad . \quad (3.9)$$

A forma da condição (3.8) não é conveniente para a síntese de controladores, devido às operações de transposição e conjugação aplicadas sobre a planta. Tais operações reduzem a eficiência de minimizações numéricas. O desenvolvimento matemático proposto a seguir almeja atingir uma condição equivalente a (3.8), porém mais adequada ao problema de minimização da síntese (BALAKRISHNAN, 1995). Seja

$$W \triangleq \frac{1}{2}(P + jG), \quad P \in \mathbf{P}_\Delta, G \in \mathbf{G}_\Delta. \quad (3.10)$$

Note que a matriz W definida acima herda a propriedade de comutar com $\Delta \in \Delta$, além de ser positiva real, isto é, $P = \text{herm}(W) > 0$. Como toda matriz pode ser decomposta na soma de uma matriz Hermitiana e uma matriz anti-Hermitiana, W é composto pela seguinte parametrização:

$$P = \text{herm}(W) = (W + W^*), \quad jG = \text{sherm}(W) = (W - W^*). \quad (3.11)$$

O desenvolvimento a seguir envolve uma série de manipulações algébricas que foram omitidas para promover a fluidez na leitura e facilitar a compreensão do proposto. Entretanto, todas as operações realizadas estão devidamente detalhadas no apêndice, em (7.2).

Aplicando à EQ. 3.8 a parametrização de W proposta em (3.10), obtém-se a seguinte inequação:

$$[I + M^*]W[I - M] + [I - M^*]W^*[I + M] > 0. \quad (3.12)$$

Para aliviar a notação, define-se uma matriz auxiliar X :

$$X \triangleq [I + M^*] W [I - M].$$

Com tal definição, a equação anterior pode ser reescrita na seguinte forma:

$$X + X^* = \text{herm}(X) > 0 \tag{3.13}$$

Empregando-se uma matriz de transformação $T \in \mathbb{R}^3$ de posto cheio, mostra-se que uma transformação de congruência aplicada em uma matriz positiva real qualquer preserva esta propriedade.

Ou seja,

$$\text{herm}(X) > 0 \Leftrightarrow \text{herm}(T^* X T) > 0. \tag{3.14}$$

Aplicando-se então uma transformação de congruência com $T = [I + M]^{-1}$ na EQ. (3.13), tem-se:

$$\text{herm}(W(I - M)(I + M)^{-1}) > 0. \tag{3.15}$$

Considere os seguintes resultados auxiliares. Inicialmente, seja

$$\mathcal{N}_s \triangleq \begin{bmatrix} -I & \sqrt{2}I \\ \sqrt{2}I & -I \end{bmatrix}.$$

Tem-se, então, que

$$(I - X)(I + X)^{-1} = \mathcal{N}_s \star X. \tag{3.16}$$

A equivalência definida em (3.16) permite reescrever a inequação (3.15) como

$$\text{herm}(W(\mathcal{N}_s \star M)) > 0. \tag{3.17}$$

Adicionalmente, considere o seguinte lema.

Lema 3.2. *(LY, 1994) Uma matriz quadrada X é positiva real, isto é, $\text{herm}(X) > 0$, se e somente se*

$$\bar{\sigma}((I - X)(I + X)^{-1}) < 1.$$

Aplicando novamente a equivalência (3.16), desta vez ao resultado proposto pelo lema 3.2, tem-se

$$\text{herm}(X) > 0 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(\mathcal{N}_s \star X) < 1. \tag{3.18}$$

Então, combinando a equivalência de (3.18) com a inequação (3.17), finalmente chega-se à conclusão que a condição (3.8) é equivalente à condição

$$\bar{\sigma}(\mathcal{N}_s \star W(\mathcal{N}_s \star M)) < 1. \quad (3.19)$$

Através do mesmo raciocínio demonstrado até aqui, conclui-se que a condição de positividade real do multiplicador W , isto é, $\text{herm}(W) > 0$, também pode ser expressa de maneira equivalente como

$$\bar{\sigma}(\mathcal{N}_s \star W) < 1. \quad (3.20)$$

Com base nos resultados obtidos, formula-se então o seguinte teste μ de robustez em estabilidade (HELMERSSON, 1995; APKARIAN, 2011): se existir uma transferência $W(j\omega)$ tal que, $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\bar{\sigma}(\mathcal{N}_s \star W(j\omega)(\mathcal{N}_s \star M(j\omega))) < 1, \quad (3.21)$$

$$\bar{\sigma}(\mathcal{N}_s \star W(j\omega)) < 1, \quad (3.22)$$

$$W(j\omega)\Delta(j\omega) = \Delta(j\omega)W(j\omega), \quad (3.23)$$

$$\text{sherm}(W_i(j\omega)) = 0, \quad i = m_r + 1, \dots, m_r + m_c + m_C. \quad (3.24)$$

então o sistema incerto da estrutura $M\Delta$ da FIG. 2.3 será estável para todo $\Delta(s)$ de estrutura dada por $\mathbf{B}\Delta$.

3.2 UMA NOVA CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE ROBUSTA

No caso particular do problema de robustez contra incertezas paramétricas, como o tratado em (APKARIAN, 2011), a restrição hermitiana (3.24) desaparece. Para o caso mais geral de incertezas mistas considerado aqui, todavia, tal restrição deve ser considerada, tornando assim o problema mais complexo.

A condição de comutatividade (3.23) pode ser satisfeita automaticamente por meio da simples parametrização adequada do multiplicador, bastando apenas adotar-se para W a mesma estrutura em $\mathbf{D}\Delta$. Além disto, uma parametrização adequada do multiplicador permite que se satisfaça automaticamente a condição hermitiana (3.24). Com este propósito, é construída uma nova parametrização para o multiplicador W que automaticamente satisfaz as restrições presentes em (3.23) e (3.24).

Considere os conjuntos

$$\mathbf{W}_r \triangleq \{W_r = \text{diag}(W_1, \dots, W_{m_r}) : W_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}\}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{D}_c \triangleq \{D_c = \text{diag}(D_1, \dots, D_{m_c}, d_1 I, \dots, d_{m_c} I) : D_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, d_i \in \mathbb{C}\}. \quad (3.26)$$

Seja W definido por

$$W = \text{diag}(W_r, D_c^* D_c), \quad W_r \in \mathbf{W}_r, D_c \in \mathbf{D}_c, \quad (3.27)$$

Então, não é difícil verificar que as condições presentes em (3.23) e (3.24) são automaticamente satisfeitas para multiplicadores com a parametrização em (3.27).

A partir dessa nova parametrização do multiplicador será obtida uma nova condição de estabilidade robusta contra incertezas mistas.

Retomando a EQ. 3.17, com a substituição de W , tem-se:

$$\text{herm} \left(\begin{bmatrix} W_r & 0 \\ 0 & D_c^* D_c \end{bmatrix} (\mathcal{N}_s \star M) \right) > 0.$$

Aplicando uma transformação de congruência com $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_c^{-1} \end{bmatrix}$, tem-se:

$$\text{herm} \left(\begin{bmatrix} W_r & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} (\mathcal{N}_s \star M) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_c^{-1} \end{bmatrix} \right) > 0. \quad (3.28)$$

Com este resultado, define-se então o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *O sistema incerto da FIG. 2.3 é estável para todo $\Delta(s)$ de estrutura dada por $\mathbf{B}\Delta$ se existirem $W_r(j\omega)$ e $D_c(j\omega)$ de estrutura (3.25) e (3.26), respectivamente, tais que, $\forall \omega \in \mathbb{R}$,*

$$\bar{\sigma}(\mathcal{N}_s \star W_r(j\omega)) < 1, \quad (3.29)$$

$$\bar{\sigma}(\mathcal{N}_s \star (\text{diag}(W_r(j\omega), D_c(j\omega))(\mathcal{N}_s \star M(j\omega))\text{diag}(I, D_c^{-1}(j\omega)))) < 1. \quad (3.30)$$

O primeiro passo para se reformular o problema de síntese μ mista em um problema de síntese H_∞ estruturada consiste na eliminação da inversa D_c^{-1} aparecendo em (3.30). Baseado em uma ideia introduzida em (APKARIAN, 2011), adota-se a reparametrização

$$D_c = I + \tilde{D}_c.$$

Nesse caso, a transferência D_c^{-1} pode ser facilmente obtida como a transferência da entrada u para a saída y da interconexão

$$\begin{aligned} y &= u - \tilde{D}_c y \\ &= (I + \tilde{D}_c)^{-1} u. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assim, tem-se que

$$D_c^{-1} = (\tilde{D}_c + I)^{-1} = \tilde{D}_c \star \begin{bmatrix} -I & I \\ -I & I \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Tal processo de translação de multiplicadores é demonstrado de uma forma visual na FIG. 3.1.

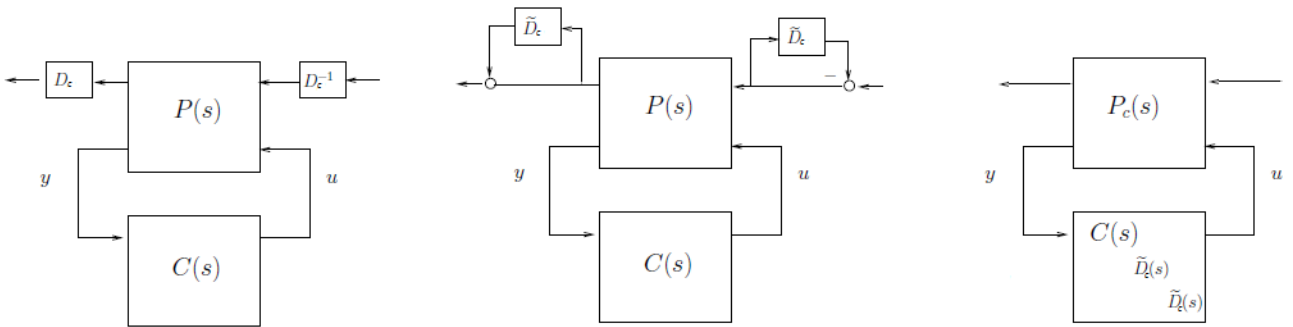


FIG. 3.1: Translações do multiplicador D

Para reduzir a notação, será definida uma matriz \mathcal{N}_I , na seguinte forma:

$$\mathcal{N}_I = \begin{bmatrix} -I & I \\ -I & I \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Tal definição permite reescrever (3.32) como

$$D_c^{-1} = \tilde{D}_c \star \mathcal{N}_I. \quad (3.34)$$

Aplicando a transformação proposta e a definição adotada para D_c , obtém-se:

$$\text{herm} \left(\begin{bmatrix} W_r & 0 \\ 0 & (\tilde{D}_c + I) \end{bmatrix} (\mathcal{N}_s \star M) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{D}_c \star \mathcal{N}_I \end{bmatrix} \right) > 0.$$

Ou, após aplicar o lema 3.2,

$$\bar{\sigma} \left(\mathcal{N}_s \star \left(\text{diag}(W_r(j\omega), D_c(j\omega)) (\mathcal{N}_s \star M(j\omega)) \text{diag}(I, \tilde{D}_c \star \mathcal{N}_I) \right) \right) < 1. \quad (3.35)$$

3.3 SÍNTESE- μ MISTA - WD

É possível obter uma ferramenta de síntese- μ a partir da aplicação da condição de estabilidade robusta do teorema 3.1 ao sistema incerto representando na FIG. 2.8. Inicialmente desconsiderando o canal de desempenho, o problema de síntese μ pode então ser formulado como a procura por um controlador K e multiplicadores W_r , D_c tais que, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, as restrições (3.29)-(3.30) sejam satisfeitas com $M = P \star K$.

O problema de síntese μ mista apresentado acima pode ser reformulado como um problema de síntese H_∞ de um controlador estruturado aumentado (APKARIAN, 2011), cujos componentes sintonizáveis no presente caso são K , W_r e D_c . O problema resultante de síntese H_∞ estruturada pode, por sua vez, ser resolvido eficientemente por meio de técnicas de otimização não-diferenciável (APKARIAN, 2006), já existindo inclusive rotinas disponíveis, por exemplo, em MATLAB. Um grande atrativo da abordagem não-diferenciável é que ela permite a consideração de restrições de estrutura sobre o controlador.

Considere, agora, um controlador aumentado definido como

$$C(s) \triangleq \text{diag}(K(s), W_r(s), W_r(s), \tilde{D}_c(s), \tilde{D}_c(s)).$$

Note que $C(s)$ é estruturado mesmo que $K(s)$ não o seja. Sejam

$$N_1(s) \triangleq \mathcal{N}_s \star W_r(s), \tag{3.36}$$

$$N_2(s) \triangleq \mathcal{N}_s \star \left(\text{diag}(W_r(s), D_c(s)) (\mathcal{N}_s \star P(s) \star K(s)) \text{diag} \left(I, \tilde{D}_c \star \mathcal{N}_I \right) \right). \tag{3.37}$$

Finalmente, existe uma planta de síntese aumentada $H(s)$ tal que

$$H(s) \star C(s) \triangleq \text{diag}(N_1(s), N_2(s)). \tag{3.38}$$

Note que a transferência $H(s)$ pode ser obtida manualmente ou numericamente, via MATLAB, por exemplo. A parcela definida por N_2 concentra o desenvolvimento realizado até este ponto, e simplesmente reúne o resultado obtido em (3.35). A parcela N_1 é adicionada para garantir a verificação da restrição da matriz W , que deve ser positiva definida, como citado na EQ. 3.20.

Com as definições acima, traduz-se o problema de síntese μ mista proposto como um problema de síntese H_∞ estruturada onde o objetivo é encontrar um controlador aumentado $C(s)$ tal que

$\|H(s) \star C(s)\|_\infty < 1$. Assim, o problema de factibilidade a ser resolvido é

$$\begin{aligned} &\text{encontrar } K(s), W_r(s), \tilde{D}_c(s) \\ &\text{tais que } \|H(s) \star C(s)\|_\infty < 1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Se for possível determinar tal $C(s)$, então o controlador $K(s)$ associado torna o sistema incerto da FIG. 2.8 é robusto em estabilidade contra incertezas com a estrutura normalizada $\mathbf{B}\Delta$. A determinação de $C(s)$ também garante a Estabilidade Nominal. Na prática, a síntese H_∞ estruturada envolve a solução de um programa não de factibilidade, mas de minimização, da seguinte forma:

$$\underset{K(s), W_r(s), \tilde{D}_c(s)}{\text{minimizar}} \|H(s) \star C(K(s), W_r(s), \tilde{D}_c(s))\|_\infty \quad (3.40)$$

Este é um problema numericamente tratável pois tem como base uma minimização H_∞ , mas que não oferece uma resposta ótima para as matrizes K e W . A rotina irá indicar somente se a obtenção da norma H_∞ dentro das restrições indicadas é possível ou não.

Para usar tal teste de factibilidade como uma síntese capaz de produzir controladores eficientes, é empregado um algoritmo iterativo que repete o teste aplicando diferentes magnitudes para o conjunto de incertezas admissíveis. Com a incerteza normalizada, é empregado o multiplicador γ , que é repetidamente testado como um limite superior para μ . Para isto, γ é inversamente multiplicado ao círculo normalizado de incertezas admissíveis, como proposto pelo lema 3.1:

$$\mu \leq \gamma, \quad \Delta \in \frac{1}{\gamma} \mathbf{B}\Delta \quad (3.41)$$

O objetivo do algoritmo é encontrar o menor valor de γ (ou seja, o maior círculo de incertezas admissíveis $\frac{1}{\gamma} \mathbf{B}\Delta$) para o qual ainda seria possível sintetizar um controlador capaz de estabilizar o sistema. Inicialmente é definido um valor inicial máximo para γ , definido por γ_{max} e geralmente de valor elevado. O algoritmo verifica a factibilidade de um controlador estabilizante usando um valor de teste $\gamma_i = \gamma_{max}$. Caso não seja possível sintetizar um controlador a rotina é interrompida, indicando que $\mu > \gamma_{max}$. É definido também o valor inicial $\gamma_{min} = 0$.

Se o primeiro teste é bem sucedido, então o valor real de μ está dentro da faixa de valores definida por:

$$\mu \in f_\gamma \triangleq [\gamma_{min}; \gamma_{max}]. \quad (3.42)$$

O algoritmo então busca encontrar um valor do limite superior γ que seja próximo ao valor real de μ por meio de uma bissecção. O valor central do intervalo possível f_γ é tomado como o valor atual a ser testado γ_i , que então escalona a incerteza admissível como $\frac{1}{\gamma_i} \mathbf{B}\Delta$. O algoritmo de

minimização da função objetivo proposta por este trabalho determina se um controlador é factível para tal incerteza escalonada. Caso seja bem sucedido, então a existência do controlador demonstra que o valor atual de γ_i é um limite superior para μ , e uma tentativa de se obter um controlador mais restrito é realizada. A bisseção descarta a metade superior da faixa de valores f_γ acima de γ_i e repete o processo. Caso um controlador não seja determinado, então tal magnitude de incerteza é desestabilizante, e o valor atual de γ_i é, portanto, menor do que μ . A bisseção descarta a metade inferior da faixa de valores f_γ abaixo do valor de γ_i e executa a iteração seguinte. O processo se repete, aproximando os limites da faixa de valores f_γ e aumentando a precisão até que se atinja entre γ_{min} e γ_{max} uma tolerância máxima previamente definida como tol . O último controlador obtido com sucesso é retornado pela rotina, e o valor atual de γ_{max} representa com segurança um limite superior para μ .

Para complementar a compreensão do algoritmo da bisseção, o mesmo é visualmente descrito pelas seguintes proposições lógicas:

$$\text{Passo 1. valor de teste para } \gamma : \quad \gamma_i = (\gamma_{max} - \gamma_{min})/2; \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \text{Passo 2. se existe } C(s) \text{ factível,} \quad & \text{então } \gamma_{max} = \gamma_i; \\ & \text{senão } \gamma_{min} = \gamma_i; \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\text{Passo 3. se } (\gamma_{max} - \gamma_{min}) > tol, \quad \text{então retorna ao Passo 1.} \quad (3.45)$$

A conclusão da rotina proposta indica que $\mu \leq \gamma_{max}$ e $(\gamma_{max} - \mu) < tol$. Um valor reduzido para a tolerância máxima da bisseção tol garante que o controlador obtido apresenta uma capacidade de estabilização próxima do limiar aceitável, e portanto, não é excessivamente conservador em relação às necessidades do problema.

A condição de Estabilidade Robusta do teorema 3.1 pode facilmente ser generalizada para o caso de Desempenho Robusto, bastando utilizar o resultado do teorema 2.5. Para tanto, é necessário considerar o canal de desempenho na planta de síntese, na FIG. 2.8, e aumentar o multiplicador W para: (ZHOU, 1996)

$$W = \text{diag}(W_r, D_c^* D_c, I), \quad W_r \in \mathbf{W}_r, D_c \in \mathbf{D}_c, \quad (3.46)$$

de modo a considerar a inclusão da incerteza fictícia Δ_P no bloco Δ . Assim, na prática, basta substituir $N_2(s)$ em (3.37) por

$$N_2(s) = \mathcal{N}_s \star \left(\text{diag}(W_r(s), D_c(s), I) (\mathcal{N}_s \star P_N(s) \star K(s)) \text{diag} \left(I, \tilde{D}_c \star \mathcal{N}_I, I \right) \right). \quad (3.47)$$

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentados exemplos de aplicações numéricas da síntese- μ não-diferenciável proposta por este trabalho no capítulo 3, denominada síntese WD . São eles os seguintes:

- Planta Levemente Amortecida (APKARIAN, 2011)
Um exemplo acadêmico que apresenta uma planta com duas incertezas paramétricas.
- Integrador Duplo (YOUNG, 1994)
Modelo de uma cabeça de leitura e gravação de disco rígido, com uma incerteza paramétrica.
- Massa-Mola-Amortecedor (BARROS, 2005)
Um modelo com incerteza mista, composta por uma incerteza paramétrica e uma dinâmica.
- Estabilização Robusta de um Foguete (HELMERSSON, 1995)
Modelo com incerteza mista, apresentando duas incertezas paramétricas, uma dinâmica e um bloco de especificações de desempenho.

O programa utilizado nas simulações foi o MATLAB, em um computador com processador i5-3337U. A técnica de síntese- μ não-diferenciável proposta neste trabalho (síntese WD) foi programada em uma função do MATLAB. Nesta rotina são dados de entrada o modelo, a ordem n_K pré-definida para o controlador e a ordem n_W pré-definida do bloco multiplicador W . O multiplicador D recebe automaticamente a mesma ordem que W .

Também é utilizada a função `DKSYN` do MATLAB, que realiza as sínteses $D-K$ e $D, G-K$, as quais são usadas como referência na comparação dos resultados. Nesta rotina os dados de entrada são o modelo e a ordem máxima dos blocos multiplicadores D e G . A ordem resultante dos blocos multiplicadores pode, portanto, ser menor do que o valor parametrizado. A ordem do controlador obtido é definida pela própria rotina.

Salvo indicação contrária, na rotina que executa a síntese WD são utilizadas 100 sementes de controladores e multiplicadores a cada iteração da bisseção. As sementes são selecionadas de forma aleatória. A bisseção se repetirá até obter um valor para o limite superior de μ dentro de uma janela de tolerância de 10^{-2} . A ordem escolhida para o controlador e os multiplicadores será descrita a cada exemplo. Para realizar a análise μ usando cada controlador obtido e verificar a consistência dos resultados, é utilizada a rotina `MUSSV`, também disponível no MATLAB.

A avaliação do desempenho das diferentes técnicas para a síntese do controlador é realizada pela comparação do valor do pico de μ na frequência e pelas ordens do controlador e dos multiplicadores usados. Quanto menor for o valor do pico de μ e as ordens do controlador e dos multiplicadores, melhor será a técnica usada. É possível que a comparação entre técnicas dependa de qual desses aspectos é mais relevante, já que pode ocorrer de uma determinada técnica obter um valor de pico de μ reduzido às custas de uma elevada ordem do controlador, ao passo que outra técnica poderá obter o contrário. Controladores de ordens elevadas demandam maior esforço computacional. Este é um ponto que se torna relevante em aplicações com restrições severas de hardware, como mini-drones e outras aplicações embarcadas, por exemplo.

Os dois primeiros exemplos serão apresentados de forma resumida, visto que seu propósito é somente de testar a consistência da nova síntese proposta, assegurando que não houve degradação da capacidade de síntese em relação a resultados anteriores de outras técnicas. Como o foco do trabalho é a tratativa de incertezas mistas, os resultados dos dois exemplos finais que abordam tal caso serão mais explorados.

4.1 PROBLEMA DE CONTROLE DE UMA PLANTA LEVEMENTE AMORTECIDA COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS

4.1.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Este é um exemplo acadêmico, retirado de (APKARIAN, 2011) e baseado no trabalho de (YOUNG, 1996). O objetivo desta aplicação inicial é assegurar a consistência da implementação da técnica apresentada, verificando que na ausência de incertezas complexas os resultados coincidem com os obtidos sem a alteração proposta por este trabalho.

Este exemplo foi construído para enfatizar o problema decorrente de incertezas reais paramétricas. O sistema nominal é instável e a planta incerta é descrita como uma função de transferência de segunda ordem, definida como

$$G(s, \delta) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + \delta_1)}{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1 + \delta_2)}, \quad (4.1)$$

onde δ_1 e δ_2 são parâmetros reais incertos, $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0, 2$. A função de transferência pode ser reescrita no formato de blocos em LFT proposto na FIG. 2.8, definindo-se

$$M(s) = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & -1/\omega_n^2 & -1/\omega_n^2 & 0 \\ -\omega_n^2 & 2\zeta\omega_n & 0 & 0 & 4\zeta\omega_n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \\ 0 & -\omega_n^2 & 0 & 0 & -\omega_n^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (4.2)$$

e

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Repare que, para $(\delta_1, \delta_2) = (-1, -1)$, haverá o cancelamento de um polo instável em $s = 0$. Como consequência, haverá um modo instável não observável, o que inviabiliza a estabilização da planta para qualquer controlador adotado. Em virtude disto, pode-se inferir que a máxima margem paramétrica alcançável para este sistema é limitada superiormente por 1, independentemente da técnica que seja utilizada. Isso é equivalente a dizer que, para este problema, $\mu \geq 1$.

Note que neste caso não estão presentes os sinais do canal de desempenho, z e w , mostrados na FIG. 2.8. Isso significa que o controlador a ser sintetizado terá por objetivo alcançar somente a robustez em estabilidade. O foco neste exemplo é a síntese de um controlador robusto que maximize a margem paramétrica, ou seja, o raio do quadrado no espaço- (δ_1, δ_2) , no qual o sistema em malha fechada permanece estável.

A ausência de um canal de desempenho é um problema para a aplicação da rotina DKSYN, pois esta usa o canal para criar uma malha fechada. Para contornar esta limitação, foi criado um canal de desempenho fictício desconectando do bloco de incertezas os canais correspondentes à δ_2 . A execução da rotina irá se utilizar deste canal como se fosse o de desempenho e então reconstruir a incerteza δ_2 no mesmo. Desta forma, o impacto da incerteza não é desconsiderado.

4.1.2 RESULTADOS

Ao utilizar a rotina DKSYN para a síntese $D - K$, todas as incertezas são tratadas como complexas. Esta é uma síntese complexa, que usa somente blocos multiplicadores reais. Neste exemplo há duas incertezas paramétricas, e, portanto, os resultados da síntese $D - K$ serão mais conservadores, tratando como admissíveis valores complexos para δ_1 e δ_2 . O valor de pico para μ obtido neste caso foi de 2,55 na frequência de 0,959 rad/s, com controlador de ordem 2 e multiplicadores estáticos (ou seja, de ordem 0).

Já a síntese mista $D, G - K$, que usa blocos multiplicadores complexos para poder tratar

TAB. 4.1: Resultados para diferentes ordens de controladores (K)

Técnica utilizada	Ordem K	Ordem dos multiplicadores	pico de μ
Iteração $D - K$	2	$n_D = 0$	2,55
Iteração $D, G - K$	14	$n_D = 0, n_G = 2$	1,00
Síntese WD	0	$n_W = 0$	2,55
Síntese WD	1	$n_W = 0$	2,55
Síntese WD	2	$n_W = 0$	1,00
Síntese WD	0	$n_W = 1$	1,00

também incertezas paramétricas, obteve o resultado de pico de μ em 1,00 em frequência nula, sendo este o melhor valor possível para este exemplo, como explicitado anteriormente. A ordem do controlador obtido foi 14, do multiplicador D foi 0, e do multiplicador G foi 2.

Usando a síntese WD , a objetivo era ao menos obter uma ordem do controlador reduzida, já que neste caso há um limite de desempenho no pico de μ , não sendo possível torná-lo menor do que 1. Após simulações com controladores de diferentes ordens, a síntese foi capaz de obter o melhor pico possível em $\mu = 1,00$ com um controlador de ordem 2 e multiplicadores estáticos. Controladores de ordem inferior obtiveram o mesmo resultado da iteração $D - K$ complexa. Já com um multiplicador de ordem 1, até mesmo um controlador de ordem 0 foi capaz de obter o pico de $\mu = 1,00$. A TAB. 4.1 mostra os resultados obtidos de acordo com a técnica utilizada para diferentes ordens do controlador. O tempo de processamento de cada simulação foi de aproximadamente 20 minutos.

4.2 INTEGRADOR DUPLO

Este exemplo trata de um modelo simplificado da dinâmica de uma cabeça de leitura e gravação de um disco rígido, retirado de (YOUNG, 1994). Tal modelo pode ser aproximado, em baixas frequências, pela função de transferência

$$\tilde{P}(s) = \frac{k_p}{s^2}.$$

Para altas frequências ($\omega > \omega_0$), as dinâmicas da planta são incertas devido aos modos oscilatórios de ordens elevadas. Assume-se que o ganho da planta é um parâmetro incerto dentro do intervalo

$$k_{\min} < k_p < k_{\max},$$

onde a razão de k_{\max} para k_{\min} pode ser tão grande quanto 100. Para permitir a comparação de técnicas de síntese diferentes, serão adotados os valores $\omega_0 = 100$ rad/s e $k_{\min} = 0,1, k_{\max} = 10$. Estes não são valores fisicamente realistas, mas isto não representa um problema quando o objetivo é comparar as diferentes técnicas de síntese.

O objetivo da síntese é projetar um controlador fixo (dinamicamente) capaz de tornar a resposta em malha fechada robusta em relação às variações admissíveis para o ganho da planta. Esta resposta também deverá ser tão rápida quanto possível, sem que isto a faça transpor um nível máximo tolerado de ultrapassagem previamente definido. Também é desejável que o esforço do controlador não seja muito alto, além de decair a valores desprezíveis para frequências acima de ω_0 , onde o modelo das dinâmicas da planta se torna incerto. Para isso, o controlador K deverá cumprir certas especificações de desempenho para toda variação no intervalo admissível do ganho incerto k_p . As especificações aqui definidas serão representadas no modelo por restrições na função sensibilidade e sensibilidade complementar. As definições das funções sensibilidade e sensibilidade complementar encontram-se em (7.4), no apêndice.

O modelo em blocos do sistema em malha fechada com o controlador é demonstrado na FIG. 4.1.

O modelo da planta incerta $\tilde{P}(s)$, conforme explicado anteriormente, deve variar entre $\frac{k_{\min}}{s^2}$ e $\frac{k_{\max}}{s^2}$. Porém, $k_{\min} = 0,1, k_{\max} = 10$ e para a aplicação da síntese a incerteza deverá ser normalizada, tendo sua norma limitada em 1. Ajustando a incerteza paramétrica normalizada $\delta^r \in [-1, 1]$ aos limites de k_p na planta $\tilde{P}(s)$, tem-se

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s^2}(5,05 + 4,95\delta^r),$$

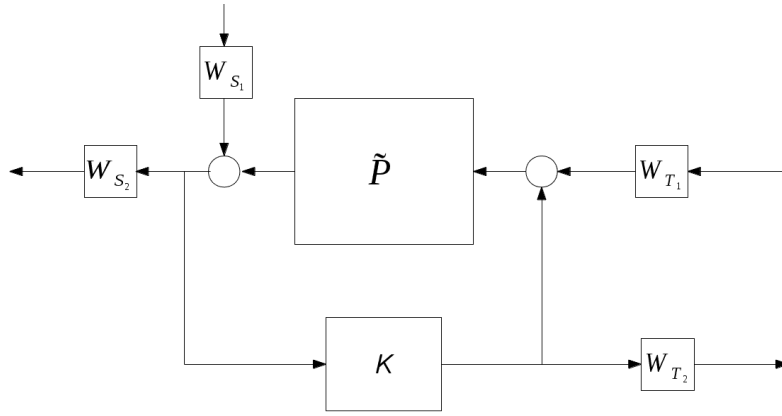


FIG. 4.1: Estrutura de controle com canal de desempenho para o sistema integrador duplo

onde o parâmetro $\delta^r \in \mathbb{R}$ é a incerteza real paramétrica. Esta é a representação de um integrador duplo com incerteza no ganho, e a planta torna-se então normalizada de tal forma que a variação de δ^r no intervalo $[-1 \ 1]$ implica em $\tilde{P}(s) = \frac{k_p}{s^2}$ com $0, 1 \leq k_p \leq 10$.

Os outros blocos presentes na estrutura definida na FIG. 4.1 representam as ponderações fornecidas no trabalho de (YOUNG, 1994) que refletem os critérios de desempenho serem aplicados na sensibilidade e na sensibilidade complementar. Tais blocos são incorporados para assegurar o cumprimento dos outros objetivos previamente definidos. Os blocos de ponderações fornecidos são:

$$W_{S_1} = W_{S_2} = \frac{0,03}{s + 0,05},$$

$$W_{T_1} = W_{T_2} = \frac{5(s + 0,001)}{s + 5}.$$

TAB. 4.2: Análise do desempenho robusto do sistema em malha fechada

Iteração D,G-K			Síntese WD		
n_D, n_G	n_K	pico de μ	n_W	n_K	pico de μ
1	8	1,83	1	1	1,53
2	12	1,58	2	2	1,42
3	14	1,70	3	3	1,39
4	16	1,52	4	4	1,37

Na TAB. 4.2, n_D, n_G, n_W indicam respectivamente a ordem dos multiplicadores D, G, W . n_K indica a ordem do controlador.

Os resultados listados na TAB. 4.2 mostram que, comparada à síntese $D, G - K$, a síntese WD obteve margens paramétricas melhores usando controladores de ordens consideravelmente menores. Neste exemplo, a síntese proposta se mostrou mais eficiente nos dois parâmetros analisados.

4.3 CONTROLE DE UM SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

4.3.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Este exemplo foi retirado da Toolbox de Controle Robusto do MATLAB (*Control of a Spring-Mass-Damper System Using Mixed- μ Synthesis*) e é baseado em (BARROS, 2005). Considere o sistema massa-mola-amortecedor mostrado na FIG. 4.2.

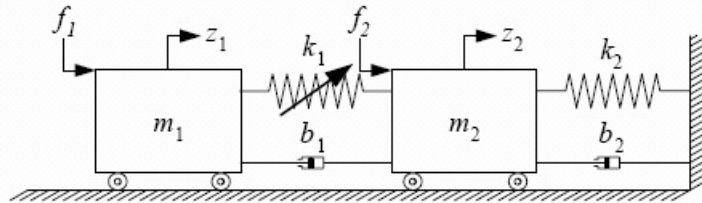


FIG. 4.2: Sistema massa-mola-amortecedor

Neste sistema, a mola k_2 e o amortecedor b_2 estão presos à parede e à massa m_2 . A massa m_2 , por sua vez, está presa à massa m_1 através da mola k_1 e do amortecedor b_1 . A massa m_2 é afetada por uma perturbação, representada pela força f_2 . O sistema é controlado pela força f_1 , que age sobre a massa m_1 .

O principal objetivo de projeto é utilizar a força de controle f_1 para atenuar o efeito da perturbação f_2 na posição da massa m_2 . A força f_1 , porém, não age diretamente na massa m_2 . Ao invés disso, f_1 atuará na rigidez da mola k_1 . Desta forma, qualquer incerteza presente na constante de elasticidade de k_1 tornará o problema de controle ainda mais difícil. A estrutura para síntese do controlador é vista na FIG. 4.3.

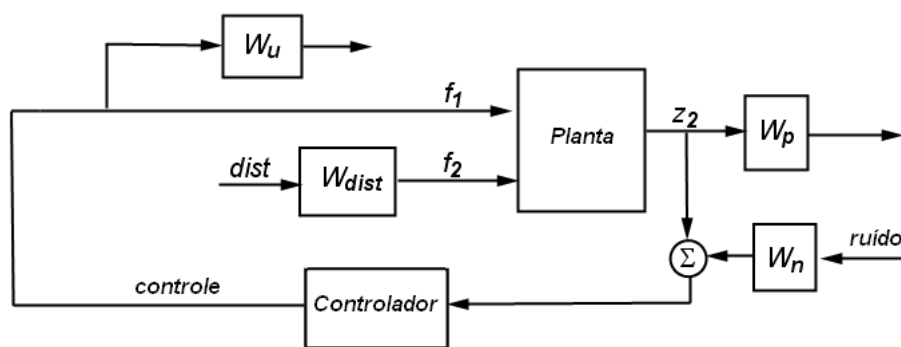


FIG. 4.3: Interconexão para síntese do controlador

O problema de controle é formulado da seguinte maneira:

- O controlador mede, com ruído, o deslocamento da massa m_2 e aplica uma força de controle f_1 . O ruído de sensor W_n é modelado como uma constante. Mais precisamente, W_n é igual a 0,001.
- O comando do atuador é penalizado por um fator 0,1 em baixas frequências e por um fator 10 em altas frequências, com uma frequência de cruzamento de 100 rad/s. Este filtro, chamado de W_u :

$$W_u = 10 \frac{s + 10}{s + 1000}. \quad (4.4)$$

- O filtro de primeira ordem W_{dist} , de magnitude unitária, que age na perturbação é dado por:

$$W_{dist} = \frac{0,25}{s + 0,25}. \quad (4.5)$$

- O objetivo de desempenho é atenuar a perturbação na massa m_2 por um fator 80, abaixo de 0,1 rad/s. Assim:

$$W_p = 80 \frac{0,1}{s + 0,1}. \quad (4.6)$$

Os valores nominais dos parâmetros do sistema são $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = 2$ N/m, $k_2 = 1$ N/m, $b_1 = 0,05$ N.s/m e $b_2 = 0,05$ N.s/m.

A incerteza deste exemplo está presente no seu ponto mais crítico, a constante de elasticidade da mola k_1 . Segundo a definição do problema, a constante tem valor nominal igual a 2, mas seu valor pode variar entre 1,2 e 2,8. Esta incerteza afeta fortemente o controle aplicado, já que o efeito da força de controle f_1 é transmitido através do sistema passando por k_1 .

Há também um retardo temporal τ entre a força comandada f_1 e sua aplicação na massa m_1 . O retardo máximo τ é de 0,06 segundos. Um atraso no tempo equivale a uma exponencial na frequência, e este retardo será visto pelo modelo como um erro multiplicativo de $(e^{-0,06s} - 1)$. Entretanto, isso resultaria em uma representação em espaço de estado de dimensão infinita. Para solucionar esse problema, este atraso será negligenciado e em seu lugar será inserida uma incerteza dinâmica, que agirá como uma dinâmica complexa não-modelada. Esta incerteza dinâmica é limitada em magnitude, e será representada por um filtro passa-altas W_{unmod} multiplicado por uma incerteza complexa normalizada. Tal filtro passa-altas será definido como:

$$W_{unmod} = 2,6 \frac{s}{s + 40}. \quad (4.7)$$

A FIG. 4.4 apresenta o diagrama de Bode comparando os elementos da dinâmica não-modelada descrita. O diagrama mostra que erro multiplicativo W_{unmod} aplicado é suficiente para representar

o retardo original $(e^{-0,06s} - 1)$ no modelo. Desta forma, com pequeno conservadorismo reduz-se a complexidade na tratativa deste retardo temporal.

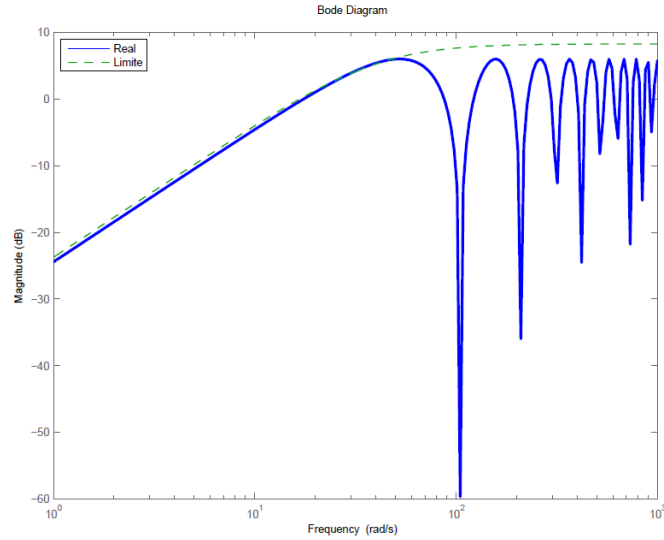


FIG. 4.4: Diagrama de Bode para dinâmica não-modelada

Pode-se então construir um modelo incerto, em espaço de estados, da planta P_1 com a força de controle f_1 e a perturbação f_2 como entradas. Há quatro estados: as posições z_1 e z_2 e as velocidades \dot{z}_1 e \dot{z}_2 , sendo o vetor de estados formado nesta sequência. A saída da planta é dada por z_2 . Esta transferência já inclui o parâmetro incerto k_1 . A representação em espaço de estados de P_1 é dada por:

$$P_1 = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & \frac{1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} & 0 & \frac{1}{m_2} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.8)$$

A FIG. 4.5 apresenta o diagrama de Bode da planta para 20 amostras aleatórias do parâmetro incerto k_1 . Note que a incerteza no valor de k_1 causa flutuações nas frequências naturais dos modos da planta.

Prosseguindo com a modelagem, a transferência do filtro W_{unmod} será multiplicado por uma incerteza complexa normalizada e anexada à representação em espaço de estados da planta P_1 como incerteza multiplicativa de entrada. Desta forma a planta incerta original se encontra modelada por completo. Em seguida os blocos W_n , W_u , W_{dist} e W_p são conectados à planta resultante compondo a interconexão do sistema apresentada pela FIG. 4.3.

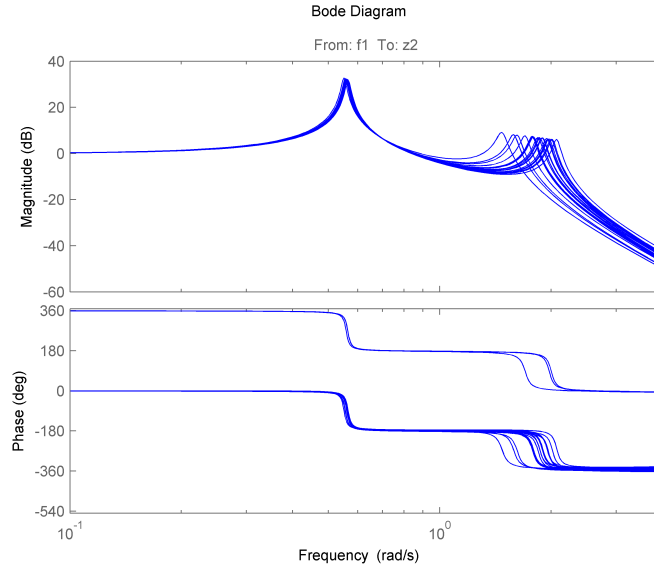


FIG. 4.5: Diagrama de Bode da planta para 20 amostras de k_1

4.3.2 RESULTADOS

Para melhor compreensão dos resultados, antes da síntese- μ não-diferenciável, serão apresentados os resultados dos controles obtidos para este sistema utilizando as iterações $D-K$ e $D, G-K$. Ambas foram realizadas por intermédio da rotina DKSYN do MATLAB, aplicando os parâmetros necessários. Esta rotina sintetiza um controlador robusto para o sistema aplicado. O objetivo é comparar os resultados destas técnicas com a síntese- μ não-diferenciável.

4.3.2.1 SÍNTESE- μ COMPLEXA

Por padrão, a rotina DKSYN realiza a síntese- μ complexa, o que corresponde à iteração $D-K$. Isto significa que os blocos multiplicadores aplicados são reais (há somente o bloco D , e não o G), e que as incertezas, mesmo as paramétricas, serão tratadas como complexas. k_1 é um parâmetro real com valor nominal 2, compreendido numa faixa entre 1,2 e 2,8. Porém, por esta síntese, k_1 seria tratado como uma incerteza complexa.

Nesta síntese μ complexa, k_1 é, portanto, substituído por um parâmetro complexo incerto, variando num disco centrado em 2 e com raio 0,8. A FIG. 4.6 ilustra 80 amostras de valores de k_1 , sendo ele tratado como real (com pontos vermelhos ao longo do eixo horizontal real) ou como complexo (com asteriscos azuis). Seu propósito é somente demonstrar visualmente o aumento de conservadorismo que tal mudança impacta no controle. Note que todos os pontos representados por asteriscos dentro do círculo complexo serão tratados pela síntese como valores admissíveis para o parâmetro k_1 , quando na verdade somente os pontos ao longo do eixo horizontal real poderiam

realmente ocorrer na realidade.

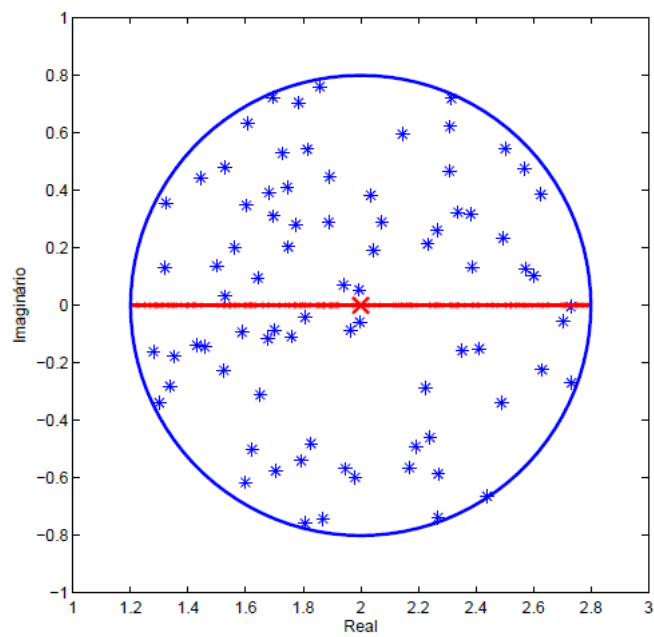


FIG. 4.6: Amostras do valor incerto k_1 (real *versus* complexo)

A síntese $D-K$ foi realizada com parâmetros padrão para a rotina DKSYN. Efetuada a iteração, obteve-se o pico do limite superior de $\mu = 1,09$. A ordem do controlador obtido foi 26. A ordem do multiplicador D foi 9.

4.3.2.2 SÍNTESE- μ MISTA

A iteração $D, G-K$ e a síntese- μ não-diferenciável são tipos de síntese mista, pois são capazes de lidar não somente com incertezas complexas, mas também com parâmetros reais incertos diretamente no processo de síntese. No caso da $D, G-K$, o multiplicador D está associado à existência da estrutura na incerteza, e, portanto, sempre presente. Já o multiplicador G está relacionado somente a incertezas reais paramétricas, sendo empregado somente quando este tipo de incerteza estiver presente no problema. Na síntese WD os blocos multiplicadores D e G são encapsulados junto com o controlador no bloco aumentado W . Neste exemplo serão aplicadas as duas sínteses- μ mistas: uma através da iteração $D, G-K$ e a outra pela técnica de síntese WD .

A iteração $D, G-K$ e realizada com a rotina DKSYN, habilitada através da opção MIXEDMU e com parâmetros padrão de ordem dos multiplicadores. Foi obtido um valor de pico de μ de 1,07 com multiplicadores D de quinta ordem e multiplicadores G de segunda ordem. O controlador obtido teve ordem igual a 30.

Porém um valor de pico de μ maior do que 1 indica uma margem paramétrica menor do que 1. Como a incerteza é normalizada, isto indica que o controle não é capaz de atingir a robustez em estabilidade. Usando a opção AUTOSCALINGORDER disponível na rotina a ordem máxima permitida para o multiplicador G foi elevada para a sexta ordem. Com esta alteração foi possível obter o pico de μ em 0,91, com um controlador de ordem 34. É esperado que a iteração $D, G-K$ encontre resultados melhores do que a $D-K$ em problemas que apresentam incertezas paramétricas, já que ao tratá-las de forma mais precisa, o conservadorismo é reduzido.

Note que, tanto na iteração $D-K$ quanto na $D, G-K$, a ordem do controlador é bastante elevada. Este é um fator que aponta para a necessidade da aplicação de uma técnica de síntese mais eficiente neste caso. Almejando obter um controlador de ordem reduzida e que pudesse fornecer desempenho comparável à iteração $D, G-K$, realizou-se a síntese WD .

Foram realizadas simulações com diferentes combinações de controladores e multiplicadores de ordem reduzida. As ordens foram configuradas partindo de 0 até 4, buscando assim um controlador capaz de satisfazer as necessidades de projeto mas com uma ordem menor do que a aplicada pelas outras sínteses. A TAB. 4.3 apresenta os valores encontrados para o limite superior do valor singular estruturado para cada combinação de ordens de controlador e multiplicador.

Como não foi possível obter um controlador de ordem reduzida capaz de atingir a estabilidade

TAB. 4.3: Limites de μ obtidos na síntese WD

$n_K \setminus n_W$	0	1	2	3	4
0	74,4	70,3	70,1	69,9	69,9
1	27,5	27,3	26,9	26,8	26,6
2	12,1	6,08	5,88	5,13	5,00
3	4,96	4,32	4,05	3,91	5,55
4	2,47	1,89	1,80	1,89	1,83
26	-	-	-	-	0,98

robusta (pico de $\mu < 1$), foram testadas sínteses com ordens maiores, até que tal limiar fosse atingido. Com um controlador de ordem 26 foi possível atingir um pico de $\mu < 1$.

Agrupando os resultados das diferentes técnicas, tem-se a seguinte comparação:

- Iteração $D - K$: pico do limite superior de $\mu = 1,09$, $n_K = 26$, $n_D = 9$;
- Iteração $D, G - K$: pico do limite superior de $\mu = 0,91$, $n_K = 34$, $n_D = 5$, $n_G = 6$;
- Síntese WD : pico do limite superior de $\mu = 0,98$, $n_K = 26$, $n_W = 4$.

A comparação mostra que as técnicas $D, G - K$ e WD foram capazes de atingir o desempenho almejado (pico de $\mu < 1$), com resultados semelhantes.

4.4 ESTABILIZAÇÃO ROBUSTA DE UM FOGUETE

No presente exemplo, discutido originalmente em (HELMERSSON, 1995), o objetivo é projetar um controlador para a estabilização robusta da atitude de um foguete. A planta a ser controlada corresponde ao segundo estágio de um foguete que tem sua fase de queima na atmosfera superior e que é controlado via vetor de empuxo gerado por uma tubeira móvel.

A dinâmica do foguete é representada pela transferência

$$G(s) \triangleq \theta(s)/u(s) \triangleq G_a(s) + G_\omega(s), \quad (4.9)$$

onde θ e u representam, respectivamente, a atitude do foguete e a deflexão do vetor de empuxo. A transferência $G_a(s)$ em (4.9), dada por

$$G_a(s) \triangleq \frac{b}{s^2 - a}, \quad (4.10)$$

está associada à dinâmica de corpo rígido do foguete, enquanto que

$$G_\omega(s) \triangleq -\frac{0.2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 + \omega_1^2}. \quad (4.11)$$

corresponde à dinâmica de um modo flexível do foguete próximo a 10 rad/s. O modelo (4.9) do foguete é obtido sob as hipóteses simplificadoras de que a atitude do dispositivo é igual ao seu ângulo de ataque e de que o amortecimento aerodinâmico pode ser desprezado. Além disso, o foguete possui modos flexíveis acima de 50 rad/s cuja dinâmica é negligenciada.

A transferência $G_a(s)$ em (4.10) depende do parâmetro aerodinâmico a que é, na verdade, um parâmetro variante no tempo. De fato, à medida que o foguete ascende na atmosfera esvanecente, forças e momentos aerodinâmicos se reduzem, e o momento de inércia do foguete diminui devido à queima de combustível. Além disso, o parâmetro a depende do ângulo de ataque. De semelhante modo, o parâmetro b em (4.9) também é variante, devido a variações de empuxo, momento de inércia e braço de alavanca. Adicionalmente, incertezas na pressão dinâmica, gravimetria e aerodinâmicas introduzem incerteza no valor dos parâmetros a e b .

No quadro de trabalho do problema de síntese, o coeficiente aerodinâmico a é considerado como um parâmetro incerto que pode assumir valores no intervalo $[0; 0, 5]$. Desse modo, a incerteza no parâmetro é representada da forma

$$a \triangleq \bar{a}(1 + \alpha_a \delta_a), \quad (4.12)$$

com $\bar{a} = 0, 25$ representando o valor nominal do parâmetro, $\alpha_a = 1$ a incerteza relativa e $\delta_a \in$

$[-1, 1] \in \mathbb{R}$. As incertezas no valor do parâmetro b , por outro lado, são endereçadas via as especificações clássicas de margens de fase e de ganho. O valor nominal do parâmetro é selecionado como $b = 1$. Com essas definições, a dinâmica de corpo rígido pode, então, ser representada na forma LFT como $G_a(s) = \delta_a \star \bar{G}_a$, onde a transferência nominal \bar{G}_a admite a seguinte realização

$$\bar{G}_a(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{a} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{a}\alpha_a & \sqrt{b} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{b} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right]. \quad (4.13)$$

A transferência $G_\omega(s)$ em (4.11) está associada à dinâmica do primeiro modo flexível do foguete próximo a 10 rad/s. A taxa de amortecimento do modo é considerada como bem conhecida, de valor $\zeta_1 = 0,01$. O valor da frequência natural ω_1 , entretanto, é incerto, apresentando valor nominal de 10 rad/s e incerteza relativa de até 10%. Desse modo, a frequência do primeiro modo flexível é representada como um parâmetro incerto dado por

$$\omega_1 \triangleq \bar{\omega}_1(1 + \alpha_\omega \delta_\omega), \quad (4.14)$$

onde $\bar{\omega}_1 = 10$, $\alpha_\omega = 0, 1$, e $\delta_\omega \in [-1, 1] \in \mathbb{R}$. Considerando-se a incerteza na frequência natural, a dinâmica $G_\omega(s)$ associada ao modo flexível admite a realização

$$G_\omega(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\bar{\omega}_1(1 + \alpha_\omega \delta_\omega))^2 & -2\zeta_1 \bar{\omega}_1(1 + \alpha_\omega \delta_\omega) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{0,2} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \sqrt{0,2} & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right]. \quad (4.15)$$

Uma representação LFT para a dinâmica flexível incerta $G_\omega(s)$ em (4.15) pode ser obtida utilizando-se a abordagem proposta em (BALAS, 1995), na qual o termo $(\bar{\omega}_1(1 + \alpha_\omega \delta_\omega))^2$ é aproximado por $\bar{\omega}_1^2 + 2\bar{\omega}_1\alpha_\omega\delta_\omega$. Com isso, a dinâmica aproximada do modo flexível incerto pode ser representada na forma LFT como $\tilde{G}_\omega(s) \triangleq \delta_\omega \star \bar{G}_\omega$, onde o sistema nominal \bar{G}_ω admite a realização

$$\bar{G}_\omega(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{\omega}_1^2 & -2\zeta_1 \bar{\omega}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_\omega & \sqrt{0,2} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -2\bar{\omega}_1^2 & -2\zeta_1 \bar{\omega}_1 \\ \sqrt{0,2} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right]. \quad (4.16)$$

Com as realizações (4.13) e (4.16) para as transferências nominais $\bar{G}_a(s)$ e $\bar{G}_\omega(s)$, respecti-

vamente, a função de transferência incerta $G(s)$ do foguete pode finalmente ser representada na forma LFT como

$$G(s) = \text{diag}(\delta_a, \delta_\omega) \star \begin{bmatrix} [I \ 0] \overline{G}_a(s) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ [I \ 0] \overline{G}_\omega(s) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ [0 \ I] \left(\overline{G}_a(s) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \overline{G}_\omega(s) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

A principal especificação de projeto para o presente problema é que o controlador garanta robustez em estabilidade contra a incerteza nos parâmetros a e b . Adicionalmente, deseja-se que o ganho do controlador seja baixo para frequências acima de 50 rad/s, de modo a não excitar os modos flexíveis não-modelados.

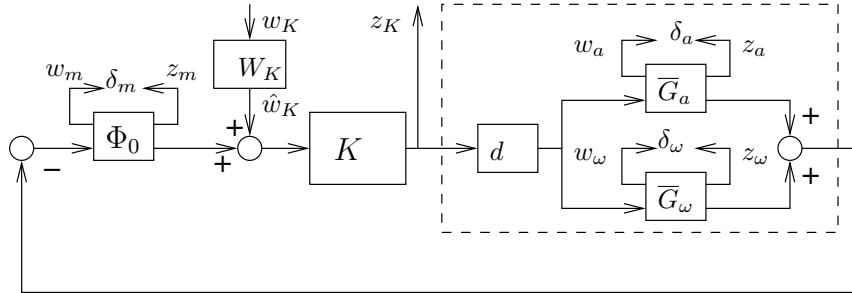


FIG. 4.7: Interconexão em malha fechada para a síntese μ

A FIG. 4.7 mostra o diagrama em blocos do sistema em malha fechada considerado na síntese μ . É possível reparar que o modelo do foguete inclui no canal de controle a transferência

$$d(s) \triangleq \frac{1 - 0,03s}{1 + 0,03s}, \quad (4.18)$$

que corresponde a uma aproximação Padé de primeira ordem para um retardo de 0,06 s utilizado para modelar retardo computacionais, efeitos de amostragem e a própria dinâmica do atuador.

A incerteza no parâmetro b é tratada via especificações de margens de ganho e fase. Conforme discutido em (DEODHARE, 1998), as restrições clássicas de margens de ganho e fase podem ser incorporadas ao formalismo da síntese μ pela sua tradução em uma restrição sobre a norma H_∞ da função de sensibilidade complementar. Nessa abordagem, a ideia é inserir na transferência de malha aberta a função-incerteza

$$\Phi(\delta_m) \triangleq \frac{1 + k_m \delta_m}{\sqrt{1 - k_m^2}}, \quad (4.19)$$

com $\delta_m \in \mathbb{C}$, $|\delta_m| \leq 1$. A função incerteza $\Phi(\delta_m)$ em (4.19) pode ser representada na forma LFT como $\Phi(\delta_m) = \delta_m \star \Phi_0$, onde

$$\Phi_0 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_m}{\sqrt{1-k_m^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-k_m^2}} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

No presente problema, escolhe-se $k_m = 0,6$, o que corresponde à especificação de uma margem de ganho de pelo menos 6 dB e uma margem de fase de pelo menos 35° .

A fim de não excitar os modos flexíveis negligenciados, deseja-se que o ganho do controlador fique abaixo de -6 dB para frequências acima de 50 rad/s. Esta especificação é endereçada através da inclusão da ponderação frequencial

$$W_K(s) \triangleq 2 \frac{(s+7,436)^2 + 19,75^2}{(s+7,07)^2 + 49,84^2} \frac{(s+20,54)^2 + 9,36^2}{(s+60,28)^2 + 72,89^2} \quad (4.21)$$

no canal definido pela transferência em malha fechada $T_K(s) \triangleq z_K(s)/\hat{w}_K(s)$, conforme ilustrado na FIG. 4.7.

Com as definições acima, percebe-se que o problema original de estabilização robusta foi reformulado como um problema de desempenho robusto no qual o objetivo é o de se projetar um controlador que garanta $\|W_K(s)T_K(s)\|_\infty < 1$ para todo valor admissível das incertezas δ_a , δ_ω e δ_K , i.e., tal que $\bar{\sigma}(\text{diag}(\delta_a, \delta_\omega, \delta_K)) \leq 1$.

Para que o problema de desempenho robusto possa ser resolvido pela síntese μ , a interconexão de síntese da FIG. 4.7 é reorganizada na forma padrão da FIG. 2.3, com $w_\Delta = [w_a \ w_\omega \ w_m \ w_K]^T$, $z_\Delta = [z_a \ z_\omega \ z_m \ z_K]^T$, e

$$\Delta = \text{diag}(\delta_a, \delta_\omega, \delta_m, \Delta_p), \quad (4.22)$$

onde $\Delta_p \in \mathbb{C}$ é a clássica incerteza complexa inserida artificialmente associada à especificação de desempenho. A planta de síntese $P(s)$ resultante pode ser facilmente obtida a partir da FIG. 4.7. A presença da incerteza complexa δ_m em (4.22) torna a síntese μ genuinamente mista.

O problema de síntese μ formulado é inicialmente resolvido utilizando-se a iteração $D, G-K$. Um controlador de ordem 23 correspondendo a um valor $\gamma = 1,5771$ é obtido, onde γ é o limitante superior de μ empregado pela síntese. Apesar da ordem extremamente elevada, o fato de que $\gamma \geq 1$ indica que o controlador projetado não atende as especificações de projeto.

Em seguida, o problema é solucionado via a nova síntese μ mista proposta no capítulo 3. Inicialmente é escolhido um controlador com estrutura PID,

$$K_{PID}(s) \triangleq K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{T_f s + 1}. \quad (4.23)$$

TAB. 4.4: Valor de γ para a síntese WD

$n_K \backslash n_W$	0	1	2	3
1	8,281	2,041	2,012	2,012
2	3,457	1,089	1,079	1,074
3	2,471	0,950	0,940	0,940
4	2,998	0,942	0,928	0,925
5	2,285	0,940	0,925	0,925
PID	8,281	2,041	2,012	2,012

A última linha da Tabela 4.4 mostra os valores encontrados para γ em função da ordem n_w pré-selecionada para os multiplicadores. Como $\gamma \geq 1$ para qualquer ordem do multiplicador, isto significa que com um controlador PID também não é possível atender as especificações de projeto.

Por fim, é escolhido um controlador em espaço de estado de ordem reduzida. A Tabela 4.4 mostra os valores encontrados para γ em função da ordem n_w dos multiplicadores e da ordem n_k do controlador, selecionadas *a priori*. Utilizando a nova síntese μ mista proposta, é possível encontrar um controlador de ordem 3 que atende as especificações de projeto, i.e., tal que $\gamma < 1$. Para $n_k = 3$ e $n_w = 1$, encontra-se o controlador

$$K_{31}(s) = \frac{0,4478s^3 + 18,72s^2 + 1852s + 1332}{s^3 + 19,11s^2 + 199,4s + 1133}. \quad (4.24)$$

Na FIG. 4.8 é representado o diagrama de Nyquist para a função de malha aberta

$$L(s) \triangleq G(s)d(s)K_{31}(s) \quad (4.25)$$

para 100 amostras aleatórios de valores para as incertezas $(\delta_a, \delta_\omega)$. O círculo tracejado caracteriza a região de margem de ganho 6 dB e margem de fase de 35° . Na FIG. 4.9 é representada a magnitude da resposta em frequência da transferência $T_K(s)$ novamente para 100 valores aleatórios de incerteza $(\delta_a, \delta_\omega)$. A curva tracejada corresponde ao gabarito frequencial $1/|W_K(j\omega)|$ imposta via função de ponderação $W_K(s)$. Em ambas as FIGs. 4.8 e 4.9 os gabaritos são respeitados, confirmando que as especificações de projeto foram respeitadas.

Na FIG. 4.10 é mostrada a resposta em frequência do controlador $K_{31}(s)$ sintetizado. O controlador apresenta um ganho de -6.5537 dB na frequência de 50 rad/s, e satisfaz a especificação de ganho menor do que -6 dB na faixa de frequência dos modos flexíveis negligenciados.

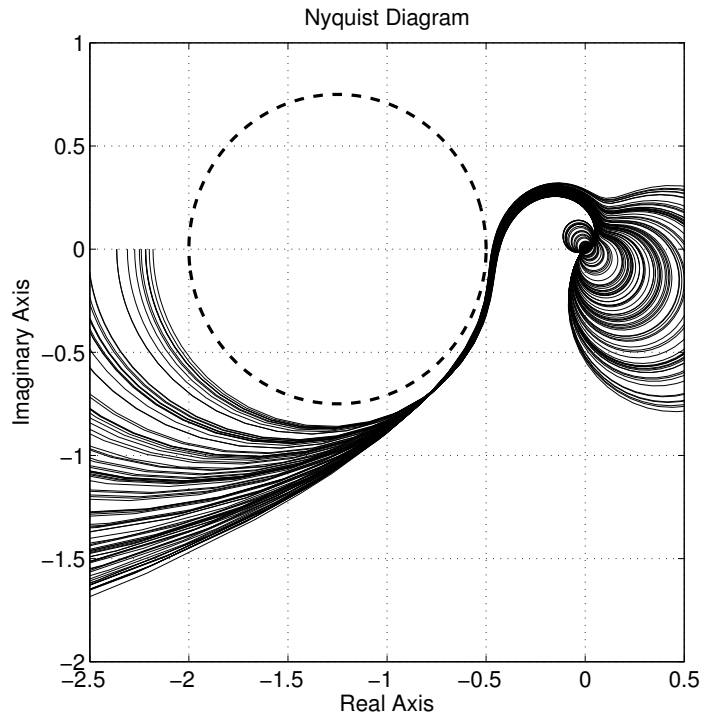


FIG. 4.8: Diagrama de Nyquist de $L(j\omega)$

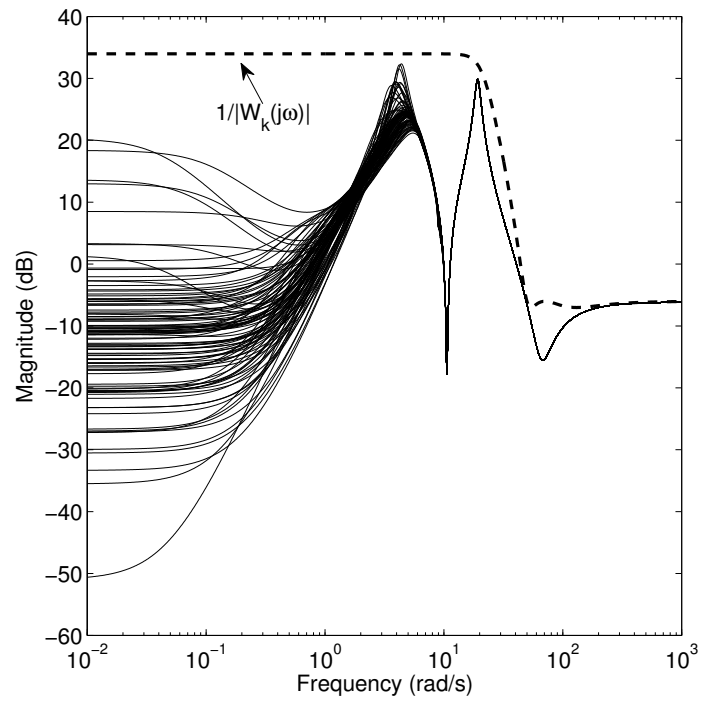


FIG. 4.9: Resposta em frequência de $T_K(s)$

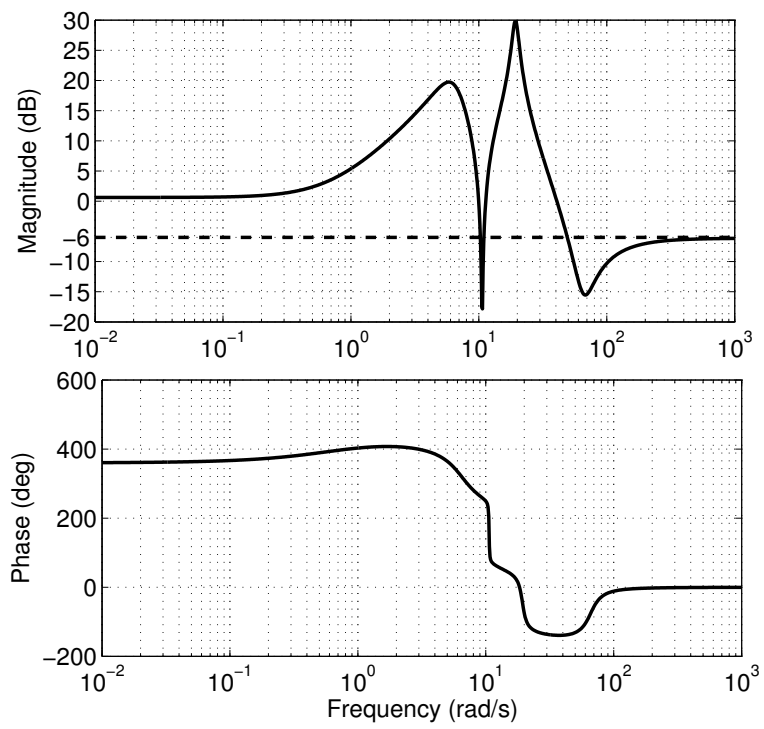


FIG. 4.10: Diagrama de Bode de $K_{31}(s)$

5 CONCLUSÃO GERAL

Nesta dissertação foram inicialmente abordados alguns resultados da Teoria de Controle Robusto relacionados ao desenvolvimento da síntese de controladores para plantas sujeitas a incertezas. Dentre as abordagens propostas na literatura na tentativa de se resolver os problemas de controle robusto, a síntese- μ baseada no limite superior tem sido um dos caminhos mais explorados, em um contexto em que ainda não há técnicas que permitam sintetizar um controlador robusto globalmente ótimo. Por intermédio da combinação da análise μ e da síntese H_∞ , foram introduzidas as iterações $D - K$ e $D, G - K$, apresentadas de forma sintética neste trabalho. Finalmente, buscando novas alternativas para as limitações então existentes, foi introduzida em 2011 síntese baseada em otimização não-diferenciável caracterizada pelo encapsulamento, em um controlador generalizado, dos multiplicadores junto com o controlador a ser projetado.

5.1 RESUMO DA CONTRIBUIÇÃO

Neste trabalho foi apresentada uma nova técnica de síntese- μ não-diferenciável cujo grande atrativo é permitir o projeto de controladores estruturados robustos a incertezas mistas. A síntese $D, G - K$ foi selecionada neste trabalho como técnica de referência para comparação por ser a mais aplicada atualmente em sistemas incertos com incertezas mistas.

Os resultados obtidos nas aplicações numéricas do Capítulo 4 mostraram que, quando comparados aos sintetizados pela $D, G - K$, os controladores obtidos pela síntese WD apresentam margem paramétrica geralmente maior ou semelhante para uma ordem menor do controlador. Em todos os casos analisados os controladores possuem ordem significativamente menor do que os usados como referência. Este é um fator que pode influenciar a sua aplicação em sistemas com limitações severas de hardware, reduzindo assim o esforço computacional requisitado pelo algoritmo de controle.

O tempo de processamento empregado pela síntese WD foi bastante variado, e não foi tomado em conta na maioria dos exemplos por não ter impacto na aplicação prática do controlador sintetizado. Ainda assim, foi percebido que este aumenta diretamente com o número de sementes utilizadas, ficando em torno de 20 a 40 minutos por simulação. As iterações $D, G - K$ foram processadas em tempos consideravelmente menores, quase sempre inferiores a um minuto.

Adicionalmente, a comparação entre tais técnicas deve destacar os efeitos positivos da imposição de restrições de estrutura no controlador da síntese não-diferenciável. Tais restrições permitem à síntese WD produzir controladores para aplicações específicas, como controladores descentralizados

ou baseados em observador, por exemplo. Tal característica se mostra como mais uma vantagem em relação à síntese $D, G - K$.

5.2 SUGESTÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Um ponto ainda fraco da síntese WD é a escolha das sementes, realizada atualmente de forma aleatória. Uma indicação para trabalhos futuros é a investigação de um processo mais eficiente de escolha dos pontos iniciais dos parâmetros sintonizáveis. A abordagem não-diferenciável proposta baseia-se em uma técnica de otimização local, e, portanto, uma má escolha do ponto inicial pode eventualmente resultar em um limite superior para μ mais conservador. As limitações impostas por essa medida foram contornadas empregando um número alto de sementes, fator que resultou em alto tempo de processamento. Como melhoria, poderiam ser aplicados critérios capazes de melhorar a seleção dos pontos iniciais para os blocos controladores selecionados a cada iteração. Uma das propostas sugeridas é a aplicação de algoritmos genéticos.

Outra sugestão é criar alguma forma de melhorar o processamento computacional durante o processo de síntese, talvez substituindo o processo de bisseção ou produzindo uma solução matematicamente mais rápida na busca pelo valor de γ .

Todas as técnicas de síntese robusta abordadas neste trabalho tratam todo o espectro admissível da incerteza com possível ocorrência a qualquer momento. Esta é uma consideração conservadora, já que na maioria das plantas físicas reais, os parâmetros não variam bruscamente. Levar em consideração uma taxa de variação limitada para os parâmetros incertos possibilita menor conservadorismo no controle aplicado. Este aspecto é atualmente abordado em algumas técnicas baseadas em formulações envolvendo funções de Lyapunov.

Um questionamento pertinente a respeito dos controladores robustos é a robustez às variações no próprio controlador. A síntese é realizada de forma a obter um controlador próximo ao limiar aceitável de estabilidade e/ou desempenho (para evitar excesso de conservadorismo). Tal abordagem é consistente porque o pior caso de todas as incertezas admissíveis está sendo considerado pela síntese. No entanto, como possíveis incertezas no controlador sendo sintetizado não são consideradas, uma pequena variação inesperada em um índice do controlador poderia ser capaz de desestabilizar todo o controle aplicado. Este é um aspecto do controle robusto que ainda carece de soluções.

Além destas sugestões, a síntese de controladores robustos é uma área que permanece sem uma técnica capaz de prover uma solução ótima para todos os casos. Portanto, ainda há motivação para a busca de outras técnicas de síntese.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- APKARIAN, P. **Nonsmooth μ synthesis**. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 21(13):1493–1508, 2011. ISSN 1099-1239.
- APKARIAN, P. e NOLL, D. **Nonsmooth H_∞ synthesis**. Automatic Control, IEEE Transactions on, 51(1):71–86, 2006. ISSN 0018-9286.
- BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in robustness analysis with multipliers**. Systems & Control Letters, 25(4):265 – 272, 1995. ISSN 0167-6911.
- BALAS, G. J., DOYLE, J. C., GLOVER, K., PACKARD, A. e SMITH, R. **μ analysis and synthesis toolbox user’s guide**. MathWorks, Natick, Mass, 1993.
- BALAS, G. J. e YOUNG, P. M. **Control design for variations in structural natural frequencies**. Journal of Guidance Control Dynamics, 18:325–332, março 1995.
- BARROS, D., FEKRI, S. e ATHANS, M. **Robust mixed- μ synthesis performance for mass-spring system with stiffness uncertainty**. Mediterrean Conference on Control and Automation in Proceedings IEEE International Symposium, págs. 743–748, 2005.
- BLONDEL, V. D. e TSITSIKLIS, J. N. **A survey of computational complexity results in systems and control**. Automatica, 36(9):1249 –1274, 2000.
- BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E. e BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Studies in Applied Mathematics, 15, 1994.
- DEODHARE, G. e PATEL, V. **A ‘modern’ look at gain and phase margins - an H_∞/μ approach**. Em Proc. of the AIAA Conf. on GNC, Boston, USA, 1998.
- DOYLE, J. C. **Analysis of feedback systems with structured uncertainties**. IEEE Proceedings on Control Theory and Applications, 129(6):242–250, 1982.
- FAN, M., TITS, A. e DOYLE, J. **Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics**. IEEE Transactions Automatic Control, 36(1):25–38, 1991.
- FU, M. **The real structured singular value is hardly approximable**. IEEE Transactions Automatic Control, 42(9):1286 –1288, 1997a.
- FU, M. e BARABANOV, N. **Improved upper bounds for the mixed structured singular value**. Automatic Control, IEEE Transactions on, 42(10):1447–1452, Oct 1997b. ISSN 0018-9286.
- HELMERSSON, A. **Methods for robust gain scheduling**. Tese de Doutorado, Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden, dezembro 1995.

- IWASAKI, T., HARA, S. e ASAI, T. **Well-posedness theorem: A classification of LMI/BMI-reducible robust control problems**. Em Int. Symp.Intelligent Robotic Syst., 1995, Bangalore, India, November 1995.
- KAO, C.-Y., MEGRETSKI, A. e JONSSON, U. **Specialized fast algorithms for IQC feasibility and optimization problems**. Automatica, 40(2):239 – 252, 2004. ISSN 0005-1098.
- LOPES, R. S. **Sintese de controladores robustos baseada em um novo limitante para o Valor Singular Estruturado**. Dissertacao de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.
- LY, J., SAFONOV, M. e AHMAD, F. **Positive real Parrott theorem with application to LMI controller synthesis**. Em American Control Conference, 1994, volume 1, págs. 50–52 vol.1, 1994.
- MEINSMA, G., SHRIVASTAVA, Y. e FU, M. **A dual formulation of mixed μ and on the losslessness of (D, G)-scaling**. IEEE Transactions Automatic Control, 42(7):1032 –1036, 1997.
- PACKARD, A. e DOYLE, J. **The complex structured singular value**. Automatica, 29:71–109, 1993.
- SAFONOV, M. G. **Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems**. IEE Proceedings, Part D, 6(129):251–256, 1982.
- SCHERER, C. *Theory of robust control*. Delft University of Technology, The Netherlands, April 2001.
- SCHERER, C. **LMI Relaxations in robust control**. European Journal of Control, 12(1):3 – 29, 2006. ISSN 0947-3580.
- SIMON, C. P. e BLUME, L. *Matematica para economistas*. Bookman, 2004. ISBN 978-85-363-0307-9.
- SKOGESTAD, S. e POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. John Wiley & Sons, 2005.
- TOKER, O. e OZBAY, H. **On the NP-hardness of the purely complex μ computation, analysis/synthesis, and some related problems in multidimensional systems**. American Control Conference, 1:447–451, 1995.
- YOUNG, P. M. **Controller design with real parametric uncertainty**. Control and Dynamical Systems, 016(TECHNICAL MEMORANDUM NO. CIT-CDS 93), 1993.
- YOUNG, P. M. **Controller design with real parametric uncertainty**. International Journal of Control, 65(3):469–509, 1996.
- YOUNG, P. e ASTROM, K. **μ meets bode**. Em American Control Conference, 1994, volume 2, págs. 1223–1227 vol.2, 1994.
- ZHOU, K., DOYLE, J. C. e GLOVER, K. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.

7 APÊNDICES

7.1 CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR UTILIZADOS

Para uma matriz complexa quadrada A ,

- A é dita não-singular se $\det(A) \neq 0$. Neste caso, a inversa A^{-1} existe.
- A é simétrica se $A^T = A$.
- A é Hermitiana (ou auto-adjunta) se $A = A^*$.
- A é anti-Hermitiana se $A = -A^*$.
- Se $AB = BA$, diz-se que as matrizes A e B comutam.
- Se A é Hermitiana, os seus autovalores são números reais.
- Um escalar λ é autovalor de uma matriz A se existir um vetor x diferente de zero tal que $Ax = \lambda x$. O vetor x é chamado autovetor de A .
- Os autovalores de A são os números que resumem as propriedades essenciais daquela matriz. O autovalor é um número tal que, se subtraído de cada entrada na diagonal de A , converte-a numa matriz singular. Portanto, λ é um autovalor de A se e somente se a matriz $(A - \lambda I)$ for singular (SIMON, 2004).
- A é definida positiva se $\Re(z^*Az) > 0$ para todo vetor complexo não-nulo z . Isto equivale a dizer que todos os seus autovalores são positivos.
- Para A positiva semidefinida, $A^{1/2}A^{1/2} = A$.
- $(AB)^T = B^T A^T$ e $(AB)^* = B^* A^*$.
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Propriedade: A soma de uma matriz complexa quadrada A e a sua transconjugada A^* resulta em uma matriz Hermitiana.

$$(A + A^*) = (A + A^*)^* \tag{7.1}$$

Prova

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$
$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix},$$

$$(A + A^*) = \begin{bmatrix} a_{11} + \overline{a_{11}} & \cdots & a_{1n} + \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + \overline{a_{1n}} & \cdots & a_{nn} + \overline{a_{nn}} \end{bmatrix},$$

$$(A + A^*)^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} + a_{11} & \cdots & \overline{a_{n1}} + a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} + a_{n1} & \cdots & \overline{a_{nn}} + a_{nn} \end{bmatrix}.$$

De forma análoga, pode-se mostrar que $(A - A^*) = -(A - A^*)^*$.

7.1.1 VALORES SINGULARES DE MATRIZES

Os valores singulares de uma matriz complexa $A_{n \times m}$, representados por $\sigma_i(A)$, $i = 1, \dots, k$, são as k raízes quadradas não negativas dos autovalores de A^*A (ou AA^*), onde $k = \min(n, m)$, ou seja:

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (7.2)$$

Um modo de representar uma matriz de forma a expor sua estrutura interna é a chamada Decomposição em Valores Singulares (DVS). Para uma matriz $A_{n \times m}$ a DVS é dada por:

$$A = U \Sigma V^H = \sum_{i=1}^k \sigma_i(A) u_i v_i^H, \quad (7.3)$$

onde $U_{n \times n}$ e $V_{m \times m}$ são matrizes unitárias formadas por vetores colunas dados por:

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_m),$$

e $\Sigma_{n \times m}$ contém a matriz diagonal Σ_1 com os valores singulares σ_i , reais e não negativos, arranjados em ordem decrescente:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad n \geq m \quad (7.4)$$

ou

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad n \leq m \quad (7.5)$$

e

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k); \quad k = \min(m, n), \quad (7.6)$$

onde

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k = \underline{\sigma}. \quad (7.7)$$

Esta decomposição não é única, uma vez que as matrizes U e V não são únicas. Contudo, os σ_i são únicos. Como U e V são unitárias, $\text{posto}(A) = \text{posto}(\Sigma)$. Então se $\text{posto}(A) = k$, somente os k primeiros valores singulares são positivos, os demais são iguais a zero.

Pode ser mostrado que as colunas de U e V são os autovetores unitários de AA^* e de A^*A respectivamente, conhecidos como vetores singulares à esquerda e à direita da matriz A .

Um resultado importante encontrado em (SKOGESTAD, 2005) refere-se ao maior valor singular de uma matriz bloco-diagonal :

$$\bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right) = \max \{ \bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B) \}. \quad (7.8)$$

7.1.2 PROPRIEDADES DE DETERMINANTES DE MATRIZES

São propriedades dos determinantes de matrizes:

- Se A_1 e A_2 são duas matrizes de mesmas dimensões, então

$$\det(A_1 A_2) = \det(A_2 A_1) = \det A_1 \cdot \det A_2. \quad (7.9)$$

- O determinante de uma matriz triangular ou bloco-triangular é produto dos determinantes dos blocos diagonais:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22}). \quad (7.10)$$

- A fórmula de Schur para o determinante de uma matriz particionada A é dado por:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \\ &= \det(A_{22}) \det(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}). \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde se assume que A_{11} e/ou A_{22} são não-singulares.

Prova: Note que A tem a seguinte decomposição se A_{11} é não-singular:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

onde $X = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. A primeira parte da EQ. 7.11 é provada calculando o determinante usando as propriedades demonstradas nas EQs. 7.9 e 7.10. De forma similar, se A_{22} é não-singular,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

onde $Y = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, do qual decorre a segunda parte da EQ. 7.11.

7.2 DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO DETALHADO

Este trecho mostra com mais detalhes as passagens algébricas empregadas no capítulo 3. Retomando do capítulo 3 a EQ. 3.8 e aplicando a definição de W de (3.10), tem-se:

$$-(W + W^*) + (W - W^*)M + M^*(W - W^*)^* + M^*(W + W^*)M < 0.$$

Manipulando a inequação:

$$\begin{aligned} & -(W + W^*) + (W - W^*)M + M^*(W^* - W) + M^*(W + W^*)M \\ = & -W - W^* + WM - W^*M + M^*W^* - M^*W + M^*WM + M^*W^*M \\ = & -W - M^*W + WM + M^*WM - W^* + M^*W^* - W^*M + M^*W^*M < 0. \end{aligned}$$

Invertendo a inequação:

$$\begin{aligned} & +W + M^*W - WM - M^*WM + W^* - M^*W^* + W^*M - M^*W^*M \\ = & [I + M^*][W - WM] + [I - M^*][W^* + W^*M] \\ = & [I + M^*]W[I - M] + [I - M^*]W^*[I + M] > 0. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Define-se então uma matriz X :

$$X \triangleq [I + M^*]W[I - M].$$

Note que:

$$\begin{aligned} X^* &= ([I + M^*]W[I - M])^* \\ &= [I - M]^*W^*[I + M^*]^* \\ &= [I - M^*]W^*[I + M]. \end{aligned}$$

Com esta definição, a equação 7.14 pode ser reescrita como:

$$X + X^* = \text{herm}(X) > 0. \tag{7.15}$$

Usando uma matriz de transformação $T \in \mathbb{R}^3$ de posto cheio, uma transformação de congruência

em X a mantém positiva definida. Combinando a transformação com a notação herm definida na equação 3.9, tem-se:

$$\begin{aligned} X > 0 &\Leftrightarrow T^*XT > 0, \\ \text{herm}(X) > 0 &\Leftrightarrow \text{herm}(T^*XT) > 0. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Aplicando a definição de herm e a transformação de congruência com $T = [I + M]^{-1}$ na equação 7.15, esta se torna:

$$\begin{aligned} &\text{herm}(X) \\ &= \text{herm}(T^*XT) \\ &= \text{herm}([I + M]^{-*}X[I + M]^{-1}) \\ &= \text{herm}([I + M^*]^{-1}X[I + M]^{-1}) \\ &= \text{herm}([I + M^*]^{-1}[I + M^*]W[I - M][I + M]^{-1}) \\ &= \text{herm}(W[I - M][I + M]^{-1}) > 0. \end{aligned} \tag{7.17}$$

7.3 DEMONSTRAÇÕES DOS LEMAS E TEOREMAS

- Para o lema 2.1:

Demonstração. Em geral, o raio espectral (ρ) provê um limite inferior para a norma espectral ($\bar{\sigma}$), e tem-se:

$$\max_{\Delta} \rho(M\Delta) \leq \max_{\Delta} \bar{\sigma}(M\Delta) \leq \max_{\Delta} \bar{\sigma}(\Delta)\bar{\sigma}(M) = \bar{\sigma}(M), \quad (7.18)$$

onde a segunda inequação na EQ. 7.18 existe porque $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$. Agora, é necessário mostrar que tem-se também a igualdade. Será este o caso se, para todo M , há um Δ' admissível tal que $\rho(M\Delta') = \bar{\sigma}(M)$. Tal Δ' existe de fato se Δ' é uma matriz cheia com todas as direções permitidas: Considere $\Delta' = VU^*$, onde U e V são os vetores singulares da esquerda e da direita na decomposição de $M = U\Sigma V^*$. Então $\bar{\sigma}(\Delta') = 1$ e $\rho(M\Delta') = \rho(U\Sigma V^*VU^*) = \rho(U\Sigma U^*) = \rho(\Sigma) = \bar{\sigma}(M)$. A terceira igualdade ocorre porque $U^* = U^{-1}$ e os autovalores não variam em transformações de similaridade. \square

- Para o teorema 2.3:

Demonstração. $\mu(M) < 1 \Leftrightarrow k_m > 1$. Então se $\mu(M) < 1$ para todas as frequências, a condição necessária para a instabilidade seria $\bar{\sigma}(\Delta) > 1$. Contudo, esta condição é incoerente com a normalização de Δ . Por outro lado, $\mu(M) = 1 \Leftrightarrow k_m = 1$. Portanto, se $\mu(M) = 1$, em alguma frequência há uma incerteza com $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$ tal que $\det(I - M\Delta) = 0$. Nesta frequência, o sistema é instável. \square

- Para o lema 2.2:

O lema decorre diretamente da definição de μ (2.31) e da aplicação do raio espectral à EQ. 2.21.

- Para o lema 3.1:

Demonstração. Fixando $\Delta \in \frac{1}{\gamma}\mathbf{B}\Delta$, basta provar que $(I - M\Delta)$ é não-singular (SCHERER, 2001). Ao invés disto, suponha o contrário: $(I - M\Delta)$ é singular. Então há $x \neq 0$ tal que $(I - M\Delta)x = 0$. Definindo $y \triangleq \Delta x$ e $x \triangleq My$, a EQ. 3.1 leva a

$$0 \leq x^* \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}^* Z \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}^* Z \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, a EQ. 3.2 implica em

$$0 > y^* \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}^* Z \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}^* Z \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Como $x \neq 0$, o vetor $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ também é diferente de zero. Esta contradição prova que $(I - M\Delta)$ não pode ser singular. \square

- Para o lema 3.2:

Demonstração. $\bar{\sigma}((I - X)(I + X)^{-1}) < 1$ é equivalente a

$$(I + X)^{-*}(I - X)^*(I - X)(I + X)^{-1} < I,$$

que equivale a

$$(I - X)^*(I - X) < (I + X)^*(I + X).$$

Removendo os termos comuns, tem-se $-X - X^* < X + X^*$, de onde decorre a equivalência com $\text{herm}(X) > 0$. \square

- Para o teorema 3.1

Demonstração. Partindo-se da condição de estabilidade robusta (3.21)-(3.24), já foi indicado que as restrições (3.23)-(3.24) são automaticamente satisfeitas em virtude da parametrização (3.27) adotada para o multiplicador. Com a nova parametrização, a condição (3.22) de positividade real também é automaticamente satisfeita para aqueles blocos de W associados a incertezas complexas, de modo que a condição (3.22) reduz-se a (3.29). Finalmente, a condição (3.30) pode ser obtida a partir da inequação (3.28) utilizando-se a transformação bilinear do lema 3.2 \square

7.4 FUNÇÕES SENSIBILIDADE E SENSIBILIDADE COMPLEMENTAR

(ZHOU, 1996) Considere uma configuração de controle em malha fechada onde a planta é representada por P e o controlador por K . Abrindo-se a malha no ponto de entrada da planta P , a transferência obtida percorrendo a malha aberta obtida é denominada transferência de malha aberta de entrada L , definida por:

$$L \triangleq KP \quad (7.19)$$

A transferência denominada função sensibilidade de entrada S é definida por:

$$S \triangleq \frac{I}{I+L} \quad (7.20)$$

E a transferência denominada função sensibilidade complementar de entrada T , por:

$$T \triangleq \frac{L}{I+L}, \quad S+T=I \quad (7.21)$$

As funções sensibilidade e sensibilidade complementar são empregadas na análise de estabilidade em malhas fechadas de controle.