

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

FILIPE ALCÂNTARA SOARES

**ANÁLISE DIRETA E INVERSA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR TRANSIENTE
COM TERMO FONTE VARIÁVEL EM VARETAS COMBUSTÍVEIS DE REATORES
NUCLEARES**

Rio de Janeiro

2017

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

FILIPE ALCÂNTARA SOARES

**ANÁLISE DIRETA E INVERSA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR
TRANSIENTE COM TERMO FONTE VARIÁVEL EM VARETAS
COMBUSTÍVEIS DE REATORES NUCLEARES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Rodrigo Otávio de Castro Guedes – Ph.D.
Coorientador: Prof. Francesco Scofano Neto – D.Sc.

Rio de Janeiro
2017

c2017

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

620.1	Soares, Filipe Alcântara
S676a	Análise direta e inversa da transferência de calor transiente com termo fonte variável em varetas combustíveis de reatores nucleares / Filipe Alcântara Soares; orientado por Rodrigo Otávio de Castro Guedes, Francesco Scofano Neto – Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2017.
	158p.: il.
	Dissertação (Mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2017.
	1. Curso de Engenharia Mecânica – teses e dissertações. 2. Reatores nucleares. 2. Transferência de calor. I. Guedes, Rodrigo Otávio de Castro. II. Scofano Neto, Francesco. III. Instituto Militar de Engenharia.

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

FILIPPE ALCÂNTARA SOARES

**ANÁLISE DIRETA E INVERSA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR
TRANSIENTE COM TERMO FONTE VARIÁVEL EM VARETAS
COMBUSTÍVEIS DE REATORES NUCLEARES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Rodrigo Otávio de Castro Guedes – Ph.D.

Coorientador: Prof. Francesco Scofano Neto – D.Sc.

Aprovada em 27 de Dezembro de 2017 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Rodrigo Otávio de Castro Guedes – Ph.D. do IME – Presidente

Prof. Francesco Scofano Neto – D.Sc. do IME

Prof. Aldélio Bueno Caldeira – D.Sc. do IME

Prof. Albino José Kalab Leiroz – Ph.D. da UFRJ

Rio de Janeiro

2017

A Deus por me guardar e iluminar os meus
caminhos ao longo desta jornada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por dar-me saúde e força para alcançar os meus objetivos.

Agradeço em especial meus pais Antônio e Roseny, por todo apoio incondicional, pela minha formação e educação. Vocês são exemplos de honestidade e superação. Aos meus irmãos Livia e Rafael, por acreditarem e torcerem por mim, me espelho em vocês.

Aos meus sobrinhos Igor e Guilherme, por trazerem mais alegria a nossa família.

À Maria Júlia por todo amor, carinho, felicidade e companheirismo. Você é especial e foi fundamental nesta jornada, sempre acreditou no meu potencial e me incentivou nos momentos mais difíceis do curso.

Aos meus cunhados, pelo incentivo e amizade.

Agradeço de coração minha família, por não terem medido esforços desde o início desta caminhada, vocês são meu alicerce.

Aos meus amigos, por todas as palavras de apoio e momentos compartilhados. Agradeço de coração a todos vocês que torcem pelo meu sucesso.

Ao professor Rodrigo Otávio de Castro Guedes, por todos os ensinamentos, confiança, paciência e orientação. Ao professor Francesco Scofano Neto, pelas sugestões e suporte no trabalho. Gostaria de agradecer fortemente vocês, professores Guedes e Francesco, por todo conhecimento transmitido, e por toda disponibilidade ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao Instituto Militar de Engenharia, pela oportunidade de estudo. É com grande satisfação e orgulho que concluo um curso de Mestrado nesta grandiosa instituição.

A todos os professores, que contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional, através de seus ensinamentos.

A todos os funcionários do Instituto Militar de Engenharia, que de alguma maneira contribuíram com o mestrado.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo aporte financeiro durante o mestrado.

“Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá”.

AYRTON SENNA

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	10
LISTA DE TABELAS	14
LISTA DE ABREVIATURAS, SÍMBOLOS E SUBSCRITOS.....	15
LISTA DE SIGLAS.....	18
1 INTRODUÇÃO	21
1.1 Motivação	22
1.2 Reator Nuclear – PWR.....	23
1.3 Problema Físico	26
1.4 Objetivos	28
1.5 Organização do Trabalho	29
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	31
2.1 Condução de Calor em Varetas Combustíveis.....	31
2.2 Problema de Transferência de Calor Inverso	36
3 MODELAGENS PROPOSTAS E SEUS FUNDAMENTOS	40
3.1 Primeira Modelagem – Região do Combustível	40
3.2 Segunda Modelagem – Região do Combustível e Revestimento	47
3.2.1. Estado Inicial em Regime Permanente.....	49
3.2.2 Balanço de Energia no Material de Revestimento.....	52
3.2.3 Formulação Final Dimensional do Problema	53
3.2.4 Adimensionalização.....	54
3.2.5 Solução pela Transformada Integral.....	56

3.3	Terceira Modelagem – Conjunto Completo (Combustível, Revestimento e Gap).....	61
3.3.1	Estado Inicial em Regime Permanente.....	62
3.3.2	Balanço de Energia no Material de Revestimento.....	66
3.3.3	Formulação Final Dimensional do Problema.....	67
3.3.4	Adimensionalização.....	67
3.3.5	Solução Pela Transformada Integral.....	69
3.3.6	Solução Apresentada por AN et al. (2014).....	74
4	PROBLEMA INVERSO.....	76
4.1	O Problema Direto.....	77
4.2	O Problema Inverso.....	77
4.3	Sensibilidade dos Parâmetros.....	80
4.4	Métodos de Solução do Problema Inverso.....	81
4.4.1	Método Determinístico de Levenberg-Marquardt.....	82
4.4.2	Método Estocástico Otimização por Enxame de Partículas (Particle Swarm Optimization - PSO).....	85
4.5	Critério de Parada.....	87
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	89
5.1	Resultados da Primeira Modelagem.....	89
5.2	Resultados da Segunda Modelagem.....	98
5.3	Resultados da Terceira Modelagem.....	104
5.4	Resultados do Problema Inverso.....	111
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	139
6.1	Conclusões.....	139
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	143

7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	145
8	APÊNDICES	154
8.1	Apêndice 1: Parâmetros Concentrados	155
8.2	Apêndice 2: Avaliação do Sistema Matricial	156

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.1.1	Esquema de funcionamento de uma usina nuclear do tipo PWR (ELETRONUCLEAR, 2013).....	24
FIG.1.2	Montagem do elemento combustível de um reator nuclear (Adaptado COELHO, 2012)	25
FIG.1.3	Pastilha combustível de Dióxido de Urânio (ULMER-SCHOLE, 2017).....	26
FIG.1.4	Problema unidimensional na vareta combustível	27
FIG.3.1	Problema unidimensional na vareta combustível para a primeira modelagem	40
FIG.3.2	Problema unidimensional na vareta combustível para a segunda modelagem	48
FIG.3.3	Circuito térmico entre o material de revestimento e refrigerante	49
FIG.3.4	Circuito térmico entre o “gap” e o fluido refrigerante.....	62
FIG.4.1	Relação entre o problema inverso e o problema direto.	76
FIG.4.2	Procedimento iterativo para o método PSO (adaptado COLAÇO et al., 2006).	87
FIG.5.1	Perfis de temperatura para $Bi=15$ (a) Caso 1. (b) Caso 3 com $c_1=1$	90
FIG.5.2	Perfis de temperatura para o caso 3 com c_1 iguais à 0.1 e 1 em $t=0,5$, com $Bi=15$	92
FIG.5.3	Perfis de temperatura para o caso 3 com $C_1=1$ e $t=0.5$, para $Bi=15$ e $Bi=40$	92
FIG.5.4	Perfis de temperatura para $Bi=15$ (a) Caso 2 com $c_3=4$. (b) Caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$	93
FIG.5.5	Perfis de temperatura para o caso 4 com $c_2=c_3=1$ e $t=0.05$, para $Bi=15$ e $Bi=40$	95
FIG.5.6	Análise de convergência da segunda modelagem para os casos propostos.	100
FIG.5.7	Comparação entre a primeira e segunda modelagem: perfis de temperatura adimensional para o caso 3 com $c_1=1$, para $Bi=15$	101
FIG.5.8	Comparação entre a primeira e segunda modelagem: perfis de temperatura adimensional para o caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$, para $Bi=15$	101

FIG.5.9	Variação do tempo crítico com relação ao número de Biot para os casos 3 e 4.	103
FIG.5.10	Análise de convergência para a terceira modelagem com $Bi=15$ (a) Caso 3 com $c_1=1$. (b) Caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$	105
FIG.5.11	Perfis de temperatura ao longo da região do combustível de urânio com $Bi=15$ em diferentes instantes de tempo (a) Caso 3 com $c_1=1$. (b) Caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$	106
FIG.5.12	Perfis de temperatura na superfície do material de revestimento ao longo do tempo com $Bi=15$ (a) Caso 3 com $c_1=1$. (b) Caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$	107
FIG.5.13	Perfis de temperatura ao longo da vareta combustível com $Bi=15$ (a) Caso 3 com $c_1=1$ em $t'=52s$. (b) Caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$ em $t'=32,5 s$	108
FIG.5.14	Perfil de temperatura na vareta combustível nuclear em condição normal de operação.	109
FIG.5.15	Perfil de temperatura na vareta combustível nuclear em condição de acidente por falta de refrigeração.	110
FIG.5.16	Determinante de JTJ para a função de teste expressada no caso 3.....	113
FIG.5.17	Caso 3: minimização da função objetivo com diferentes níveis de ruído ao longo do processo iterativo pelo método de Levenberg-Marquardt.....	117
FIG.5.18	Caso 3: minimização da função objetivo com diferentes níveis de ruído ao longo do processo iterativo pelo método do PSO.	117
FIG.5.19	Caso 3: evolução do parâmetro c_1 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 1% de ruído.....	118
FIG.5.20	Caso 3: evolução do parâmetro c_1 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 5% de ruído.....	119
FIG.5.21	Caso 3: evolução do parâmetro c_1 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 10% de ruído.....	119
FIG.5.22	Caso 3: população inicial com 50 indivíduos no método do PSO com 10% de ruído.	120
FIG.5.23	Caso 3: população com 50 indivíduos após a segunda iteração no método do PSO com 10% de ruído.....	121
FIG.5.24	Caso 3: população final com 50 indivíduos no método do PSO com 10% de ruído.	121

FIG.5.25 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 1% de ruído.	122
FIG.5.26 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 5% de ruído.	123
FIG.5.27 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 10% de ruído.	123
FIG.5.28 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 1% de ruído. ...	124
FIG.5.29 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 5% de ruído. ...	124
FIG.5.30 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 10% de ruído. .	125
FIG.5.31 Coeficientes de sensibilidade para a função de teste expressada no caso 4.	126
FIG.5.32 Caso 4: minimização da função objetivo com diferentes níveis de ruído ao longo do processo iterativo de Levenberg-Marquardt.	129
FIG.5.33 Caso 4: minimização da função objetivo com diferentes níveis de ruído ao longo do processo iterativo pelo método do PSO.	130
FIG.5.34 Caso 4: evolução do parâmetro c_2 e c_3 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 1% de ruído.	131
FIG.5.35 Caso 4: evolução do parâmetro c_2 e c_3 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 5% de ruído.	131
FIG.5.36 Caso 4: evolução do parâmetro c_2 e c_3 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 10% de ruído.	132
FIG.5.37 Caso 4: população inicial com 50 indivíduos no método do PSO com 10% de ruído.	133
FIG.5.38 Caso 4: população com 50 indivíduos após a terceira iteração no método do PSO com 10% de ruído.	133
FIG.5.39 Caso 4: população final com 50 indivíduos no método do PSO com 10% de ruído.	134

FIG.5.40 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 1% de ruído.	135
FIG.5.41 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 5% de ruído.	135
FIG.5.42 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 10% de ruído.	136
FIG.5.43 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 1% de ruído. ...	136
FIG.5.44 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 5% de ruído. ...	137
FIG.5.45 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 10% de ruído.	137

LISTA DE TABELAS

TAB.5.1	Análise de convergência para o somatório referente à solução do problema homogêneo em $r=1$	96
TAB.5.2	Análise de convergência para o somatório referente à solução do problema não-homogêneo em $r=1$, para o caso 3	96
TAB.5.3	Análise de convergência para o somatório referente à solução do problema não-homogêneo em $r=1$, para o caso 4	97
TAB.5.4	Dados de um típico reator nuclear PWR (TODREAS & KAZIMI,1990)	99
TAB.5.5	Propriedades médias para o Urânio e o Zircônio (AN et al., 2014)	99
TAB.5.6	Caso 3: parâmetro real utilizado para gerar os dados pseudoexperimentais, estimativa inicial e a população inicial utilizado para computar as temperaturas estimadas pelos métodos de otimização.....	114
TAB.5.7	Caso 3: resultados para a estimativa do parâmetro c_1 pelo método de Levenberg-Marquardt.....	114
TAB.5.8	Caso 3: resultados para a estimativa do parâmetro c_1 pelo método do PSO.	114
TAB.5.9	Caso 4: parâmetros reais utilizados para gerar os dados pseudoexperimentais, estimativas iniciais e populações iniciais utilizados para computar as temperaturas estimadas pelos métodos de otimização.	127
TAB.5.10	Caso 4: resultados para a estimativa dos parâmetros c_2 e c_3 pelo método de Levenberg-Marquardt.....	127
TAB.5.11	Caso 4: resultados para a estimativa dos parâmetros c_2 e c_3 pelo método do PSO.....	127

LISTA DE ABREVIATURAS, SÍMBOLOS E SUBSCRITOS

ABREVIATURAS

A	–	Área, m ²
A_{mn}	–	Parâmetro auxiliar referente ao problema de autovalor
$A_m(t)$	–	Coeficientes temporais
Bi	–	Número de Biot
C_p	–	Calor específico à pressão constante, J/kgK ⁻¹
e	–	Altura da vareta combustível, m
E	–	Nível de ruído
G	–	Termo fonte de calor constante volumétrico, W/m ³
g	–	Termo fonte de calor variável, W/m ³
G^*	–	Termo fonte de calor adimensional constante
G'	–	Termo fonte de calor adimensional variável
h	–	Coeficiente de transferência de calor, W/m ² K ⁻¹
I	–	Número total de medidas
J	–	Matriz jacobiana
J_{ij}	–	Coeficientes de sensibilidade
k	–	Condutividade térmica, W/mK ⁻¹
K	–	Número de iterações
L	–	Comprimento característico, m
Ln	–	Logaritmo natural
N	–	Número total de parâmetros desconhecidos
P	–	Parâmetros desconhecidos à ser estimado
p_g	–	Melhor posição global
p_i	–	Melhor posição da partícula
q	–	Taxa de calor, W
R	–	Raio do elemento em análise, m
r'	–	Coordenada espacial, m
r	–	Coordenada espacial adimensional

R_T	–	Resistência térmica, K/W
S	–	Função objetivo
T	–	Temperatura, K
t'	–	Coordenada temporal, s
t	–	Coordenada temporal adimensional
V	–	Volume, m ³
v	–	Velocidade da partícula
x_i	–	Posição da partícula
Y_i	–	Temperatura medida no tempo t_i

SÍMBOLOS

θ	–	Temperatura adimensional
ρ	–	Massa específica, Kg/m ³
α	–	Difusividade térmica, m ² /s
μ	–	Parâmetro adimensional referente à razão entre calor e massa específica
ε	–	Parâmetro adimensional relativo ao comprimento do combustível e do revestimento
β_m	–	Autovalores do problema de Sturm-Liouville
$R_0(\beta_m)$	–	Autofunções do problema de autovalor de Sturm-Liouville
$N(\beta_m)$	–	Norma do problema de autovalor de Sturm-Liouville
$\overline{\theta}_m(t)$	–	Temperatura transformada
$\overline{G}_m(t)$	–	Termo fonte transformado
$\overline{\Gamma}_m$	–	Condição inicial transformada
\overline{f}_n	–	Parâmetro auxiliar referente ao problema de autovalor
\overline{g}	–	Parâmetro auxiliar referente ao termo fonte de calor
ξ	–	Parâmetro auxiliar utilizado na terceira modelagem
Q	–	Parâmetro auxiliar utilizado na terceira modelagem

\ddot{Y}	–	Parâmetro auxiliar utilizado na terceira modelagem
φ^k	–	Parâmetro de amortecimento na iteração k
Ω^k	–	Matriz diagonal na iteração k
$\alpha 1$	–	Parâmetro inercial do PSO
$\beta 1$	–	Parâmetro de aprendizagem do PSO

SUBSCRITOS

c	–	Revestimento (cladding)
ci	–	Superfície interna do material de revestimento
co	–	Superfície externa do material de revestimento
ext	–	externo
f	–	Combustível (fuel)
g	–	gap
int	–	interno
∞	–	fluido refrigerante

LISTA DE SIGLAS

EDO	–	Equação diferencial ordinária
EDP	–	Equação diferencial parcial
IME	–	Instituto Militar de Engenharia
PSO	–	Particle Swarm Optimization (Otimização por enxame de partículas)
PWR	–	Pressurized Water Reactor (Reator de água pressurizada)

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo térmico do processo de geração de energia em uma vareta combustível nuclear, que fica inserida no núcleo do reator. Primeiramente é feita uma análise direta do problema térmico em escrutínio, e em seguida, um problema inverso na vareta combustível é investigado. O comportamento térmico do material combustível é basicamente determinado através da equação da condução de calor, onde uma descrição precisa da distribuição de temperatura no elemento é essencial, principalmente em caso de acidentes nucleares.

Procura-se obter soluções para a transferência de calor por condução transiente em varetas combustíveis, no evento de falha no sistema de barras de controle, que acarreta em um fluxo descontrolado de nêutrons, onde o termo fonte de calor passa a ser variável. Para a análise direta do problema foram desenvolvidas três modelagens, e seus resultados comparados, a fim de inferir acerca da influência térmica do material de revestimento e da região do “gap” na transferência de calor na vareta combustível.

O problema inverso possui o intuito de estimar o termo fonte de calor variável, por estimativa de parâmetros, através dos métodos de Levenberg-Marquardt e do PSO. O estudo inverso mostrou ter grande aplicabilidade para a análise térmica, pois se um sensor estiver disponível para medir as temperaturas na superfície da vareta combustível, o termo fonte variável pode ser estimado, e então, a distribuição de temperatura transiente na vareta pode ser obtida pelo problema direto.

Por falta de dados reais de temperaturas na superfície do cilindro, foram geradas medidas pseudoexperimentais com ruídos para a análise inversa, sendo que os métodos de solução utilizados apresentaram resultados satisfatórios. O método de Levenberg-Marquardt apresentou menor tempo computacional em relação ao PSO.

Da forma como se aplicou o conceito dos parâmetros concentrados na vareta combustível, apenas para a região do revestimento, viu-se que é possível utilizar a solução para altos coeficientes de transferência de calor por convecção, ao contrário do que é visto na solução clássica por parâmetros concentrados em toda a vareta combustível.

Foi visto que o número de Biot pode desempenhar um importante papel na análise térmica da vareta combustível, a fim de aumentar o tempo crítico, que é o período requerido para a fusão do material de revestimento. Tal fato, pode ser um aspecto interessante a fim de evitar ou amenizar os efeitos de um acidente nuclear.

Ademais, viu-se que o material de revestimento não possui influência térmica significativa no problema investigado, já a região do “gap” interfere no perfil de temperatura radial do combustível, entretanto esta não afeta o perfil de temperatura superficial da vareta.

ABSTRACT

This work depicts a thermal analysis of the energy generation process in a nuclear fuel rod, which it is inserted in the reactor core. First one, a direct analysis of the thermal problem under scrutiny is processed and next, an inverse problem in the fuel rod is investigated. The fuel thermal behavior is basically determined by solving the heat conduction equation, where an accurate temperature distribution is essential, mainly in the event of nuclear accidents.

It seeks to obtain solutions for the transient conduction heat transfer in fuel rods, in the case of failure in the control rod system, which causes an uncontrolled neutron flux and thus the heat source term becomes variable. Three models are developed for the direct analysis and the results obtained by each modeling are compared in order to evaluate the influence of the cladding, as well as the gap on the thermal problem.

The inverse problem aims to estimate the heat source term by a parameter estimation through the Levenberg-Marquardt and PSO methods. The inverse analysis showed large application for the thermal problem, since if there is an available sensor to measure the surface temperatures, the heat source term can be estimated, and thus the transient temperature distribution can be obtained by the direct problem.

Due to unavailability of real temperature data on the rod surface, pseudoexperimental measures with noises were generated for the inverse analysis, where the methods used for the inverse solution presented satisfactory results. The Levenberg-Marquardt method showed a lower computational time in relation to PSO.

As the concept of the lumped analysis in the fuel rod was applied, only for the region of the cladding, it was seen that it is possible to use the solution for high coefficients of convection heat transfer, contrary to what is seen in the classical solution by lumped analysis for the fuel rod.

It has been seen that the Biot number can play an important role in the thermal analysis of the fuel rod in order to increase the critical time, which is the time required for the meltdown of the cladding material. This fact can be an interesting aspect in order to avoid or mitigate the effects of a nuclear accident.

Furthermore, it was observed that the cladding material does not exert a major influence on the thermal problem for the fuel rod. It was seen that the gap influences the fuel radial temperature profile, however the gap region has not significant relevance for the rod surface temperature profile.

1 INTRODUÇÃO

Com o crescente aumento da população global, juntamente com as atividades industriais, a fim de satisfazer às necessidades daquela, a demanda por energia aumenta continuamente no mundo. Dentro deste contexto, o abastecimento de energia elétrica, fator que se tornou essencial à vida humana, causa preocupações em diversos setores da economia, sendo de extremo interesse o domínio e desenvolvimento das diferentes formas de geração de energia, tais como: termoelétrica, hidroelétrica, nuclear, solar, eólica, biomassa, entre outras.

Evidentemente, com as atuais mudanças climáticas em decorrência do aquecimento global e com os impactos ambientais oriundos das atividades humanas, é crescente a busca pelo desenvolvimento de recursos energéticos mais limpos, seguros e menos prejudiciais ao meio ambiente e a vida humana.

A produção de energia elétrica através das usinas nucleares é um assunto controverso e que causa grande preocupação na sociedade, entretanto esta fonte de geração possui diversos benefícios, como por exemplo a não emissão de gases do efeito estufa que provocam o aquecimento da atmosfera. Tal fato, faz com que essa seja considerada uma fonte de energia limpa. Além disso, independe das condições climáticas (sol, chuva e vento) para a sua operação, e permite a produção de energia elétrica em larga escala em uma área relativamente pequena, comparada à outras plantas de geração de eletricidade.

Uma usina nuclear deve seguir altos padrões de segurança durante sua operação, a fim de evitar acidentes nucleares. A exigência de procedimentos seguros cresceram principalmente em decorrência de alguns acidentes históricos, como o de Three Mile Island (em 1979 nos Estados Unidos), Chernobyl (em 1986 na Ucrânia) e Fukushima (em 2011 no Japão).

Segundo MONTEIRO (2013), vários países dependem da energia nuclear, sendo que na França e Lituânia três quartos da energia elétrica utilizada são da fonte nuclear, enquanto que na Bélgica, Suécia, Ucrânia e Hungria são mais de um terço e nos Estados Unidos cerca de um quinto.

Por certo, a energia nuclear e suas aplicações estão presentes na sociedade e oferecem avanços indiscutíveis em inúmeros ramos, tais como: indústria, medicina, agricultura, arqueologia, ciências aeroespaciais, entre outros (OLIVEIRA, 2014).

1.1 MOTIVAÇÃO

Com o contínuo aumento da demanda mundial de energia, não se pode dispensar o poder energético dos núcleos atômicos. De fato, a energia nuclear é um recurso viável e abundante para a produção de eletricidade, e nos próximos anos, esta fonte de geração deve assumir um papel cada vez mais importante nas matrizes energéticas dos países. Conseqüentemente, é de extremo interesse pesquisas que visam desenvolver a produção e principalmente, a segurança nas centrais nucleares.

Os sistemas de segurança e controle emergenciais precisam operar corretamente, a fim de minimizar qualquer tipo de falha, pois caso contrário, uma planta nuclear pode deixar de operar devidamente, e ocasionar por exemplo, o superaquecimento do núcleo do reator. Em consequência, as varetas combustíveis presentes no interior deste dispositivo podem derreter, e em caso de falha nos outros sistemas de contenção, um acidente nuclear acontece, onde os produtos radioativos são lançados ao meio ambiente, causando danos irreversíveis à vida humana. De acordo com VIEIRA (2010), o evento de falta de refrigeração do núcleo do reator, que danifique significativamente o mesmo, é denominado acidente severo.

É muito importante garantir a segurança de uma usina nuclear, sendo que uma boa compreensão do processo termohidráulico no elemento combustível é essencial em situações transientes (HAN, 2000).

Durante um acidente nuclear, o comportamento do combustível presente no núcleo de um reator é basicamente determinado resolvendo a equação da condução de calor (IAEA, 2007). Logo, uma descrição precisa da distribuição de temperatura transiente no elemento é essencial para prever o comportamento térmico em um reator nuclear em caso de um acidente. Ademais, a partir da distribuição de temperatura transiente, o tempo crítico, definido como o período para que a temperatura de fusão do material de revestimento seja alcançada, pode ser avaliado.

Assim sendo, é de extremo interesse fazer uma análise térmica das varetas combustíveis, que são a primeira barreira para impedir a liberação de materiais radioativos no meio ambiente. Além disso, a temperatura alcançada no núcleo do reator é um parâmetro relevante, sendo a sua determinação fundamental para o monitoramento operacional do reator. De acordo com SANTIAGO (2011), a análise térmica na vareta combustível tem importância para toda a física envolvida nos reatores nucleares, sendo fundamental para a alta performance na geração de eletricidade.

1.2 REATOR NUCLEAR – PWR

O princípio de funcionamento de uma usina nuclear é semelhante ao de uma usina termoelétrica, entretanto, nesta a energia elétrica é obtida pela queima de combustíveis fósseis, como carvão, óleo, derivados do petróleo, entre outros. Já naquela, a energia é obtida a partir da fissão do núcleo do átomo de urânio enriquecido. As usinas nucleares são instalações industriais que visam à produção de eletricidade.

Os reatores mais utilizados são os PWR (Reatores de Água Pressurizada), sendo esses 62% dos reatores comerciais do mundo (SANTIAGO, 2011). As plantas nucleares PWR possuem três circuitos de água independentes: primário, secundário e de refrigeração.

DUDERSTADT & HAMILTON (1976) abordam o princípio de funcionamento de uma usina nuclear PWR, vista na FIG. 1.1. O sistema primário é responsável pela refrigeração do núcleo do reator. Neste componente, se encontra os elementos combustíveis e é onde a geração de energia térmica através das fissões nucleares acontece. De acordo com ESKANDARI et al. (2012), uma reação de fissão nuclear é definida como a divisão do núcleo de um átomo pesado em dois menores, quando atingido por um nêutron. Após a colisão, uma imensa quantidade de energia é liberada, sendo absorvida pelo fluido refrigerante (água leve), que é inserido pela bomba principal de refrigeração do reator. Ainda no sistema primário, encontra-se o pressurizador, que é um dispositivo que mantém o refrigerante à alta pressão, a fim

de evitar que o mesmo se evapore ainda que submetido à temperatura elevada. O gerador de vapor é a interface entre o circuito primário e secundário, onde a água quente que veio do reator troca calor com a água fria presente no circuito secundário, e posteriormente, aquela retorna ao núcleo do reator, encerrando o seu ciclo no sistema primário.

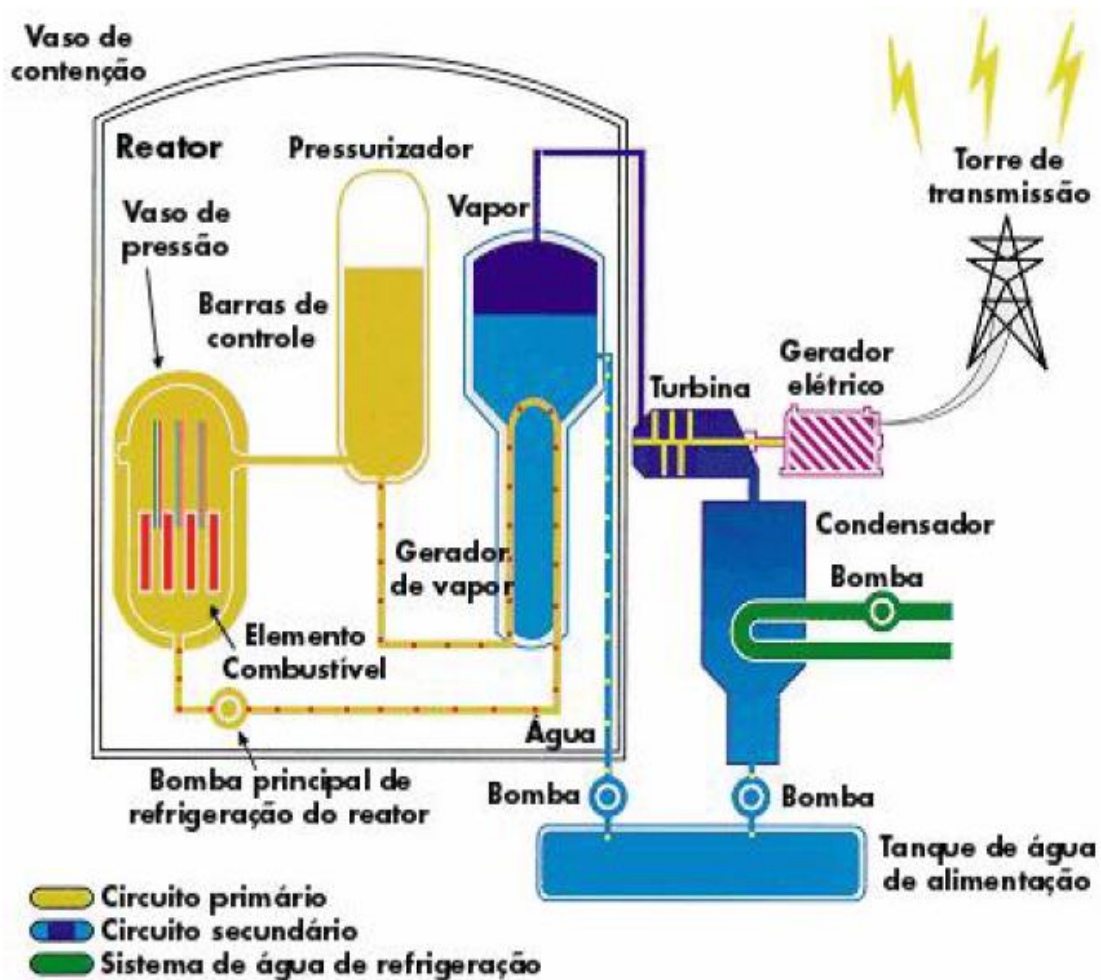


FIG. 1.1 Esquema de funcionamento de uma usina nuclear do tipo PWR (ELETRONUCLEAR, 2013)

Após receber calor, a água do sistema secundário torna-se vapor, a fim de operar um ciclo padrão Rankine. Neste ciclo, o vapor é dirigido para movimentar a turbina, onde há transformação da energia térmica em energia mecânica. Em seguida, o vapor de água sai da turbina, e no condensador se transforma em líquido ao trocar calor com a água do sistema de refrigeração, e então a água condensada é bombeada para o gerador de calor, a fim de completar o seu ciclo no sistema secundário. A água do

circuito de refrigeração geralmente é bombeada do mar ou de um rio próximo, através de sistemas hidráulicos que chegam dentro do condensador. Conforme já mencionado, os três circuitos explicitados são independentes, ou seja, isolados fisicamente, o que evita o contato direto entre os fluidos circulantes em cada sistema. A turbina é acoplada a um gerador elétrico, sendo por fim, a energia elétrica distribuída pelas torres de transmissão até chegar às residências, comércios e indústrias.

O reator é o principal elemento do circuito primário, sendo formado pelo núcleo, onde se encontra os elementos combustíveis, por estruturas de sustentação interna do núcleo, que também direcionam o refrigerante no processo de arrefecimento, envoltos no vaso de pressão. Além disso, o reator possui um dispositivo de inserção de barras de controle, com o intuito de controlar as reações de fissão nuclear em cadeia, já que essas barras são moderadoras de nêutrons (SOUSA, 2015).

Conforme supracitado, o núcleo do reator é composto por elementos combustíveis. Estes, possuem arranjos com varetas combustíveis e barras de controle. As varetas são compostas por pastilhas de dióxido de urânio (UO_2) enriquecido, que são inseridas em um material de revestimento (tubos de liga de zircônio – usualmente zircaloy-4), pressurizadas com gás hélio e tamponadas nas duas extremidades. O refrigerante flui uniformemente nos canais de refrigeração externos as varetas combustíveis, absorvendo a energia térmica liberada pela fissão nuclear do urânio. O procedimento de montagem do elemento combustível é visto na FIG. 1.2. As pastilhas combustíveis são cilíndricas (SOUZA, 2013), conforme ilustrado na FIG. 1.3.

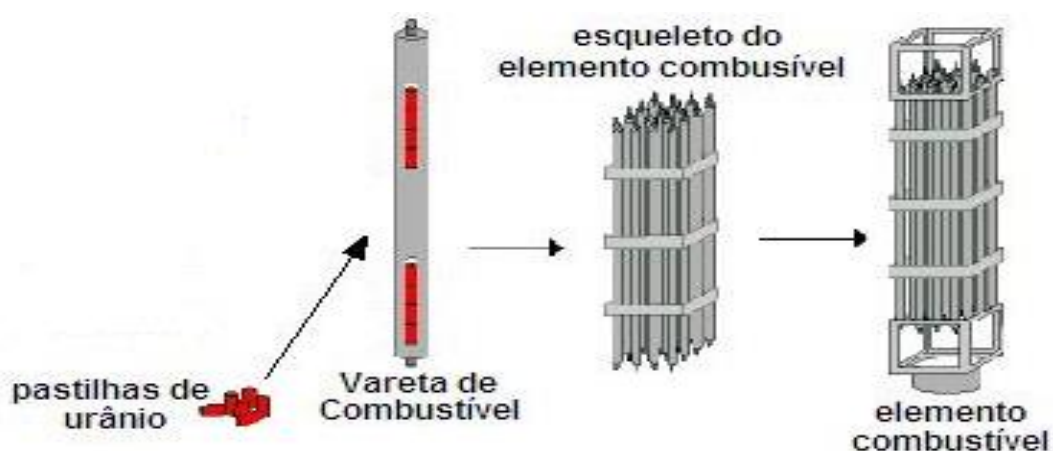


FIG. 1.2 Montagem do elemento combustível de um reator nuclear (Adaptado COELHO, 2012)



FIG. 1.3 Pastilha combustível de Dióxido de Urânio (ULMER-SCHOLE, 2017)

1.3 PROBLEMA FÍSICO

A dissertação concentra-se na análise térmica do processo de geração de energia no núcleo do reator, especificamente, o trabalho analisa a condução de calor em uma vareta combustível nuclear.

Para tal, sabe-se que este elemento possui formato cilíndrico, sendo formado pelo combustível (urânio enriquecido) e revestimento (zircaloy-4). Após a reação de fissão nuclear, a energia é transferida por condução do combustível para o revestimento, e a partir deste, o calor é transferido por convecção através do fluido refrigerante.

Um acidente nuclear pode acontecer em caso de arrefecimento inadequado das varetas combustíveis, onde a quantidade de calor gerado excede o calor removido, até o ponto em que o combustível e o revestimento se fundem (AN et al., 2014). Conforme supradito, em caso de um acidente severo, o comportamento da pastilha combustível é essencialmente elucidado pela resolução da equação da condução de calor.

Para estudar o problema físico da geração de calor na vareta combustível nuclear, considera-se a equação geral da difusão de calor submetida à hipótese de simplificação comumente aceita: problema unidimensional na direção radial com termo fonte.

A simplificação para tratar a transferência de calor unidimensional é baseada no fato de que na direção angular, o perfil de temperatura não varia, já que a geração de calor e o arrefecimento do cilindro são uniformes em toda a circunferência. Para a direção longitudinal da vareta, tem-se que a difusão de calor nesta direção é extremamente pequena comparada com a direção radial. Por consequência, as variações de temperatura nas direções angular e longitudinal do cilindro são desprezíveis, logo, podem ser negligenciadas na análise térmica.

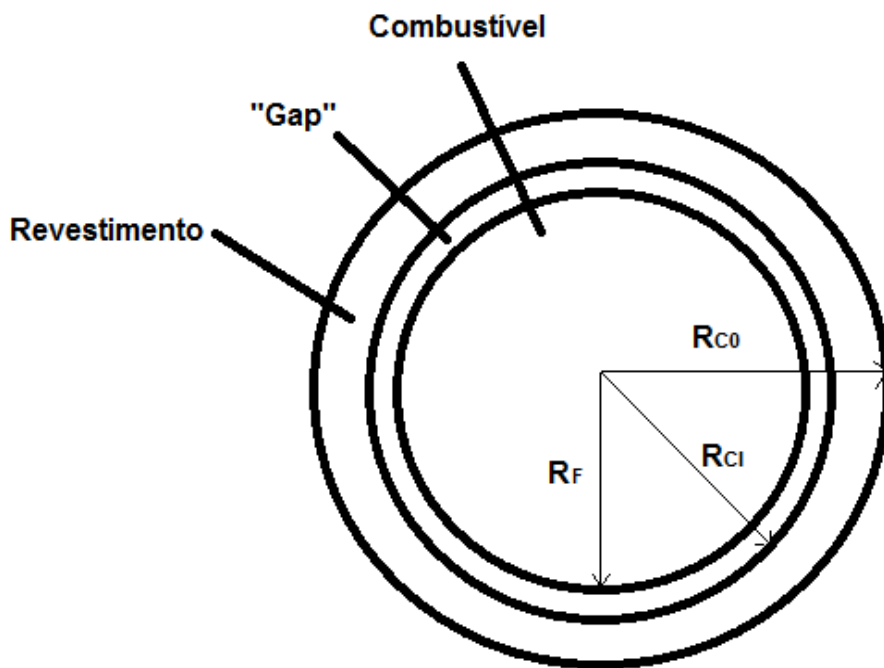


FIG. 1.4 Problema unidimensional na vareta combustível

A FIG. 1.4 ilustra o problema de condução de calor na direção radial da vareta combustível. A região conhecida como "gap", é o preenchimento com gás hélio entre as pastilhas combustíveis (fuel) e o material de revestimento (cladding). A transferência de calor nas três regiões é predominantemente por condução, entretanto à efeito de simplificação, na região do "gap" é usualmente considerado a convecção (AN et al, 2014; SANTIAGO, 2011; MOREIRA, 2013), que é definida como a transferência de calor através de um fluido devido ao movimento deste.

De acordo com BHATTACHARYA et al. (2001), durante uma operação normal no núcleo do reator, o fluxo de nêutrons é uniforme, e o termo fonte de calor volumétrico

permanece constante, sendo possível avaliá-lo através do conhecimento do número de núcleos fissionáveis e do fluxo de nêutrons. Logo, nestas condições o núcleo do reator opera em regime permanente, e então o perfil de temperatura na vareta combustível não varia ao longo do tempo.

Entretanto, em caso de falha no sistema de barras de controle, a incidência de nêutrons torna-se descontrolada, e então o termo fonte de calor volumétrico passa a variar, e o núcleo do reator passa a operar em regime transiente (BHATTACHARYA et al., 2001). Dentro deste contexto, a temperatura na vareta combustível eleva-se, até o ponto em que o material de revestimento se funde. Nesta análise, um importante parâmetro é o tempo crítico, definido como o período necessário para que a temperatura de fusão do material de revestimento seja alcançada. Novamente, fica evidente a importância de uma distribuição de temperatura transiente precisa na vareta combustível, pois a partir desta, o tempo crítico pode ser estimado em caso de um acidente nuclear.

1.4 OBJETIVOS

Este trabalho procura obter soluções para a transferência de calor por condução transiente em varetas combustíveis, no evento de falha no sistema de barras de controle, onde o termo fonte de geração de calor volumétrico passa a ser variável, devido ao fluxo descontrolado de nêutrons. Logo, procura-se resolver a equação da difusão de calor unidimensional com termo fonte de calor variável.

Inicialmente é analisado o problema direto, onde todas as causalidades são tratadas como conhecidas. Para tal, é feita como uma primeira aproximação para obter o perfil de temperatura transiente no elemento, uma solução geral totalmente analítica através do método da Transformada Integral, onde a região denominada “gap”, assim como a condução no revestimento, são levadas em consideração no coeficiente de transferência de calor por convecção entre a superfície do cilindro e o fluido refrigerante. Nesta contribuição, são propostas duas variações para o termo fonte de calor: uma dependente apenas do tempo e uma outra situação mais realista, em que esse parâmetro é dependente tanto do tempo quanto do espaço.

Outras duas modelagens são elaboradas através da análise clássica por parâmetros concentrados para a região do material de revestimento, uma sem considerar a região do “gap”, e a outra englobando as três regiões, conforme visto na FIG. 1.4. Para tais, são desenvolvidas duas soluções analítico-numéricas para a temperatura transiente na vareta com o auxílio do Método da Transformada Integral.

Tem-se o objetivo de comparar as soluções obtidas pelas três modelagens supracitadas e avaliar a influência do material de revestimento e do “gap” na análise térmica do reator nuclear. Ademais, é de interesse avaliar o tempo crítico obtido por cada solução.

AN et al. (2014) trataram o problema de condução de calor na vareta combustível nuclear com mudança de fase e termo fonte constante. Neste trabalho, a partir da terceira modelagem, onde é considerado a região do “gap”, será feita uma análise adicional com as mesmas condições apresentadas por AN et al. (2014), mas sem considerar a troca de estado físico, a fim de verificar a relevância da mudança de fase na análise térmica da vareta combustível.

Por fim, é solucionado um problema de transferência de calor inverso na vareta combustível, com o objetivo de estimar o termo fonte de calor variável por estimativa de parâmetros. O intuito do problema inverso é estimar uma ou mais características casuais do problema que são desconhecidas, a partir do conhecimento das temperaturas medidas (o efeito). Foram utilizados dois métodos de solução de problemas inversos e otimização, o determinístico de Levenberg-Marquardt, e o estocástico PSO (Otimização por Enxame de Partículas).

Após a solução do problema inverso, é de interesse avaliar o desempenho de cada método utilizado, e a aplicabilidade da análise inversa para o problema térmico em escrutínio.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 1 introduz questões relacionadas ao abastecimento global de energia elétrica e o importante papel que a energia nuclear pode desempenhar para as matrizes energéticas, já que de fato esta é uma fonte viável e abundante para a

geração de eletricidade. Este capítulo ainda apresenta a motivação deste trabalho, a explanação do problema físico analisado na vareta combustível e os objetivos da dissertação.

O capítulo 2 discorre a revisão bibliográfica acerca do tema em estudo, com o posicionamento deste trabalho em relação ao que é visto na literatura. Foram analisados trabalhos que abordam o fenômeno da condução de calor, principalmente em varetas combustíveis, e também estudos na área de problemas inversos e otimização.

O capítulo 3 explicita as modelagens desenvolvidas para o problema direto na vareta combustível, onde primeiramente é apresentada uma solução apenas para a região do material combustível, a segunda acrescida da região do revestimento, e a terceira para o conjunto completo (combustível, revestimento e “gap”).

O capítulo 4 aborda o problema de transferência de calor inverso na vareta combustível, com o intuito de estimar o termo fonte de calor variável por estimativa de parâmetros. A solução inversa é obtida por dois métodos: Levenberg-Marquardt e PSO.

O capítulo 5 apresenta os resultados e as discussões a respeito das modelagens desenvolvidas e do problema inverso investigado no problema térmico da vareta combustível. O capítulo 6 expõe as principais conclusões da dissertação e sugestões para possíveis trabalhos futuros.

Por fim, o capítulo 7 traz as referências bibliográficas e o capítulo 8 os apêndices.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise da transferência de calor por condução transiente em varetas combustíveis é extremamente importante em um reator nuclear, pois a partir desta, é possível obter o campo de temperatura no núcleo do reator, que é fundamental tanto no projeto quanto no monitoramento operacional do reator.

Devido à relevância deste assunto, vários estudos já foram e continuam sendo desenvolvidos. Este capítulo é dividido em duas seções, a primeira apresenta trabalhos já efetuados na análise da condução de calor em varetas combustíveis de reatores nucleares. Já a segunda discorre acerca de estudos na área de problema de transferência de calor inverso. Evidentemente, outras abordagens de engenharia que envolvam problema de condução de calor e/ou convecção, também auxiliam este estudo (MIKHAILOV & OZISIK, 1984; OZISIK, 1993; OZISIK & ORLANDE, 2000; INCROPERA et al., 2008; ÇENGEL, 2009).

2.1 CONDUÇÃO DE CALOR EM VARETAS COMBUSTÍVEIS

BHATTACHARYA et al. (2001) desenvolveram uma solução analítica para a transferência de calor com termo fonte variável aplicada em varetas combustíveis de reatores nucleares, em que se utilizou o método das Funções de Green. O trabalho desses autores foi base para a elaboração da solução analítica pelo método da Transformada Integral desenvolvida na seção 3.1, sendo essa a primeira modelagem desta dissertação para o cálculo da distribuição de temperatura na vareta combustível.

Em ordem de estudar o problema de transferência de calor por condução transiente, BHATTACHARYA et al. (2001) trataram o problema térmico apenas na direção radial. Na abordagem feita por esses autores, assume-se que a espessura do material de revestimento é muito pequena em relação ao raio do material combustível, e então, o revestimento não possui um raio determinado, ele é apenas uma posição radial (parede do cilindro). Evidentemente, nesta abordagem não foi considerada a

região conhecida como “gap”. A condutividade térmica, massa específica e o calor específico do combustível foram tratados como independentes da temperatura.

Uma das grandes contribuições da solução analítica desenvolvida no trabalho de BHATTACHARYA et al. (2001) é que para qualquer tipo de variação do termo fonte de calor (em função do tempo e/ou espaço), a distribuição de temperatura pode ser obtida. Conseqüentemente, o tempo crítico pode ser estimado. Ademais, a influência do número de Biot no problema térmico do reator nuclear também é investigado pelos autores.

ANNAFI et al. (2014) fizeram uma análise por diferenças finitas do perfil de temperatura transiente em um específico elemento combustível, denominado GHARR-1, onde as varetas combustíveis, assim como é visto nesta dissertação, possuem formatos cilíndricos. A fim de determinar a distribuição de temperatura transiente no GHARR-1 após o desligamento do reator, devido à um acidente de inserção de reatividade, os algoritmos da solução foram desenvolvidos e implementados no software MATLAB.

De acordo com ANNAFI et al. (2014), o GHARR-1 é um reator de pesquisa de baixa potência, com resfriamento por convecção natural, que emprega urânio enriquecido como combustível e água leve como moderador de nêutrons e fluido refrigerante.

ANNAFI et al. (2014) consideraram o poder da fissão residual do combustível e o decaimento dos produtos da fissões nucleares já ocorridas, como termo fonte de calor variável para o problema de condução transiente. Equivalente ao que é feito nesta dissertação, os autores citados consideram o perfil de temperatura em regime permanente como a condição inicial antes do desligamento do reator. Na análise térmica, a equação da condução foi considerada tanto no material combustível (urânio), quanto no material de revestimento, sendo que neste não há termo fonte. A região conhecida como “gap” foi negligenciada na análise, e portanto nenhum gás foi considerado na interface entre o combustível e o revestimento. A condutividade térmica, massa específica e o calor específico das pastilhas combustíveis e do material de revestimento foram tratadas como dependentes da temperatura na análise transiente. Tanto a solução em regime permanente, quanto a transiente, foram obtidas numericamente pela técnica das diferenças finitas.

ESKANDARI et al. (2012) fizeram um estudo térmico em elementos combustíveis nucleares. Eles utilizaram o software ABAQUS, que é baseado no método dos elementos finitos, para estudar as mudanças na temperatura e no fluxo de calor na vareta combustível. Esta foi dividida em uma série de elementos, onde foram investigadas as mudanças em cada um desses. Nesta abordagem, a condutividade térmica depende da temperatura, e como essa varia em cada ponto nodal, cada elemento possui uma condutividade térmica diferente. O trabalho investigou uma distribuição de temperatura para cada ponto nodal e finalmente, representou uma expressão geral para as mudanças de temperatura e fluxo de calor na direção radial do cilindro.

BLAIR & SELANDER (1972) investigaram o problema térmico de condução de calor em elementos combustíveis sob uma abordagem diferente da vista nesta dissertação. Enquanto essa analisa o problema transiente de condução de calor devido à um termo fonte de calor variável, ocasionado por um fluxo descontrolado de nêutrons, o trabalho dos autores supracitados apresenta uma análise para a temperatura transiente em um cilindro combustível, devido à um coeficiente de transferência de calor variável com o tempo.

O trabalho de BLAIR & SELANDER (1972) mostra um outro problema prático de interesse no reator nuclear, que é determinar a temperatura transiente no cilindro quando o coeficiente de transferência de calor entre a vareta combustível e o fluido refrigerante varia com o tempo. Tal fato, ocorre devido à falha no sistema de bombeamento do refrigerante ou algum outro distúrbio no sistema de arrefecimento do núcleo do reator. Os autores apresentaram dois métodos numéricos para a resolução da equação da condução de calor unidimensional em coordenadas cilíndricas, submetida à uma condição inicial de função prescrita (solução do problema em regime permanente, por exemplo) e à um resfriamento por convecção forçada, com coeficiente de transferência de calor variando com o tempo, sendo esse dado por uma função prescrita arbitrariamente.

AN et al. (2014) fizeram uma análise térmica do processo de fusão em uma vareta combustível nuclear. Baseado no fato de que o derretimento das barras de combustível é uma questão crucial que deve ser abordada no problema térmico de acidentes em reatores nucleares, o trabalho dos autores supraditos possui o objetivo de desenvolver um modelo matemático e realizar simulações numéricas de condução

de calor unidimensional com mudança de fase na vareta combustível, incluindo duas regiões: pastilha combustível (dióxido de urânio) e o revestimento (liga de zircônio). Para solucionar o problema, utilizou-se o método da entalpia, com discretização da equação por diferenças finitas. Vale ressaltar, que a região conhecida como “gap” é levada em consideração.

AN et al. (2014) dividiram a análise térmica transiente em quatro etapas diferentes: (1) fase transiente antes de qualquer derretimento; (2) fase do derretimento do revestimento; (3) fase transiente antes do derretimento da pastilha de urânio; (4) fase do derretimento da pastilha de urânio. Conforme feito na análise desta dissertação, inicialmente, antes de qualquer uma das etapas citadas anteriormente, o reator opera em regime permanente. Os autores analisaram os regimes transientes a partir da mudança do coeficiente de transferência de calor, o que simula um possível acidente nuclear devido à perda da capacidade do refrigerante em remover calor da vareta combustível.

A condução de calor rege predominantemente o problema, então, AN et al. (2014) resolvem a equação da condução de calor para a modelagem da pastilha combustível, assim como para o revestimento, porém neste, a equação da condução é tratada sem geração de calor, conforme esperado. Para a região do gap, os autores consideraram a transferência de calor por convecção. Os resultados obtidos foram comparados com a solução de CHEN et al. (1976), em que se utilizou o modelo clássico dos parâmetros concentrados para a resolução transiente do problema na vareta combustível com mudança de fase.

PONTEDEIRO et al. (2008) utilizaram o modelo dos parâmetros concentrados melhorado para análise térmica na vareta combustível. Segundo esses autores, a abordagem concentrada tem sido cada vez mais utilizada na análise termohidráulica em reatores nucleares. O principal objetivo do trabalho foi desenvolver uma formulação para o problema de condução de calor transiente com geração de calor na vareta combustível, através da análise por parâmetros concentrados melhorada, onde as propriedades termofísicas foram consideradas dependentes da temperatura.

Assim como na maioria das análises vistas, os autores consideraram a equação da condução de calor unidimensional. O efeito do material de revestimento e do “gap” na condução de calor foi representado pelo coeficiente de transferência de calor

efetivo, que inclui a resistência térmica do revestimento, do gap e o coeficiente de transferência de calor entre o revestimento e o fluido refrigerante.

No trabalho de PONTEDEIRO et al. (2008), a modelagem utilizando o conceito de parâmetros concentrados foi feita em todo o domínio da vareta combustível. Os resultados apresentados no trabalho citado mostraram que a formulação por parâmetros concentrados, pode ser uma metodologia de aproximação interessante para simular as temperaturas transientes no cilindro combustível, sendo assim, segundo os autores essa abordagem pode ser útil para o projeto, análise de segurança e simuladores de plantas de reatores nucleares.

Devido aos bons resultados obtidos pela análise por parâmetros concentrados, principalmente para baixos coeficientes de transferência de calor, nesta dissertação é utilizado esta metodologia para tratar o problema térmico no material de revestimento. SU & COTTA (2001), REGIS et al. (2000), CHEN et al. (1979), GHIAASIAAN et al. (1985), também investigaram a transferência de calor em varetas combustíveis através do conceito de parâmetros concentrados.

Nesta dissertação, as modelagens elaboradas foram avaliadas analiticamente pelo método da Transformada Integral. Este método é utilizado para solução de problemas não homogêneos, e será detalhado no capítulo seguinte. O método da Transformada Integral é elucidado em OZISIK (1993), sendo esta técnica consolidada em soluções de problemas termohidráulicos de engenharia, como visto em GUEDES E OZISIK (1992), COTTA et al. (2016), KNUPP et al. (2015), SOUZA et al. (2014), COTTA (2009), PRESGRAVE et al. (2009), SCOFANO NETO & GUEDES (1999), LEIROZ & COTTA (1993), COTTA & MIKHAILOV (1993).

Em suma, foi visto nesta seção que a distribuição de temperatura transiente pode ser ocasionada por diversos fatores no reator nuclear. Nesta dissertação, tal fato é ocasionado pelo fluxo descontrolado de nêutrons, devido à falha no sistema de barras de controle, fazendo com que o termo fonte de calor passe a ser variável, em função do tempo e/ou espaço.

Foi observado em diversos trabalhos que a análise térmica no material de revestimento é tratada por diferentes formas, sendo que em alguns casos o revestimento é apenas uma posição radial do cilindro, justificado pelo fato que o raio do elemento combustível é muito maior em relação ao raio do material de revestimento. Já em outras abordagens, é levado em conta a equação da condução

de calor sem termo fonte de calor para o material de revestimento. Também foi visto o caso em que todo o cilindro combustível foi modelado através da análise por parâmetros concentrados. Na primeira análise desta dissertação, o revestimento é tratado como apenas uma posição radial da vareta combustível. Nas duas modelagens seguintes são consideradas para a região do revestimento, a análise por parâmetros concentrados.

Foi visto também nesta seção que não é unanimidade considerar a região conhecida como “gap” na análise térmica da vareta combustível. De fato, o raio do “gap” é extremamente pequeno, principalmente em relação ao raio do cilindro, o que justifica a simplificação por parte de muitos autores em não examinar esta região na análise térmica. Todavia, é de interesse verificar a influência deste fator no problema térmico com base em dados concretos, portanto, a terceira modelagem leva em consideração o “gap”. Por fim, ao comparar as três soluções desenvolvidas será possível inferir acerca do comportamento térmico do material de revestimento e da região do “gap” no processo de geração de energia na vareta combustível.

2.2 PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR INVERSO

Os casos apresentados na seção anterior são conhecidos como problemas diretos de condução de calor, cujo principal objetivo é obter o campo de temperatura no sólido em questão, quando todas as características casuais do problema são especificadas, isto é, as condições de contorno, a condição inicial, as propriedades termofísicas e o termo de geração de energia.

Por outro lado, o objetivo do problema inverso é estimar uma ou mais dessas características casuais que são desconhecidas, a partir do conhecimento da temperatura ou fluxo de calor medido em alguma seção apropriada do meio (SILVA NETO & MOURA NETO, 2005; OZISIK & ORLANDE, 2000; KURPISZ & NOWAK, 1995).

Segundo COLAÇO et al. (2006), problemas de otimização geralmente lidam com a minimização ou maximização de uma função objetivo específica, a fim de encontrar variáveis desejadas. Em geral, para solucionar problemas inversos, um método de

otimização minimiza uma função objetivo, dada por um somatório dos erros quadráticos entre os dados medidos e estimados (CALDEIRA et al., 2017).

Em suma, no problema direto as causas são dadas e o efeito é determinado, enquanto que no problema inverso o efeito é dado e as causas são estimadas (ENGLE et al., 1996; OZISIK & ORLANDE, 2000; WOODBURY, 2002; COLAÇO et al., 2006).

Segundo COLAÇO (1998), os problemas diretos são matematicamente classificados como bem postulados, ou seja, a sua solução deve existir, ser única e estável em relação aos dados de entrada. Em contrapartida, os problemas inversos são em gerais mal postulados, e a solução é de um modo geral suscetível à instabilidades devido à erros experimentais nos dados de entrada (ALIFANOV, 1994; OZISIK & ORLANDE, 2000; COLAÇO et al., 2006).

Problemas inversos podem ser solucionados através de uma abordagem por estimação de parâmetro ou função. A segunda abordagem envolve a estimativa de uma função desconhecida, como por exemplo, a variação do termo fonte de calor no tempo e/ou espaço, sem nenhuma informação a priori de sua forma funcional. Todavia, se existe algum conhecimento da forma funcional, ou seja, se é sabido como a grandeza à ser determinada varia no tempo e/ou espaço, o problema inverso se reduz a estimação de coeficientes presentes na forma funcional conhecida previamente (COLAÇO et al., 2006; WOODBURY, 2002; DULIKRAVICH & MARTIN, 1996). Nesta dissertação, o problema inverso envolve a estimativa de parâmetros, já que há o conhecimento da forma funcional do termo de geração de energia no problema térmico da vareta combustível.

Atualmente, a abordagem de problemas inversos é uma importante ferramenta prática de análise, tanto do ponto de vista matemático quanto da engenharia, com larga aplicabilidade nos diversos ramos desta. Em estudos térmicos, existe diversos trabalhos com aplicações tecnológicas relevantes.

HUANG et al. (2016) utilizaram um método de problema inversos para estimar o termo fonte variável com o tempo em um fuso de alta velocidade. Os resultados mostraram que com apenas dois pontos de medição, o método proposto obteve resultados inversos acurados em relação à soluções exatas, mesmo com a presença de ruído nas medições. Os autores mostraram que a abordagem inversa pode ser usada em situações mais complexas, que envolvam por exemplo materiais diferentes. Outros problemas de transferência de calor inverso com o intuito de estimar o termo

fonte de calor também são vistos em SILVA NETO & OZISIK (1992), SILVA NETO & OZISIK (1993).

CALDEIRA et al. (2016) estimaram a porosidade durante o processo de solidificação do TNT, através da técnica de problema inverso baseada na otimização por enxame de partículas (PSO), que é um dos métodos de solução utilizados nesta dissertação. O estudo dos referidos autores mostrou que as informações fornecidas podem ser usadas para planejar o processo de fabricação de munições altamente explosivas, a fim de evitar poros e vazios dentro do explosivo solidificado. Portanto, viu-se que a porosidade pode ser estimada usando a técnica de problema inverso.

HAMILTON et al. (2014) utilizaram o método filtros de partículas a fim de estimar o coeficiente de transferência de calor dependente do tempo em um motor de combustão interna. Segundo os autores citados, a transferência de calor no cilindro é um dos principais fatores que influenciam a eficiência dos motores de combustão interna e as emissões de gases de escape. Logo, a análise inversa da transferência de calor no cilindro foi extremamente útil, pois é importante para a economia de combustível, assim como para a preservação ambiental.

SOUZA et al. (2014) estudaram um interessante problema de transferência de calor com aplicação para área da medicina. Os autores tiveram o objetivo de estabelecer uma estimativa do coeficiente de perfusão sanguínea em tecidos cancerosos, utilizando técnicas de problemas inversos. O coeficiente de perfusão sanguínea foi modelado como um parâmetro constante ou em função da posição. Vários métodos de otimização foram utilizados e o problema da transferência de calor foi representado pela equação de Pennes.

ORLANDE et al. (1997) resolveram um problema inverso que envolveu a estimação do coeficiente de transferência na superfície de uma placa, através do método do gradiente conjugado associado a uma equação adjunta. O estudo ilustra um processo real de refrigeração em máquinas de fundição. No trabalho dos autores citados, foram abordados os efeitos do número e localização dos sensores na solução do problema inverso.

ALEKSEEV (1997) avaliou o fluxo de calor através de um problema inverso de otimização baseado em métodos de gradiente, onde em cada iteração a equação de calor é resolvida pelo método das diferenças finitas. Através do estudo do referido autor, discutiu-se a possibilidade da criação de sensores ópticos.

JURKOWSKI et al. (1997) estimaram a condutividade térmica de termoplásticos em diferentes faixas de temperaturas. SILVA et al. (1997) estimaram a difusividade térmica e a condutividade térmica de materiais não-metálicos.

SU & SILVA NETO (2001) investigaram o problema inverso da transferência de calor por condução em varetas combustíveis de reatores nucleares. Os autores citados buscaram estimar o termo fonte de calor variável do combustível, similar ao objetivo do problema inverso desta dissertação.

SU & SILVA NETO (2001) não consideraram a região do material de revestimento e do “gap” na solução do problema inverso, eles simplificaram estes fatores através do coeficiente de transferência de calor por convecção entre o fluido e o cilindro. Em contrapartida, no problema inverso desta dissertação será considerada a modelagem completa do conjunto da vareta combustível, que inclui tanto o revestimento quanto o “gap”. No trabalho de SU & SILVA NETO (2001) o problema inverso foi solucionado por estimativa de função, através do método do gradiente conjugado com problema adjunto.

Para computar as medidas transientes de temperatura na vareta combustível, os autores supracitados geraram dados sintéticos com erros experimentais através da adição de erros randômicos às temperaturas exatas calculadas, similar ao que é feito nesta dissertação, por falta de dados reais de temperatura medidas na vareta combustível. Ademais, SU & SILVA NETO (2001) concluíram que a abordagem inversa é relevante e promissora, com grande aplicação tecnológica de problemas relevantes em termohidráulica de reatores nucleares.

Nesta seção foram vistos vários trabalhos que apresentam a larga aplicabilidade do uso de problemas inversos, e que de fato, possibilitam resultados relevantes em diversas áreas da engenharia.

Conforme mencionado na motivação deste trabalho, uma descrição precisa da distribuição de temperatura transiente na vareta combustível é essencial para prever o comportamento térmico em um reator nuclear em caso de um acidente. Portanto, se o termo fonte de calor variável é conhecido, determina-se o campo de temperatura transiente no elemento e também o tempo crítico. Logo, percebe-se a importância do problema inverso a fim de estimar o termo fonte de calor variável na análise térmica da vareta combustível.

3 MODELAGENS PROPOSTAS E SEUS FUNDAMENTOS

Este capítulo discorre acerca das modelagens desenvolvidas para a vareta combustível. Primeiramente é visto uma modelagem apenas para a região do combustível, em seguida, uma segunda solução acrescida pela região do material de revestimento, e por fim, uma modelagem completa do conjunto (combustível, revestimento e “gap”).

3.1 PRIMEIRA MODELAGEM – REGIÃO DO COMBUSTÍVEL

Esta seção apresenta a solução analítica desenvolvida para o problema térmico transiente na vareta combustível com termo fonte de calor variável. A modelagem é similar a elaborada por BHATTACHARYA et al. (2001), entretanto os referidos autores utilizaram as funções de Green para solucionar a equação da condução de calor, submetida às condições de contorno e a condição inicial, já neste trabalho é utilizado o Método da Transformada Integral.

A FIG. 3.1 ilustra o domínio considerado na análise térmica apresentada nessa primeira modelagem. Assume-se que a espessura do material de revestimento é muito pequena em relação ao raio do material combustível, e então o revestimento é apenas uma posição radial (superfície do cilindro).

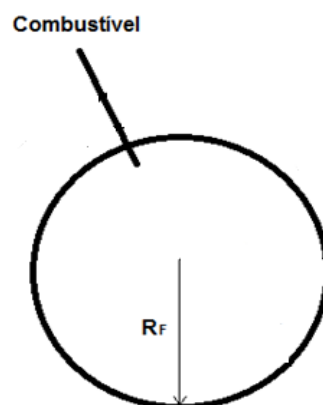


FIG. 3.1 Problema unidimensional na vareta combustível para a primeira modelagem

As variações de temperatura na direção angular e axial do cilindro são desprezíveis, conforme aludido na explanação do problema físico no capítulo 1. Logo, a equação da condução de calor unidimensional transiente, com propriedades termofísicas constantes, em coordenadas cilíndricas, é dada por,

$$\frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f}{\partial t'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right) + \frac{g(r', t')}{k_f} \quad (3.1)$$

submetida às seguintes condições de contorno na direção radial:

$$\frac{\partial T_f(t', 0)}{\partial r'} = 0 \quad (3.2)$$

$$k_f \frac{\partial T_f(t', R)}{\partial r'} + h(T_f - T_\infty) = 0 \quad (3.3)$$

Está implícito nas EQS. 3.2 e 3.3 o fato da vareta combustível ser tratada como um elemento sólido, que troca calor por convecção com o ambiente através do fluido refrigerante. Também é aparente na EQ. 3.3, a consideração que a troca de calor na interface de contato entre a pastilha combustível e o material de revestimento, na região denominada “gap”, assim como a condução no revestimento, são levadas em consideração no coeficiente de transferência de calor por convecção entre o cilindro e o refrigerante, como uma primeira aproximação a fim de se obter o perfil de temperatura transiente no elemento.

A fim de adimensionalizar o problema, os seguintes parâmetros adimensionais são utilizados:

$$\theta_f = \frac{T - T_\infty}{T_\infty} \quad (3.4)$$

$$r = \frac{r'}{R} \quad (3.5)$$

$$t = \frac{k_f t'}{\rho_f c_{p_f} R^2} = \frac{\alpha_f t'}{R^2} \quad (3.6)$$

$$G'(r,t) = \frac{g(r',t')R^2}{k_f T_\infty} \quad (3.7)$$

$$G^* = \frac{GR^2}{k_f T_\infty} \quad (3.8)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais nas EQS. 3.1, 3.2 e 3.3, obtém-se o problema na forma adimensional:

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_f}{\partial r} \right) + G'(r,t) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \theta_f(t,0)}{\partial r} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \theta_f(t,1)}{\partial r} + \frac{hR}{k_f} \theta_f = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta_f(t,1)}{\partial r} + Bi \theta_f = 0 \quad (3.11)$$

Conforme discutido na análise do problema físico no capítulo 1, enquanto o fluxo de nêutrons é constante, a operação é bem controlada no núcleo do reator, e então o termo fonte de calor volumétrico é constante e conhecido, sendo o estado de temperatura em regime permanente na vareta combustível. Ao resolver a equação da condução de calor, EQ. 3.9, mas com termo fonte constante (G^*), submetida às condições de contorno, EQS. 3.10 e 3.11, em regime permanente, obtém-se a seguinte distribuição de temperatura adimensional:

$$\theta_f = \frac{G^*}{4} (1-r^2) + \frac{G^*}{2Bi} \quad (3.12)$$

No evento de falha no sistema de barras de controle, o fluxo de nêutrons torna-se descontrolado, e o termo fonte passa a ser variável. As condições de contorno são as mesmas das EQS. 3.10 e 3.11, e a condição inicial é dada pela solução do problema em regime permanente, vista na EQ. 3.12. A equação de governo dada pela EQ. 3.9 é não homogênea, devido ao termo de geração de calor, enquanto que as condições de contorno são homogêneas.

A EQ. 3.9, junto com as condições de contorno, EQS. 3.10 e 3.11, submetida à distribuição de temperatura inicial, EQ. 3.12, define o problema em escrutínio. Este problema térmico transiente é solucionado analiticamente pelo método da Transformada Integral (OZISIK, 1993).

Este método é baseado em uma expansão de autofunções, com o auxílio do problema regular de autovalores de Sturm-Liouville para a difusão de calor. O principal objetivo desta técnica é transformar o problema original em um conjunto de equações diferenciais ordinárias desacopladas, que podem ser resolvidas de uma maneira totalmente analítica devido à natureza particular do problema analisado. Neste ponto, é feita uma relação inversa para determinar a distribuição de temperatura original. Os detalhes da solução são apresentados a seguir.

Deseja-se expressar a solução $\theta_f(r,t)$ em termos de uma expansão das autofunções, relacionadas ao problema homogêneo de autovalor no domínio considerado, em coordenadas cilíndricas.

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) R_0(\beta_m, r) \quad (3.13)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade das autofunções $R_0(\beta_m, r)$, obtém-se uma expressão geral para os coeficientes $A_m(t)$:

$$A_m(t) = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_0(\beta_m, r) dr \quad (3.14)$$

Reescrevendo a EQ. 3.13,

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_0(\beta_m, r)}{N(\beta_m)} \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_0(\beta_m, r) dr \quad (3.15)$$

O par da transformada integral em relação à variável r para a função $\theta_f(r,t)$, é dado por:

$$\overline{\theta_m(t)} = \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_0(\beta_m, r) dr \quad \longrightarrow \quad \text{“Transformada”} \quad (3.16)$$

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_0(\beta_m, r)}{N(\beta_m)} \overline{\theta_m(t)} \quad \longrightarrow \quad \text{“Inversa”} \quad (3.17)$$

Após obter o par da transformada integral, busca-se transformar a equação diferencial parcial, EQ. (3.9), em equação diferencial ordinária, conforme OZISIK (1993). A equação diferencial ordinária obtida é dada por:

$$\frac{d\overline{\theta_m(t)}}{dt} + \beta_m^2 \overline{\theta_m(t)} = \int_0^1 r G'(r,t) R_0(\beta_m, r) dr = \overline{G_m(t)} \quad (3.18)$$

onde a condição inicial transformada é:

$$\overline{\theta_m(0)} = \int_0^1 r \left(\frac{G^*}{4} (1-r^2) + \frac{G^*}{2Bi} \right) R_0(\beta_m, r) dr = \overline{\Gamma_m} \quad (3.19)$$

A solução formal para o sistema de equações diferenciais ordinárias, visto nas EQS. 3.18 e 3.19, é dada por:

$$\overline{\theta_m(t)} = e^{-\beta_m^2 t} \left[\overline{\Gamma_m} + \int_0^t \overline{G_m(\tau)} e^{\beta_m^2 \tau} d\tau \right] \quad (3.20)$$

Aplicando-se a fórmula da inversa da transformada, EQ. 3.17, obtém-se a solução para o perfil de temperatura adimensional na vareta combustível, dada por,

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_0(\beta_m, r)}{N(\beta_m)} e^{-\beta_m^2 t} \left[\int_0^1 r \left(\frac{G^*}{4} (1-r^2) + \frac{G^*}{2Bi} \right) R_0(\beta_m, r) dr + \int_0^t \int_0^1 r G'(r,t) R_0(\beta_m, r) e^{\beta_m^2 \tau} dr d\tau \right] \quad (3.21)$$

onde os autovalores β_m são dados pelas raízes positivas da equação transcendental, EQ. 3.22. A fim de resolver esta e obter os autovalores, foi utilizado um esquema numérico do tipo Newton-Raphson (GILAT, 2008).

$$\beta_m J_1(\beta_m) = Bi J_0(\beta_m) \quad (3.22)$$

$R_0(\beta_m)$ e $1/N(\beta_m)$ são respectivamente, as autofunções e o inverso da norma do problema regular de autovalores de Sturm-Liouville, em coordenadas cilíndricas.

$$R_0(\beta_m, r) = J_0(\beta_m r) \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{N(\beta_m)} = \frac{2}{J_0^2(\beta_m) (\beta_m^2 + Bi^2)} \beta_m^2 \quad (3.24)$$

Substituindo as EQS. 3.23 e 3.24 na EQ. 3.21, e resolvendo a primeira integral do lado direito da equação, a solução do problema pode ser reescrita como:

$$\theta_f(r,t) = 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Bi}{\beta_m^2 (\beta_m^2 + Bi^2)} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} e^{-\beta_m^2 t} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{(\beta_m^2 + Bi^2)} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0^2(\beta_m)} e^{-\beta_m^2 t} \int_{\tau=0}^t \int_{r=0}^1 r G'(r,t) J_0(\beta_m r) e^{\beta_m^2 \tau} dr d\tau \quad (3.25)$$

Observa-se então, que para qualquer tipo de variação do termo fonte com relação à r e t , a integral dupla da equação acima pode ser avaliada, e posteriormente, o perfil de temperatura na vareta combustível é obtido. BHATTACHARYA et al. (2001)

propuseram dois tipos de variações para o termo fonte G' , e a partir desses, o perfil de temperatura é avaliado resolvendo analiticamente a integral dupla da EQ. 3.25.

Caso 1: $G' = G^* t$

$$\begin{aligned} \theta_f(r, t) = & 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Bi}{\beta_m^2(\beta_m^2 + Bi^2)} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} e^{-\beta_m^2 t} \\ & + 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Bi}{\beta_m^2(\beta_m^2 + Bi^2)} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} \left(t - \left(\frac{1 - e^{-\beta_m^2 t}}{\beta_m^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Caso 2: $G' = G^* r^2 e^{c_3 t}$

$$\begin{aligned} \theta_f(r, t) = & 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Bi}{\beta_m^2(\beta_m^2 + Bi^2)} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} e^{-\beta_m^2 t} \\ & + 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} \left(\frac{e^{c_3 t} - e^{-\beta_m^2 t}}{c_3 + \beta_m^2} \right) \left(\frac{Bi + 2 - \frac{4Bi}{\beta_m^2}}{\beta_m^2 + Bi^2} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

As soluções obtidas analiticamente para os casos 1 e 2, através do método da Transformada Integral, foram iguais às obtidas por BHATTACHARYA et al. (2001) pela técnica das Funções de Green, conforme esperado, já que ambos os métodos são baseados em uma expansão de autofunções. Vale ressaltar que a condição inicial do problema, dada pela EQ. 3.12, é função da posição radial, do termo de geração uniforme conhecido (G^*) e do número de Biot. Logo, independentemente da variação proposta para o termo fonte de calor G' , a condição inicial é sempre a mesma.

Este trabalho propõe duas novas variações para o termo fonte de calor variável G' , expressados nos casos 3 e 4, e a partir desses, o perfil de temperatura na vareta combustível é avaliado resolvendo analiticamente a integral dupla da EQ. 3.25. Na análise dos resultados, capítulo 5, será discutido a interpretação física acerca de cada caso proposto no problema térmico da vareta combustível.

Caso 3: $G^l = G^* (1 + c_1 t)$

$$\begin{aligned} \theta_f(r, t) = & 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Bi}{\beta_m^2 (\beta_m^2 + Bi^2)} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} e^{-\beta_m^2 t} \\ & + 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Bi}{\beta_m^2 (\beta_m^2 + Bi^2)} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} \left(c_1 \left(t - \frac{1}{\beta_m^2} \right) + e^{-\beta_m^2 t} \left(\frac{c_1}{\beta_m^2} - 1 \right) + 1 \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Caso 4: $G^l = G^* (1 + c_2 r^2) e^{c_3 t}$

$$\begin{aligned} \theta_f(r, t) = & 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Bi}{\beta_m^2 (\beta_m^2 + Bi^2)} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} e^{-\beta_m^2 t} \\ & + 2G^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m r)}{J_0(\beta_m)} \left(\frac{e^{c_3 t} - e^{-\beta_m^2 t}}{c_3 + \beta_m^2} \right) \left(\frac{Bi + c_2 \left(Bi + 2 - \frac{4Bi}{\beta_m^2} \right)}{\beta_m^2 + Bi^2} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.2 SEGUNDA MODELAGEM – REGIÃO DO COMBUSTÍVEL E REVESTIMENTO

Esta seção apresenta a solução analítico-numérica para a região do combustível e do revestimento. O problema térmico no material de revestimento foi examinado através da análise por parâmetros concentrados, e utilizou o método da Transformada Integral para solucionar analiticamente a modelagem desenvolvida, e posteriormente, o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante foi avaliado numericamente.

A essência da transferência de calor por condução pela técnica concentrada é a hipótese que a temperatura no sólido é uniforme no espaço, em qualquer instante durante o transiente. A abordagem clássica por parâmetros concentrados (OZISIK, 1993; INCROPERA et al., 2008) é largamente difundida na literatura, e maiores detalhes sobre este tema são apresentados no apêndice 1.

A região conhecida como “gap” não é levada em consideração nesta formulação, o que faz com que o raio do combustível seja o mesmo que o raio da superfície interna

do revestimento, conforme visto na FIG. 3.2, que mostra o problema unidimensional na vareta combustível para a análise em questão.

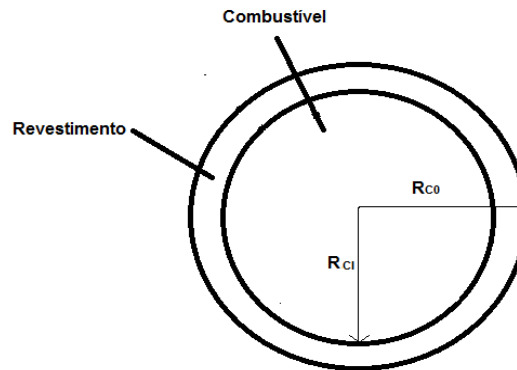


FIG. 3.2 Problema unidimensional na vareta combustível para a segunda modelagem

O problema começa a ser modelado a partir das seguintes relações:

$$\frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f}{\partial t'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right) + \frac{g(r', t')}{k_f} \quad \begin{array}{l} 0 < r' < R_{ci} \\ t' > 0 \end{array} \quad (3.30)$$

$$T_f(r', t'=0) = f(r') \quad 0 \leq r' \leq R_{ci} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial T_f(t', r'=0)}{\partial r'} = 0 \quad t' > 0 \quad (3.32)$$

E mais uma equação diferencial ordinária para a distribuição de temperatura no material de revestimento ($R_{ci} \leq r' \leq R_{co}$) e sua condição inicial, obtida pela análise concentrada.

Para a região do combustível, onde há geração de calor, a condução de calor unidimensional transiente é dada pela EQ. 3.30. A EQ. 3.31 representa a condição inicial, onde a função $f(r')$ será obtida nos passos seguintes. A condição de contorno, EQ 3.32, mostra a condição de simetria no centro da pastilha de urânio (combustível). Já para a região do material de revestimento, $R_{ci} \leq r' \leq R_{co}$, uma equação diferencial ordinária será desenvolvida através da análise concentrada.

3.2.1 ESTADO INICIAL EM REGIME PERMANENTE

Como o termo fonte de calor é constante em regime permanente, pode-se empregar a familiar análise por resistência térmica para encontrar a distribuição de temperatura na vareta combustível.

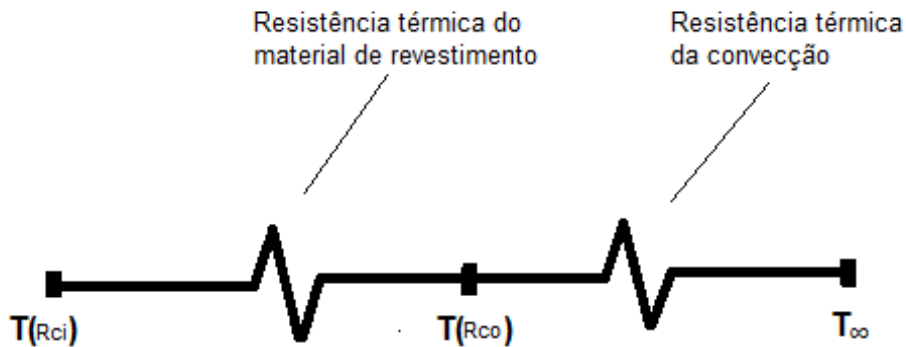


FIG. 3.3 Circuito térmico entre o material de revestimento e refrigerante

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 R_c &= R_{co} - R_{ci} \\
 A_{ext} &= 2.\pi.(R_{ci} + R_c).e \\
 A_{int} &= 2.\pi.(R_{ci}).e
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

onde R_c é o raio do revestimento, e é a altura da vareta combustível, A_{ext} e A_{int} são respectivamente, as áreas de troca de calor da parte externa e interna do material de revestimento. A partir da FIG. 3.3, a resistência térmica do material de revestimento e da convecção são respectivamente,

$$R_{T_c} = \frac{Ln\left(\frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}}\right)}{2.\pi.e.k_c}
 \tag{3.34}$$

$$R_{T_{\infty}} = \frac{1}{2.\pi.(R_{ci} + R_c).e.h} \quad (3.35)$$

A taxa de transferência de calor por condução na pastilha combustível de urânio é dada pela geração de calor no mesmo, ocasionado pela fissão nuclear. Logo, pode-se escrever a seguinte relação,

$$q = -k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right|_{r'=R_{ci}} (2.\pi.(R_{ci}).e) = G\pi(R_{ci})^2 e \quad (3.36)$$

em que G é o termo fonte volumétrico constante. Desprezando a resistência de contato entre o urânio e o revestimento, da análise do circuito térmico, FIG. 3.3, tem-se que,

$$q = \frac{T(R_{ci}) - T_{\infty}}{R_{T_{total}}} \quad (3.37)$$

$$T(R_{ci}) - T_{\infty} = q \cdot \left[\frac{\text{Ln}\left(\frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}}\right)}{2.\pi.e.k_c} + \frac{1}{2.\pi.(R_{ci} + R_c).e.h} \right] \quad (3.38)$$

mas como o raio do material de revestimento é muito menor que o raio do combustível ($R_c \ll R_{ci}$), a seguinte relação pode ser feita:

$$\text{Ln}\left(\frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}}\right) = \text{Ln}\left(1 + \frac{R_c}{R_{ci}}\right) \cong \frac{R_c}{R_{ci}} \quad (3.39)$$

Substituindo as EQS. 3.36 e 3.39 na EQ. 3.38, obtém-se a temperatura em R_{ci} :

$$T(R_{ci}) = T_{\infty} + \frac{G.(R_{ci})^2}{2} \left[\frac{R_c}{R_{ci}.k_c} + \frac{1}{h.(R_{ci} + R_c)} \right] \quad (3.40)$$

Mas também, do circuito térmico sabe-se que:

$$q = \frac{T(R_{co}) - T_{\infty}}{R_{T_{\infty}}} \quad (3.41)$$

e então, substituindo as EQS. 3.35 e 3.36 na EQ. 3.41, obtém-se a temperatura em R_{co} .

$$T(R_{co}) = T_{\infty} + \frac{G \cdot (R_{ci})^2}{2 \cdot h \cdot (R_{ci} + R_c)} \quad (3.42)$$

Pela análise por parâmetros concentrados é esperado que a temperatura em toda a região do material revestimento seja uniforme, logo:

$$T(R_{ci}) \cong T(R_{co}) \rightarrow \frac{R_c}{R_{ci} k_c} \ll \frac{1}{h(R_{ci} + R_c)} \quad (3.43)$$

$$\frac{hR_c}{k_c} \ll \frac{R_{ci}}{(R_{ci} + R_c)} \rightarrow \frac{hR_c}{k_c} \ll 1$$

onde a condição vista na EQ. 3.43 deve ser atendida na solução proposta. Então, para o material de revestimento a condição inicial é dada por:

$$T_c(0) = T(R_{ci}) = T(R_{co}) \quad (3.44)$$

A distribuição de temperatura inicial para o combustível é obtida a partir da solução da equação de calor unidimensional, em regime permanente com termo fonte de geração uniforme, vista na EQ. 3.45,

$$\frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} \left(r' \frac{dT_f}{dr'} \right) = -\frac{G}{k_f} \quad 0 < r' < R_{ci} \quad (3.45)$$

submetida às seguintes condições de contorno:

$$\frac{dT_f(0)}{dr'} = 0 \quad (3.46)$$

$$T_f(r' = R_{ci}) = T(R_{ci}) = T(R_{co}) \quad (3.47)$$

Observa-se que a condição de contorno, EQ. 3.47, foi obtida pela análise do circuito térmico entre o material de revestimento e o refrigerante. Através de uma dupla integração em relação à coordenada espacial na EQ. 3.45, e aplicando as condições de contorno, EQS. 3.46 e 3.47, obtém-se a distribuição de temperatura inicial para a região do combustível, sendo essa dada por:

$$T_f(r', 0) = T_\infty + \frac{G.(R_{ci})^2}{2.h.(R_{ci} + R_c)} + \frac{G.(R_{ci})^2}{4.k_f} \left(1 - \left(\frac{r'}{R_{ci}} \right)^2 \right) \quad (3.48)$$

3.2.2 BALANÇO DE ENERGIA NO MATERIAL DE REVESTIMENTO

O balanço de energia no material de revestimento para a análise concentrada é dado por:

$$\rho_c c_{p_c} V_c \frac{dT_c}{dt'} = -k_f A_{int} \frac{\partial T_f}{\partial r'} \Big|_{r'=R_{ci}} - h A_{ext} (T_c - T_\infty) \quad (3.49)$$

Na EQ. 3.49, o lado esquerdo da igualdade representa a taxa de aumento da energia interna do material de revestimento, o primeiro termo do lado direito mostra a energia que entra no material de revestimento por condução, vinda do combustível, e o termo restante é referente a energia trocada por convecção pelo material de revestimento com o ambiente pelo refrigerante.

Para o cálculo do volume do material de revestimento, tem-se que,

$$V_c = \pi.(R_{ci} + R_c)^2 - R_{ci}^2)e = \pi.e.(2.R_{ci}.R_c + R_c^2) \quad (3.50)$$

mas $2R_{ci}R_c$ é muito maior que R_c^2 ($2R_{ci}R_c \gg R_c^2$), logo o volume do material de revestimento pode ser reescrito como,

$$V_c = \pi.e.(2.R_{ci}.R_c) \quad (3.51)$$

substituindo V_c , A_{ext} e A_{int} no balanço de energia, EQ. 3.49, obtém-se a equação diferencial que rege a temperatura no material de revestimento,

$$\rho_c c_{p_c} R_c \frac{dT_c}{dt'} = -k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right|_{r'=R_{ci}} - h \frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}} (T_c - T_\infty) \quad (3.52)$$

submetida à condição inicial, EQ. 3.44.

3.2.3 FORMULAÇÃO FINAL DIMENSIONAL DO PROBLEMA

A partir da modelagem desenvolvida, obteve-se a formulação final dimensional:

$$\frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f}{\partial t'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right) + \frac{g(r', t')}{k_f} \quad \begin{array}{l} 0 < r' < R_{ci} \\ t' > 0 \end{array} \quad (3.53)$$

$$T_f(r', 0) = T_\infty + \frac{G.(R_{ci})^2}{2.h.(R_{ci} + R_c)} + \frac{G.(R_{ci})^2}{4.k_f} \left(1 - \left(\frac{r'}{R_{ci}} \right)^2 \right) \quad 0 \leq r' \leq R_{ci} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial T_f(t', 0)}{\partial r'} = 0 \quad t' > 0 \quad (3.55)$$

$$\rho_c c_{p_c} R_c \frac{dT_c}{dt'} = -k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right|_{r'=R_{ci}} - h \frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}} (T_c - T_\infty) \quad t' > 0 \quad (3.56)$$

$$R_{ci} \leq r' \leq R_{co}$$

$$T_c(0) = T(R_{ci}) = T(R_{co}) = T_\infty + \frac{G.(R_{ci})^2}{2.h.(R_{ci} + R_c)} \quad t' = 0 \quad (3.57)$$

$$R_{ci} \leq r' \leq R_{co}$$

3.2.4 ADIMENSIONALIZAÇÃO

Em geral, o procedimento de adimensionalizar as equações é oportuno, já que diminui o número de incógnitas que governam o problema sem acarretar perda de informação no mesmo. Além disso, este procedimento ajuda compreender melhor o significado físico de cada termo presente nas equações do problema formulado.

A fim de adimensionalizar a formulação final do problema, EQS. 3.53 à 3.57, os seguintes parâmetros adimensionais são utilizados:

$$\theta_f = \frac{T_f - T_\infty}{T_\infty} \quad (3.58)$$

$$\theta_c = \frac{T_c - T_\infty}{T_\infty} \quad (3.59)$$

$$r = \frac{r'}{R_{ci}} \quad (3.60)$$

$$t = \frac{\alpha_f t'}{R_{ci}^2} \quad (3.61)$$

$$\varepsilon = \frac{R_c}{R_{ci}} \quad (3.62)$$

$$\mu = \frac{\rho_c c_{p_c}}{\rho_f c_{p_f}} \quad (3.63)$$

$$Bi = \frac{h(R_{ci} + R_c)}{k_f} \quad (3.64)$$

$$G' = \frac{g(r', t') R_{ci}^2}{k_f T_\infty} \quad (3.65)$$

$$G^* = \frac{G R_{ci}^2}{k_f T_\infty} \quad (3.66)$$

Ao substituir os parâmetros adimensionais nas EQS. 3.53 à 3.57, obtém-se a formulação final adimensional do problema:

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_f}{\partial r} \right) + G'(r, t) \quad \begin{array}{l} 0 < r < 1 \\ t > 0 \end{array} \quad (3.67)$$

$$\theta_f(r, 0) = \frac{G^*}{2} \left(\frac{1}{Bi} + \left(\frac{1-r^2}{2} \right) \right) \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \theta_f(t, 0)}{\partial r} = 0 \quad t > 0 \quad (3.69)$$

$$\mu \varepsilon \frac{d\theta_c}{dt} = - \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial r} \right|_{r=1} - Bi \theta_c \quad t > 0 \quad (3.70)$$

$$\theta_c(0) = \frac{G^*}{2} \frac{1}{Bi} \quad (3.71)$$

Lembra-se que da análise por parâmetros concentrados:

$$\theta_f(1, t) \cong \theta_c(t) \quad (3.72)$$

Em suma, a EQ. 3.67 representa a condução de calor no elemento combustível, submetida à condição inicial, EQ. 3.68, e à condição de contorno de simetria, EQ. 3.69. Evidentemente, a equação diferencial parcial, EQ. 3.67, necessita de duas condições de contorno em relação ao espaço. Como o contorno em $r=0$ já foi especificado, precisa-se obter informação em $r=1$, a fim de solucioná-la. Note que esta informação está contida na EQ. 3.70, que rege o comportamento da temperatura no material de revestimento. Tal fato faz com que as soluções para a temperatura transiente nas duas regiões (combustível e revestimento) estejam acopladas. A EQ. 3.71 representa a condição inicial no material de revestimento.

3.2.5 SOLUÇÃO PELA TRANSFORMADA INTEGRAL

O problema formulado, EQS. 3.67 à 3.71, será resolvido pelo método da Transformada Integral. Conforme supracitado, neste método procura-se expressar a solução $\theta_f(r,t)$ em termos de uma expansão das autofunções, relacionadas ao problema homogêneo de autovalor de Sturm-Liouville no domínio considerado:

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) R_0(\beta_m, r) \quad (3.73)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade das autofunções $R_0(\beta_m, r)$, obtém-se uma expressão geral para os coeficientes $A_m(t)$:

$$A_m(t) = \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_0(\beta_m, r) dr \quad (3.74)$$

Reescrevendo a EQ. (3.73),

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} R_0(\beta_m, r) \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_0(\beta_m, r) dr \quad (3.75)$$

O par da transformada integral em relação à variável r para a função $\theta_f(r,t)$, é dado por:

$$\overline{\theta_m(t)} = \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_0(\beta_m, r) dr \longrightarrow \text{“Transformada”} \quad (3.76)$$

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} R_0(\beta_m, r) \overline{\theta_m(t)} \longrightarrow \text{“Inversa”} \quad (3.77)$$

Após obter o par da transformada integral, busca-se transformar a equação diferencial parcial, EQ. 3.67, em equação diferencial ordinária, conforme OZISIK (1993). Na verdade, obtém-se várias equações diferenciais ordinárias, que estão relacionadas com a quantidade de autovalores à serem considerados na análise, conforme pode ser visto na EQ. 3.78,

$$\frac{d\overline{\theta_m(t)}}{dt} + \beta_m^2 \overline{\theta_m(t)} = \overline{G_m(t)} + \frac{R_0(\beta_m, 1)}{N^{1/2}(\beta_m)} \overline{g(t)} + Bi \frac{R_0(\beta_m, 1)}{N^{1/2}(\beta_m)} \theta_c(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{d\overline{\theta_n(t)}}{dt} \quad (3.78)$$

submetidas às condições iniciais transformadas,

$$\overline{\theta_m(0)} = \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r R_0(\beta_m, r) \theta_f(r, 0) dr \quad (3.79)$$

e acoplado com,

$$\mu \varepsilon \frac{d\theta_c}{dt} = -Bi \theta_c - \overline{g(t)} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{d\overline{\theta_n(t)}}{dt} \quad (3.80)$$

onde a equação diferencial ordinária, EQ. 3.80, é submetida à condição inicial, EQ. 3.71. Algumas incógnitas que aparecem nas relações anteriores são dadas por,

$$\overline{G_m(t)} = \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r R_0(\beta_m, r) G'(r, t) dr \quad (3.81)$$

$$A_{mn} = \frac{R_0(\beta_m, 1)}{N^{1/2}(\beta_m)} \overline{f_n} = \frac{R_0(\beta_m, 1)}{N^{1/2}(\beta_m)} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_n)} \int_0^1 r R_0(\beta_n, r) dr \quad (3.82)$$

$$\overline{g(t)} = - \int_0^1 r G'(r, t) dr \quad (3.83)$$

sendo que os autovalores β_m são dados pelas raízes positivas da equação transcendental, EQ. 3.84. A fim de resolver esta e obter os autovalores, foi utilizado um esquema numérico do tipo Newton-Raphson (GILAT, 2008).

$$\beta_m J_1(\beta_m) = Bi J_0(\beta_m) \quad (3.84)$$

$R_0(\beta_m)$ e $1/N^{1/2}(\beta_m)$ são respectivamente, as autofunções e o inverso da raiz quadrada da norma do problema regular de autovalores de Sturm-Liouville, em coordenadas cilíndricas,

$$R_0(\beta_m, r) = J_0(\beta_m r) \quad (3.85)$$

$$\frac{1}{N(\beta_m)} = \frac{2}{J_0^2(\beta_m)} \frac{\beta_m^2}{(\beta_m^2 + Bi^2)} \rightarrow \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} = \frac{\sqrt{2}}{J_0(\beta_m)} \frac{\beta_m}{\sqrt{(\beta_m^2 + Bi^2)}} \quad (3.86)$$

Em resumo, para obter a distribuição de temperatura transiente no combustível, precisa-se resolver as EDO's expressadas na EQ. 3.78 submetidas às condições iniciais transformadas, EQ. 3.79, e posteriormente, utilizar a fórmula de inversão, explicitada na EQ. 3.77. Todavia, o sistema de EDO's, EQ. 3.78, apresenta uma incógnita que é a distribuição de temperatura no material de revestimento, sendo que essa é obtida pela solução da EDO vista na EQ. 3.80, submetida à condição inicial, EQ. 3.71. Portanto, a análise térmica na vareta combustível está acoplada através dessas relações supracitadas, sendo este um problema do tipo:

$$[C_m]\{\theta'\} + [D_m]\{\theta\} = \{H_m(t)\} \quad (3.87)$$

$$\{\theta(0)\} = \{E_m\}$$

Ao truncar um valor para M e N , é possível reescrever as equações diferenciais ordinárias, EQS. 3.78 e 3.80, na fórmula matricial, como mostrado na EQ. 3.88. A EQ. 3.89 representa a matriz das condições iniciais. Observa-se que ao truncar M e N , a quantidade de equações do sistema matricial será sempre uma a mais que o valor truncado para estes parâmetros, devido ao acoplamento com a EDO que rege o comportamento térmico do material de revestimento, EQ. 3.80. Tal fato é ilustrado nas EQS. 3.88 e 3.89, onde o valor truncado para M e N foi igual à 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R_0(\beta_1, 1) \cdot N^{-\frac{1}{2}}(\beta_1) \cdot \mu \cdot \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & R_0(\beta_2, 1) \cdot N^{-\frac{1}{2}}(\beta_2) \cdot \mu \cdot \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & R_0(\beta_3, 1) \cdot N^{-\frac{1}{2}}(\beta_3) \cdot \mu \cdot \varepsilon \\ \overline{f_1} & \overline{f_2} & \overline{f_3} & \mu \cdot \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\overline{\theta_1}}{dt} \\ \frac{d\overline{\theta_2}}{dt} \\ \frac{d\overline{\theta_3}}{dt} \\ \frac{d\overline{\theta_c}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\theta_1} \\ \overline{\theta_2} \\ \overline{\theta_3} \\ \overline{\theta_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{G_1(t)} \\ \overline{G_2(t)} \\ \overline{G_3(t)} \\ -\overline{g(t)} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\theta_1(0)} \\ \overline{\theta_2(0)} \\ \overline{\theta_3(0)} \\ \overline{\theta_c(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_1)} \int_0^1 r R_0(\beta_1, r) \theta_f(r, 0) dr \\ \frac{1}{N^{1/2}(\beta_2)} \int_0^1 r R_0(\beta_2, r) \theta_f(r, 0) dr \\ \frac{1}{N^{1/2}(\beta_3)} \int_0^1 r R_0(\beta_3, r) \theta_f(r, 0) dr \\ \frac{G^*}{2} \frac{1}{Bi} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$\overline{G_m(t)}$, $\overline{f_n}$ e $\overline{g(t)}$ são dados respectivamente, pelas EQS. 3.81, 3.82 e 3.83. Na EQ. 3.88, a primeira matriz do lado esquerdo da igualdade (matriz C), possui os elementos da diagonal principal iguais à 1, exceto o último elemento desta, que é igual à $\mu \varepsilon$. A última linha desta matriz é dada por $\overline{f_n}$, onde n é a respectiva coluna em que o

elemento se encontra, exceto para o último termo da linha, que como já mencionado é igual à $\mu\varepsilon$. A última coluna desta matriz é dada por $\frac{R_0(\beta_m, 1)}{N^{1/2}(\beta_m)}\mu\varepsilon$, onde m é a respectiva linha em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da coluna. Todos os outros elementos da matriz C são nulos. O vetor coluna de derivadas da temperatura $\{\theta\}$ é dado por $\frac{d\overline{\theta}_m}{dt}$, onde m é a respectiva linha em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da coluna, que é dado por $\frac{d\theta_c}{dt}$.

A matriz diagonal (D) possui os elementos da diagonal principal iguais à β_m^2 , onde m é a respectiva linha em que este elemento se encontra, exceto para o último termo, que é igual à Bi . O vetor coluna de temperaturas $\{\theta\}$ é dado por $\overline{\theta}_m$, onde m é a respectiva linha em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da coluna, que é dado por θ_c . O vetor coluna H é dado por $\overline{G_m(t)}$, exceto para o último termo que é igual $-\overline{g(t)}$.

A matriz (E) que representa a condição inicial, possui elementos dados por $\overline{\theta}_m(0)$, onde m é a respectiva linha em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da coluna, que é dado por $\theta_c(0)$, que é a condição inicial da região do material de revestimento.

A fim de obter o campo de temperatura transiente na vareta combustível, o sistema matricial descrito anteriormente foi avaliado numericamente no MATLAB, onde os detalhes da solução são apresentados no apêndice 2.

3.3 TERCEIRA MODELAGEM – CONJUNTO COMPLETO (COMBUSTÍVEL, REVESTIMENTO E GAP)

Esta seção apresenta a terceira modelagem proposta para o problema térmico em escrutínio, onde engloba-se o conjunto completo da vareta, com as regiões do combustível, “gap” e revestimento. A solução desenvolvida nesta seção é similar à apresentada na seção 3.2. Para a região do combustível tem-se a equação da condução com termo fonte de calor e para o material de revestimento, a análise por parâmetros concentrados (apêndice 1).

Já para a região do gap tem-se um coeficiente de transferência de calor, h_g , a fim de considerar a resistência térmica entre a região do material combustível e do revestimento (SU & COTTA, 2001; REGIS et al., 2000; CHEN et al., 1979). O problema unidimensional para o conjunto completo da vareta combustível é visto na FIG. 1.4.

Novamente, uma solução analítico-numérica é desenvolvida. O método da Transformada Integral solucionou analiticamente o modelo, e seguidamente, o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante foi avaliado numericamente.

O problema físico começa a ser modelado a partir das seguintes relações:

$$\frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f}{\partial t'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right) + \frac{g(r', t')}{k_f} \quad \begin{array}{l} 0 < r' < R_f \\ t' > 0 \end{array} \quad (3.90)$$

$$T_f(r', t'=0) = f(r') \quad 0 \leq r' \leq R_f \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial T_f(t', r'=0)}{\partial r'} = 0 \quad t' > 0 \quad (3.92)$$

$$-k_f \frac{\partial T_f(t', r'=R_f)}{\partial r'} - h_g (T_f(r'=R_f) - T_c(R_{ci})) = 0 \quad t' > 0 \quad (3.93)$$

E mais uma equação diferencial ordinária para a distribuição de temperatura no material de revestimento, $R_{ci} \leq r' \leq R_{co}$, e sua condição inicial, obtida pela análise concentrada.

Para a região do combustível, onde há geração de calor, a condução de calor unidimensional transiente é dada pela EQ. 3.90, submetida à condição inicial, EQ. 3.91. A condição de contorno, EQ. 3.92, mostra a condição de simetria no centro do combustível. Já a condição de contorno, EQ. 3.93, representa o fluxo de calor na região do gap. Observe que esse é função da temperatura na parede interna do revestimento, o que faz com que as soluções para as regiões do combustível e do material de revestimento estejam acopladas. O comportamento térmico na região do revestimento é obtido através da equação diferencial ordinária pela análise concentrada, em $R_{ci} \leq r' \leq R_{co}$.

3.3.1 ESTADO INICIAL EM REGIME PERMANENTE

Em regime permanente o termo fonte de calor é constante e conhecido, portanto, pode-se empregar a familiar análise por resistência térmica para encontrar a distribuição de temperatura na vareta combustível.

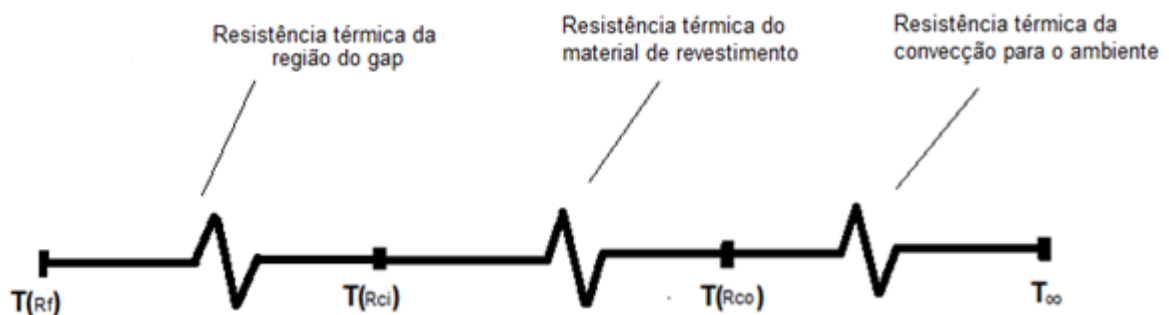


FIG. 3.4 Circuito térmico entre o “gap” e o fluido refrigerante

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
R_g &= R_{ci} - R_f \\
R_c &= R_{co} - R_{ci} \\
A_{ext} &= 2.\pi.(R_{ci} + R_c).e \\
A_{int} &= 2.\pi.(R_{ci}).e \\
A_{(r'=R_f)} &= 2.\pi.(R_f).e
\end{aligned}
\tag{3.94}$$

onde R_g e R_c são respectivamente, o raio do “gap” e do material de revestimento, e é a altura da vareta combustível, A_{ext} e A_{int} são respectivamente, as áreas de troca de calor da parte externa e interna do material de revestimento, $A_{(r'=R_f)}$ é a área de troca de calor da parede do material combustível. A partir da FIG. 3.4, a resistência térmica do “gap”, do material de revestimento e da convecção para o ambiente são dadas respectivamente,

$$R_{T_{gap}} = \frac{1}{2.\pi.R_f.e.h_g} \tag{3.95}$$

$$R_{T_c} = \frac{Ln\left(\frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}}\right)}{2.\pi.e.k_c} \tag{3.96}$$

$$R_{T_\infty} = \frac{1}{2.\pi.(R_{ci} + R_c).e.h} \tag{3.97}$$

Novamente, a taxa de transferência de calor por condução na pastilha combustível de urânio é dada pela geração de calor no mesmo, ocasionado pela fissão nuclear. Logo, pode-se escrever a seguinte relação:

$$q = -k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right|_{r'=R_f} (2.\pi.R_f.e) = G\pi(R_f)^2e \tag{3.98}$$

em que G é o termo fonte volumétrico constante. A partir da FIG. 3.4, tem-se que,

$$q = \frac{T(R_f) - T_\infty}{R_{T_{total}}} \quad (3.99)$$

$$T(R_f) - T_\infty = q \cdot \left[\frac{1}{2\pi R_f \cdot e \cdot h_g} + \frac{\text{Ln}\left(\frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}}\right)}{2\pi \cdot e \cdot k_c} + \frac{1}{2\pi \cdot (R_{ci} + R_c) \cdot e \cdot h} \right] \quad (3.100)$$

mas como $R_c \ll R_{ci}$, a seguinte relação pode ser feita:

$$\text{Ln}\left(\frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}}\right) = \text{Ln}\left(1 + \frac{R_c}{R_{ci}}\right) \cong \frac{R_c}{R_{ci}} \quad (3.101)$$

Substituindo as EQS. 3.98 e 3.101 na EQ. 3.100, obtém-se a temperatura em R_f ,

$$T(R_f) = T_\infty + \frac{G \cdot (R_f)^2}{2} \left[\frac{1}{h_g \cdot R_f} + \frac{R_c}{R_{ci} \cdot k_c} + \frac{1}{h \cdot (R_{ci} + R_c)} \right] \quad (3.102)$$

também do circuito térmico sabe-se que,

$$q = \frac{T(R_{ci}) - T_\infty}{R_{T_c} + R_{T_\infty}} \quad (3.103)$$

então, substituindo as EQS. 3.96, 3.97 e 3.98 na EQ. 3.103, obtém-se a temperatura em R_{ci} ,

$$T(R_{ci}) = T_\infty + \frac{G \cdot (R_f)^2}{2} \left[\frac{R_c}{R_{ci} \cdot k_c} + \frac{1}{h \cdot (R_{ci} + R_c)} \right] \quad (3.104)$$

e também sabe-se que,

$$q = \frac{T(R_{co}) - T_{\infty}}{R_{T_{\infty}}} \quad (3.105)$$

substituindo as EQS. 3.97 e 3.98 na EQ. 3.105, obtém-se a temperatura em R_{co} :

$$T(R_{co}) = T_{\infty} + \frac{G(R_f)^2}{2} \left[\frac{1}{h(R_{ci} + R_c)} \right] \quad (3.106)$$

Pela análise por parâmetros concentrados é esperado que a temperatura em toda a região do material revestimento seja uniforme, logo:

$$T(R_{ci}) \cong T(R_{co}) \rightarrow \frac{R_c}{R_{ci}k_c} \ll \frac{1}{h(R_{ci} + R_c)} \quad (3.107)$$

$$\frac{hR_c}{k_c} \ll \frac{R_{ci}}{(R_{ci} + R_c)} \rightarrow \frac{hR_c}{k_c} \ll 1$$

onde a condição vista na EQ. 3.107 deve ser atendida na solução proposta. Então, para o material de revestimento a condição inicial é dada por:

$$T_c(0) = T(R_{ci}) = T(R_{co}) \quad (3.108)$$

A distribuição de temperatura inicial para o combustível é obtida a partir da solução da equação de calor unidimensional em regime permanente com termo fonte de geração constante, vista na EQ. 3.109:

$$\frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} \left(r' \frac{dT_f}{dr'} \right) = -\frac{G}{k_f} \quad 0 < r' < R_f \quad (3.109)$$

submetida à condição de simetria no centro do cilindro e a EQ. 3.102 na parede do combustível. Na EQ. 3.102, o termo $R_c/R_{ci}K_c$ pode ser desprezado, como visto na EQ. 3.107. Através de uma dupla integração em relação à coordenada espacial na EQ.

3.109, e ao aplicar as condições de contorno mencionadas, obtém-se a distribuição de temperatura inicial para a região do combustível, sendo essa dada por:

$$T_f(r',0) = T_\infty + \frac{G.(R_f)^2}{2} \left(\frac{1}{h.(R_{ci} + R_c)} + \frac{1}{h_g.R_f} \right) + \frac{G.(R_f)^2}{4.k_f} \left(1 - \left(\frac{r'}{R_f} \right)^2 \right) \quad (3.110)$$

3.3.2 BALANÇO DE ENERGIA NO MATERIAL DE REVESTIMENTO

O balanço de energia no material de revestimento para a análise concentrada é dado por:

$$\rho_c c_{p_c} V_c \frac{dT_c}{dt'} = h_g A_{int} (T_f(r' = R_f) - T_c(r' = R_{ci})) - h A_{ext} (T_c(r' = R_{co}) - T_\infty) \quad (3.111)$$

Na EQ. 3.111, o lado esquerdo da igualdade representa a taxa de aumento da energia interna do material de revestimento, o primeiro termo do lado direito mostra a energia que entra no material de revestimento vinda do “gap”, e o termo restante é referente a energia que sai por convecção do material de revestimento para o ambiente pelo refrigerante.

Conforme já discutido na modelagem anterior, o volume do material de revestimento é dado por:

$$V_c = \pi.e.(2.R_{ci}.R_c) \quad (3.112)$$

Substituindo V_c , A_{ext} e A_{int} no balanço de energia, EQ. 3.111, obtém-se a equação diferencial que rege a temperatura no material de revestimento:

$$\rho_c c_{p_c} R_c \frac{dT_c}{dt'} = h_g (T_f(r' = R_f, t') - T_c(t)) - h \frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}} (T_c(t) - T_\infty) \quad (3.113)$$

submetida à condição inicial, EQ. (3.108).

3.3.3 FORMULAÇÃO FINAL DIMENSIONAL DO PROBLEMA

A partir da modelagem desenvolvida, obteve-se a formulação final dimensional:

$$\frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f}{\partial t'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right) + \frac{g(r', t')}{k_f} \quad \begin{array}{l} 0 < r' < R_f \\ t' > 0 \end{array} \quad (3.114)$$

$$T_f(r', 0) = T_\infty + \frac{G.(R_f)^2}{2} \left(\frac{1}{h.(R_{ci} + R_c)} + \frac{1}{h_g.R_f} \right) + \frac{G.(R_f)^2}{4.k_f} \left(1 - \left(\frac{r'}{R_f} \right)^2 \right) \quad 0 \leq r' \leq R_f \quad (3.115)$$

$$\frac{\partial T_f(t', 0)}{\partial r'} = 0 \quad t' > 0 \quad (3.116)$$

$$-k_f \frac{\partial T_f(t', r' = R_f)}{\partial r'} - h_g (T_f(r' = R_f) - T_c(t')) = 0 \quad t' > 0 \quad (3.117)$$

$$\rho_c c_{p_c} R_c \frac{dT_c}{dt'} = h_g (T_f(r' = R_f, t') - T_c(t)) - h \frac{R_{ci} + R_c}{R_{ci}} (T_c(t) - T_\infty) \quad t' > 0 \quad (3.118)$$

$$R_{ci} \leq r' \leq R_{co}$$

$$T_c(0) = T_\infty + \frac{G.(R_f)^2}{2.h.(R_{ci} + R_c)} \quad t' = 0 ; R_{ci} \leq r' \leq R_{co} \quad (3.119)$$

3.3.4 ADIMENSIONALIZAÇÃO

A fim de adimensionalizar a formulação final, EQS. 3.114 à 3.119, novamente utiliza-se os conhecidos parâmetros adimensionais:

$$\theta_f = \frac{T_f - T_\infty}{T_\infty} \quad (3.120)$$

$$\theta_c = \frac{T_c - T_\infty}{T_\infty} \quad (3.121)$$

$$r = \frac{r'}{R_f} \quad (3.122)$$

$$t = \frac{\alpha_f t'}{R_f^2} \quad (3.123)$$

$$\varepsilon = \frac{R_c}{R_f} \quad (3.124)$$

$$\mu = \frac{\rho_c c_{p_c}}{\rho_f c_{p_f}} \quad (3.125)$$

$$Bi = \frac{h(R_{ci} + R_c)}{k_f} \quad (3.126)$$

$$Bi_g = \frac{h_g(R_f)}{k_f} \quad (3.127)$$

$$G' = \frac{g(r', t') R_f^2}{k_f T_\infty} \quad (3.128)$$

$$G^* = \frac{G R_f^2}{k_f T_\infty} \quad (3.129)$$

Observa-se que nesta modelagem surgiu um novo parâmetro adimensional, denominado número de Biot do gap, visto na EQ. 3.127. Ao substituir os parâmetros

adimensionais no problema formulado, obtém-se o mesmo na forma final adimensional:

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_f}{\partial r} \right) + G'(r,t) \quad \begin{array}{l} 0 < r < 1 \\ t > 0 \end{array} \quad (3.130)$$

$$\theta_f(r, t=0) = \frac{G^*}{2} \left(\frac{1}{Bi} + \frac{1}{Bi_g} + \left(\frac{1-r^2}{2} \right) \right) \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial \theta_f(t, r=0)}{\partial r} = 0 \quad t > 0 \quad (3.132)$$

$$\mu \varepsilon \frac{d\theta_c}{dt} \left(\frac{Bi_g}{Bi_g + Bi} \right) = - \frac{\partial \theta_f}{\partial r} \Big|_{r=1} - \left(\frac{Bi \cdot Bi_g}{Bi_g + Bi} \right) \theta_f(r=1, t) \quad t > 0 \quad (3.133)$$

$$\theta_c(0) = \frac{G^*}{2} \frac{1}{Bi} \quad (3.134)$$

Em suma, a EQ. 3.130 representa a condução de calor no elemento combustível, submetido à condição inicial, EQ. 3.131 e à condição de contorno de simetria, EQ. 3.132. Como o contorno em $r=0$ já foi especificado, precisa-se obter informação em $r=1$. Esta informação está contida na EQ. 3.133, que rege o comportamento da temperatura no material de revestimento. Tal fato, faz com que as soluções para a temperatura transiente nas duas regiões (combustível e revestimento) estejam acopladas. A EQ. 3.134 representa a condição inicial no material de revestimento.

3.3.5 SOLUÇÃO PELA TRANSFORMADA INTEGRAL

Nota-se que o problema final, EQS. 3.130 à 3.134, é similar ao formulado pela segunda modelagem (seção 3.2), e que foi solucionado analiticamente pelo método

da Transformada Integral, porém nessa terceira modelagem aparece os efeitos da região do gap na formulação. Como o procedimento para tratar o problema analiticamente através da Transformada Integral é idêntico, é dispensável a apresentação dos passos iniciais desta técnica novamente.

O sistema de equações diferenciais obtido pelo método da Transformada Integral é dado por:

$$\frac{d\overline{\theta_m(t)}}{dt} + \beta_m^2 \overline{\theta_m(t)} = \overline{G_m(t)} + R_0(\beta_m, 1) \left[\left(1 - \frac{Bi}{Bi_g + Bi} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{d\overline{\theta_n(t)}}{dt} + \overline{g(t)} \right) + \left(\frac{Bi \cdot Bi_g}{Bi_g + Bi} \right) \theta_c(t) \right] \quad (3.135)$$

submetido às condições iniciais transformadas,

$$\overline{\theta_m(0)} = \int_0^1 r R_0(\beta_m, r) \theta_f(r, 0) dr \quad (3.136)$$

e acoplado com,

$$\mu \varepsilon \frac{d\theta_c}{dt} \left(\frac{Bi_g}{Bi_g + Bi} \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{d\overline{\theta_n(t)}}{dt} + \overline{g(t)} \right) \left(\frac{Bi}{Bi_g + Bi} - 1 \right) - \left(\frac{Bi \cdot Bi_g}{Bi_g + Bi} \right) \theta_c(t) \quad (3.137)$$

onde a EDO vista na EQ. 3.137 é submetida à condição inicial, EQ. 3.134. Algumas incógnitas que aparecem nas relações anteriores são dadas por,

$$\overline{G_m(t)} = \int_0^1 r R_0(\beta_m, r) G'(r, t) dr \quad (3.138)$$

$$\overline{f_n} = \frac{1}{N(\beta_n)} \int_0^1 r R_0(\beta_n, r) dr \quad (3.139)$$

$$\overline{g(t)} = -\int_0^1 rG'(r,t)dr \quad (3.140)$$

os autovalores β_m são dados pelas raízes positivas da equação transcendental, EQ. 3.141. A fim de resolver esta e obter os autovalores, foi utilizado um esquema numérico do tipo Newton-Raphson (Gilat, 2008).

$$\beta_m J_1(\beta_m) = \left(\frac{Bi \cdot Bi_g}{Bi_g + Bi} \right) J_0(\beta_m) \quad (3.141)$$

$R_0(\beta_m)$ e $1/N(\beta_m)$ são respectivamente, as autofunções e o inverso da norma do problema regular de autovalores de Sturm-Liouville em coordenadas cilíndricas:

$$R_0(\beta_m, r) = J_0(\beta_m r) \quad (3.142)$$

$$\frac{1}{N(\beta_m)} = \frac{2}{J_0^2(\beta_m)} \frac{\beta_m^2}{\left(\beta_m^2 + \left(\frac{Bi \cdot Bi_g}{Bi_g + Bi} \right)^2 \right)} \quad (3.143)$$

Assim como visto na modelagem anterior (seção 3.2), para obter a distribuição de temperatura transiente no combustível, precisa-se resolver as EDO's expressadas na EQ. 3.135, submetidas às condições iniciais transformadas, EQ. 3.136, e posteriormente, utilizar a fórmula de inversão da transformada integral, vista na EQ. 3.17. Entretanto, o sistema de EDO's, EQ. 3.135, está acoplado com a EDO vista na EQ. 3.137, submetida à condição inicial, EQ 3.134. Novamente, o problema a ser resolvido é do tipo,

$$\begin{aligned} [C_{mm}] \{\theta'\} + [D_{mm}] \{\theta\} &= \{H_m(t)\} \\ \{\theta(0)\} &= \{E_m\} \end{aligned} \quad (3.144)$$

entretanto, os coeficientes das matrizes são diferentes, pois os efeitos do “gap” foram considerados na análise térmica. Similar ao que foi feito na modelagem anterior, o problema é reescrito na fórmula matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \varphi \cdot R_0(\beta_1, 1) \cdot \mu \cdot \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & \varphi \cdot R_0(\beta_2, 1) \cdot \mu \cdot \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & \varphi \cdot R_0(\beta_3, 1) \cdot \mu \cdot \varepsilon \\ \overline{f_1} \xi & \overline{f_2} \xi & \overline{f_3} \xi & \varphi \cdot \mu \cdot \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d\theta_1} \\ \frac{dt}{dt} \\ \overline{d\theta_2} \\ \frac{dt}{dt} \\ \overline{d\theta_3} \\ \frac{dt}{dt} \\ \overline{d\theta_c} \\ \frac{dt}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\theta_1} \\ \overline{\theta_2} \\ \overline{\theta_3} \\ \overline{\theta_c} \end{bmatrix} \\
 = \\
 \begin{bmatrix} \overline{G_1(t)} \\ \overline{G_2(t)} \\ \overline{G_3(t)} \\ -\xi \cdot \overline{g(t)} \end{bmatrix} \tag{3.145}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\theta_1(0)} \\ \overline{\theta_2(0)} \\ \overline{\theta_3(0)} \\ \overline{\theta_c(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 r R_0(\beta_1, r) \theta_f(r, 0) dr \\ \int_0^1 r R_0(\beta_2, r) \theta_f(r, 0) dr \\ \int_0^1 r R_0(\beta_3, r) \theta_f(r, 0) dr \\ \frac{G^*}{2} \frac{1}{Bi} \end{bmatrix} \tag{3.146}$$

onde os parâmetros auxiliares presentes nos coeficientes das matrizes [C] e [D], são dados por:

$$\xi = 1 - \frac{Bi}{Bi_g + Bi} \tag{3.147}$$

$$Q = \frac{Bi_g}{Bi_g + Bi} \quad (3.148)$$

$$\ddot{Y} = \frac{Bi_g \cdot Bi}{Bi_g + Bi} \quad (3.149)$$

$\overline{G_m(t)}$, $\overline{f_n}$, $\overline{g(t)}$ são dados respectivamente, pelas EQS. 3.138, 3.139 e 3.140. Na EQ. 3.145, a primeira matriz do lado esquerdo da igualdade (matriz C), possui os elementos da diagonal principal iguais à 1, exceto o último elemento desta, que é igual à $Q \cdot \mu \cdot \varepsilon$. A última linha desta matriz é dada por $\xi \cdot \overline{f_n}$, onde n é a respectiva coluna em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da linha, que como supracitado é igual à $Q \cdot \mu \cdot \varepsilon$. A última coluna desta matriz é dada por $R_0(\beta_m, 1) \mu \varepsilon Q$, onde m é a respectiva linha em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da coluna. Todos os outros elementos da matriz C são nulos. O vetor coluna de derivadas da temperatura $\{\theta\}$ é dado por $\frac{d\overline{\theta_m}}{dt}$, onde m é a respectiva linha em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da coluna, que é dado por $\frac{d\theta_c}{dt}$.

A matriz diagonal (D) possui os elementos da diagonal principal iguais à β_m^2 , onde m é a respectiva linha em que este elemento se encontra, exceto para o último termo, que é igual à \ddot{Y} . O vetor coluna de temperaturas $\{\theta\}$ é dado por $\overline{\theta_m}$, onde m é a respectiva linha em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da coluna, que é dado por θ_c . O vetor coluna H é dado por $\overline{G_m(t)}$, exceto para o último termo que é igual $-\overline{g(t)} \xi$.

A matriz (E) que representa a condição inicial, possui elementos dados por $\overline{\theta_m(0)}$, onde m é a respectiva linha em que o elemento se encontra, exceto para o último termo da coluna, que é dado por $\theta_c(0)$, que é a condição inicial da região do material de revestimento.

Novamente, para obter o campo de temperatura transiente na vareta combustível, o sistema matricial descrito anteriormente foi avaliado numericamente no MATLAB, onde os detalhes da solução são apresentados no apêndice 2.

3.3.6 SOLUÇÃO APRESENTADA POR AN et al. (2014)

Conforme discutido na revisão bibliográfica da condução de calor em varetas combustíveis, seção 2.1, AN et al. (2014) investigaram o processo de fusão em uma vareta combustível nuclear. Os referidos autores solucionaram o problema formulado pelo método da entalpia, com a discretização das equações por diferenças finitas. Os autores consideraram o conjunto completo da vareta combustível, assim como é feito na terceira modelagem desta dissertação.

Entretanto, no trabalho de AN et al. (2014) o problema transiente é tratado de maneira diferente. Eles consideram o termo fonte de calor constante em todo problema, e o transiente é ocasionado pela mudança do coeficiente de transferência de calor. Em suma, os autores especificam um coeficiente de transferência de calor e solucionam o problema na vareta combustível, sendo a solução em regime permanente, seguidamente, eles diminuem o coeficiente de transferência de calor, com o intuito de simular um possível acidente por falta de refrigeração, e resolvem o problema formulado novamente, simulando o transiente.

Na análise desta dissertação, o problema transiente é ocasionado por um fluxo de nêutrons descontrolado, que faz com que o termo fonte seja variável. Apesar da terceira modelagem ter sido baseado em cima desta abordagem, percebe-se que ela é válida para reproduzir o problema de AN et al. (2014). A diferença será em cima da condição inicial do problema, que agora será similar a dos autores citados, e do termo fonte que não será mais variável. Logo, ao resolver a terceira modelagem com essas novas considerações através do método da Transformada Integral, novamente tem-se um problema do tipo visto na EQ. 3.144, onde as matrizes $[C]$ e $[D]$ permanecem inalteradas, entretanto a matriz $[H]$ agora não é mais em função da coordenada temporal, já que o termo fonte é constante. Logo, os parâmetros presentes nos coeficientes da matriz $[H]$ são dados por,

$$\overline{G}_m = G^* \int_0^1 r R_0(\beta_m, r) dr \quad (3.150)$$

$$\bar{g} = -G^* \int_0^1 r dr \quad (3.151)$$

o que facilita a solução do problema, já que agora os parâmetros vistos nas EQS. 3.150 e 3.151 não são mais variáveis com o tempo. A matriz $[E]$ também é modificada, visto que a solução de AN et al. (2014) parte de uma temperatura prescrita em todo o domínio.

Portanto, com essas novas considerações, será comparado os resultados obtidos pela terceira modelagem com a solução de AN et al. (2014). O principal objetivo desta comparação será verificar a influência da mudança de fase no problema térmico em escrutínio, já que os autores citados consideraram este fator na análise da vareta combustível.

4 PROBLEMA INVERSO

No problema direto as causas são dadas e o efeito é determinado, enquanto que no problema inverso o efeito é dado e as causas são estimadas (COLAÇO et al., 2006; OZISIK & ORLANDE, 2000). A FIG. 4.1 ilustra a relação entre as abordagens do problema direto e do inverso.

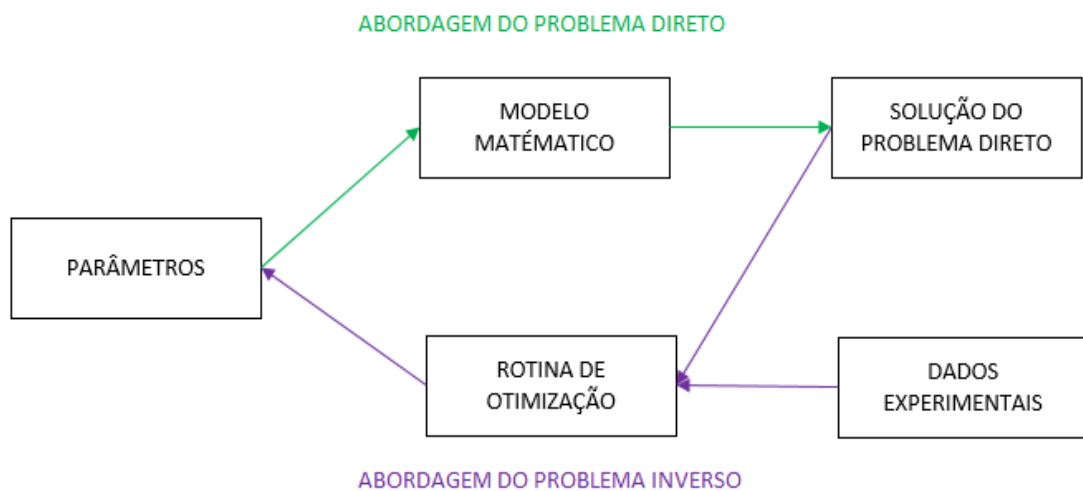


FIG. 4.1 Relação entre o problema inverso e o problema direto

Na abordagem do problema direto, todos os parâmetros casuais do fenômeno físico são conhecidos, sendo estes inseridos no modelo matemático a fim de obter-se a solução do problema direto. O problema inverso utiliza o problema direto como um dos passos básicos para a sua solução. Basicamente, compara-se os dados experimentais com a solução do problema direto obtida por parâmetros estimados a partir de uma estimativa inicial. Estes são inseridos em uma rotina de otimização, que após cada iteração, minimiza o erro entre a solução do problema direto e os dados experimentais, até que os parâmetros ótimos sejam encontrados.

Este capítulo apresenta o estudo do problema de transferência de calor inverso na vareta combustível, com o intuito de estimar o termo fonte de calor variável. São apresentados dois métodos para estimativas de parâmetros, o determinístico de Levenberg-Marquardt, e o estocástico do PSO (Otimização por Enxame de Partículas).

A acurácia do campo de temperatura transiente na vareta combustível é essencial para prever o comportamento térmico em um reator nuclear, e está diretamente relacionada com o conhecimento do termo fonte de calor variável no combustível. Logo, percebe-se o importante papel que a abordagem inversa pode desempenhar no problema térmico em escrutínio, já que ao estimar o termo fonte, a análise transiente em toda a vareta combustível é obtida pelo problema direto.

4.1 O PROBLEMA DIRETO

As modelagens apresentadas no capítulo 3 são problemas diretos, cujo o propósito é reproduzir o campo de temperatura na vareta combustível, quando todas as causas do problema são tratadas como conhecidas.

Conforme aludido, um dos passos básicos em estudos de problemas inversos é determinar o problema direto. Nesta dissertação, o problema direto é dado pela terceira modelagem, exposta na seção 3.3, pois essa é a solução mais completa para a vareta combustível, em que se modela a região do combustível, gap e material de revestimento.

4.2 O PROBLEMA INVERSO

Esta dissertação possui o interesse de estimar o termo fonte de calor variável do combustível. O problema inverso envolve a estimativa de parâmetros, já que há o conhecimento da forma funcional do termo de geração de calor no problema térmico em questão. Conforme visto na primeira modelagem, apresentada na seção 3.1, quatro variações para o termo fonte de calor são investigadas, EQS. 3.26 à 3.29.

Entretanto, conforme será explanado posteriormente na análise dos resultados da primeira modelagem, apenas as formas funcionais expressadas nos casos 3 e 4 serão consideradas na análise inversa, pois estas representam melhor a física envolvida no processo de geração de energia na vareta combustível, devido ao fluxo descontrolado

de nêutrons. Então, os casos investigados para o termo fonte variável (G') no problema inverso são,

$$\text{Caso 3: } G' = G^* (1 + c_1 t) \quad (4.1)$$

$$\text{Caso 4: } G' = G^* (1 + c_2 r^2) e^{c_3 t} \quad (4.2)$$

onde G^* é o termo fonte adimensional constante e conhecido. Logo, para o caso 3, o problema inverso busca estimar o parâmetro c_1 , enquanto que no caso 4, objetiva-se determinar c_2 e c_3 . Com o conhecimento destes parâmetros, o termo fonte variável pode ser avaliado ao longo do transiente em qualquer posição do combustível.

Em suma, se um sensor estiver disponível para capturar medidas transientes na superfície da vareta, a determinação do termo fonte variável passa pela solução do problema inverso por estimação de parâmetros desconhecidos para uma função de teste (OZISIK & ORLANDE, 2000). Por exemplo, a EQ. 4.1 é uma função de teste com parâmetro c_1 à ser determinado, a fim de ajustar a curva das temperaturas estimadas pelo problema direto, com a curva das temperaturas medidas pelo sensor, até minimizar a função objetivo.

Na análise do problema inverso, c_1 , c_2 e c_3 são tratados como parâmetros desconhecidos. A solução deste problema de transferência de calor por condução inverso é baseada na minimização da função objetivo, dada pelo somatório dos erros quadráticos entre os dados medidos e estimados, como visto na EQ. 4.3,

$$S(P) = \sum_{i=1}^I [Y_i - \theta_i(P)]^2 \quad (4.3)$$

onde:

S = Somatório dos erros ao quadrado ou função objetivo;

$P = [P_1, P_2, \dots, P_N]$ = Vetor dos parâmetros desconhecidos à serem determinados;

$\theta_i(P) = \theta_i(P, t_i)$ = Temperatura estimada pelo problema direto no tempo t_i ;

$Y_i = Y(t_i)$ = Temperatura medida no tempo t_i ;

N = Número total de parâmetros desconhecidos;

$l =$ Número total de medidas, onde $l \geq N$

Segundo OZISIK & ORLANDE (2000), a função objetivo, EQ. 4.3, pode ser reescrita na forma matricial como,

$$S(P) = [Y - \theta(P)]^T [Y - \theta(P)] \quad (4.4)$$

onde o sobrescrito T denota a matriz transposta, sendo que:

$$[Y - \theta(P)]^T = [Y_1 - \theta_1, Y_2 - \theta_2, \dots, Y_l - \theta_l] \quad (4.5)$$

Conforme discorrido na revisão bibliográfica dos problemas inversos, seção 2.2, há carência de dados reais de temperaturas medidas em varetas combustíveis. Então, com intuito de simular dados experimentais, foram geradas medidas pseudoexperimentais, através da adição de erros randômicos às temperaturas exatas calculadas pelo problema direto (SU & SILVA NETO, 2001; CALDEIRA et al., 2016; CALDEIRA et al., 2017).

Ao utilizar os parâmetros conhecidos previamente (exatos) para calcular as medidas pseudoexperimentais e compará-las com as temperaturas estimadas através do modelo do problema direto, pratica-se o crime inverso, já que ambas as temperaturas, medidas e estimadas, estão sendo calculadas pela mesma solução (KAPIO & SOMERSALO, 2007; CHÁVEZ et al., 2013). Portanto, a fim de evitar o crime inverso, é introduzido ruídos nas medidas pseudoexperimentais, conforme MACHADO & ORLANDE (1998), CALDEIRA et al. (2016) e CALDEIRA et al. (2017). Assim,

$$Y_i = \theta_{exata_i} + \varpi.E.\max |\theta_{exata_i}| \quad (4.6)$$

onde:

Y_i = Temperatura medida no tempo t_i ;

θ_{exata_i} = Temperatura exata calculada pela terceira modelagem (problema direto) no tempo t_i ;

ϖ = Número randômico com distribuição normal, média zero e desvio padrão unitário;

E = Nível de ruído arbitrário;

$\max|\theta_{exata}|$ = Máximo valor da temperatura exata calculada pelo problema direto.

Conforme supradito, as temperaturas pseudoexperimentais foram geradas por falta de dados reais, sendo que se os mesmos estivessem disponíveis para o problema inverso, eles seriam medidos em alguma posição do sólido em análise. Obviamente, a posição de medição deveria ser a superfície do cilindro (parede do material de revestimento), pois seria improvável colocar um sensor dentro da vareta combustível. Baseado em tal fato, as temperaturas pseudoexperimentais foram geradas na parede do revestimento, posição denominada r_{sensor} .

As temperatura estimadas $\theta_i(P)$ são obtidas pela solução do problema direto na posição radial de medida, r_{sensor} , através da estimativa atual do parâmetro desconhecido $P_j, j=1, \dots, N$.

4.3 SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS

Usualmente, antes de implementar um método de problema inverso, recomenda-se fazer a análise de sensibilidade dos parâmetros, a fim de verificar se os mesmos podem ser estimados, e qual o melhor intervalo de tempo para a solução do problema inverso. A análise de sensibilidade permite avaliar como os parâmetros à serem determinados influenciam nas temperaturas estimadas pelo problema direto.

A sensibilidade ou matriz Jacobiana, $J(P)$, é definida na EQ. 4.7. Os elementos desta matriz são chamados de coeficientes de sensibilidade, J_{ij} , EQ. 4.8. J_{ij} define a medida da sensibilidade da temperatura estimada θ_i em relação à mudanças no parâmetro P_j . Uma magnitude pequena de J_{ij} indica que grandes variações no parâmetro P_j provocam pequenas alterações em θ_i , e obviamente, sua estimação é extremamente difícil, pois uma mesma temperatura pode ser obtida por diversos valores de P_j . No caso de pequenos coeficientes de sensibilidade, o determinante de $J^T J$ é praticamente nulo, e o problema inverso é mal condicionado (OZISIK & ORLANDE, 2000).

Em problemas inversos lineares, a matriz Jacobiana não é função de nenhum dos parâmetros desconhecidos. Em contrapartida, em problemas inversos não lineares, há dependência dos parâmetros à serem estimados na matriz Jacobiana (OZISIK & ORLANDE, 2000). Neste trabalho, o problema inverso é linear para o termo fonte variável proposto no caso 3, EQ. 4.1, e não linear para o caso 4, EQ. 4.2.

$$J(P) = \left[\frac{\partial \theta^T(P)}{\partial P} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial P_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial \theta_1}{\partial P_N} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial P_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial \theta_2}{\partial P_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \theta_I}{\partial P_1} & \frac{\partial \theta_I}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial \theta_I}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$J_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial P_j} \quad (4.8)$$

Segundo OZISIK & ORLANDE (2000), é desejável ter coeficientes de sensibilidade linearmente independentes com largas magnitudes, pois assim, o problema inverso não é muito sensível aos erros medidos, o que permite estimativas acuradas para os parâmetros. Ainda de acordo com os referidos autores, os coeficientes de sensibilidade também podem ser aproximados numericamente por diferenças centrais, como visto na EQ. 4.9, onde ε é aproximadamente igual à 10^{-5} ou 10^{-6} .

$$J_{ij} = \frac{\theta_i(P_1, P_2, \dots, P_j + \varepsilon P_j, \dots, P_N) - \theta_i(P_1, P_2, \dots, P_j - \varepsilon P_j, \dots, P_N)}{2\varepsilon P_j} \quad (4.9)$$

4.4 MÉTODOS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Esta seção apresenta os métodos de otimização para a solução do problema inverso. Serão mostrados o método determinístico de Levenberg-Marquardt, e o estocástico do PSO. De acordo com RIBEIRO et al. (2015), um algoritmo de otimização possui o objetivo de otimizar uma função objetivo, sendo que nos métodos

determinísticos, tal fato é baseado na orientação do vetor gradiente, e nos estocásticos, a solução é apoiada na busca aleatória.

4.4.1 MÉTODO DETERMINÍSTICO DE LEVENBERG-MARQUARDT

Segundo COLAÇO et al. (2006), os métodos determinísticos usualmente dependem de um procedimento iterativo, que após um certo número de iterações, convergem para o mínimo da função objetivo. Ao longo do processo iterativo, a solução ótima é direcionada pelo vetor gradiente da função objetivo, que é dado pela derivada parcial da função objetivo com relação a cada parâmetro desconhecido (OZISIK & ORLANDE, 2000; VENTER, 2010).

De acordo com COTTA (2009), ao longo do processo iterativo, cada passo atual necessita da informação da iteração anterior, sendo que quanto melhor a acurácia da estimativa inicial para cada parâmetro, melhor será a solução ótima obtida.

Métodos determinísticos normalmente são computacionalmente mais rápidos que os métodos estocásticos e avaliam problemas com grande número de variáveis (COLAÇO et al., 2006).

Segundo OZISIK & ORLANDE (2000), o método de Levenberg-Marquardt é bastante eficiente para resolver problemas inversos de estimativa de parâmetros lineares e não lineares. No entanto, podem surgir dificuldades em problemas de estimativa não linear, que envolvem um grande número de parâmetros desconhecidos, devido ao tempo gasto na computação da matriz Jacobiana, pois neste caso essa precisa ser atualizada em cada iteração.

Conforme supracitado, os métodos determinísticos têm como finalidade minimizar a função objetivo. Para tal, no método de Levenberg-Marquardt, o gradiente da função objetivo deve ser nulo, conforme visto na EQ. 4.10,

$$\nabla S(P) = 2 \left[-\frac{\partial \theta^T(P)}{\partial P} \right] [Y - \theta(P)] = 0 \quad (4.10)$$

substituindo a EQ. 4.7 na EQ. 4.10, obtém-se a EQ. 4.11,

$$-2J^T(P)[Y - \theta(P)] = 0 \quad (4.11)$$

onde a EQ. 4.11 representa a condição à ser respeitada para a minimização da função objetivo escrita na forma matricial.

O método de Levenberg-Marquardt busca minimizar a função objetivo baseado no método de Gauss, onde esse estima o vetor de parâmetros à serem descobertos na iteração atual a partir da anterior. A EQ. 4.12 mostra como esse cálculo é realizado pelo método de Gauss:

$$P^{k+1} = P^k + [(J^k)^T J^k]^{-1} (J^k)^T [Y - \theta(P^k)] \quad (4.12)$$

Observa-se pela EQ. 4.12 que o método de Gauss exige que o determinante da matriz $J^T J$ não seja nulo. O método de Levenberg-Marquardt alivia esse problema através da introdução da matriz $\varphi^k \Omega^k$, conforme visto na EQ. 4.13, onde φ^k é um escalar positivo chamado parâmetro de amortecimento, Ω^k é uma matriz diagonal e o sobrescrito k indica o número de iterações.

$$P^{k+1} = P^k + [(J^k)^T J^k + \varphi^k \Omega^k]^{-1} (J^k)^T [Y - \theta(P^k)] \quad (4.13)$$

O objetivo da matriz $\varphi^k \Omega^k$ é amortecer as oscilações iniciais causadas pelo mau condicionamento da matriz $J^T J$, nos valores próximos a estimativa inicial dos parâmetros desconhecidos. À medida que o problema fica melhor condicionado, o valor de φ^k tende a zero.

A matriz Ω^k é formada pela diagonal principal da matriz $J^T J$ na interação k , ou seja:

$$\Omega^k = \text{diag}[(J^k)^T J^k] \quad (4.14)$$

Uma grande vantagem do algoritmo computacional de Levenberg-Marquardt é evitar o cômputo da matriz inversa de $J^T J$. Para tal, a EQ. 4.13 é rescrita como:

$$[(J^k)^T J^k + \varphi^k \Omega^k] \Delta P^k = (J^k)^T [Y - \theta(P^k)] \quad (4.15)$$

ΔP^k é obtido a partir da solução do sistema linear visto na EQ. 4.15. A partir deste, P^{k+1} é calculado pela EQ. 4.16:

$$P^{k+1} = P^k + \Delta P^k \quad (4.16)$$

A seguir é apresentado o algoritmo computacional para a técnica de Levenberg-Marquardt (OZISIK & ORLANDE, 2000).

Com as temperaturas pseudoexperimentais disponíveis, Y_i , e com a estimativa inicial para o vetor de parâmetros desconhecidos, P^0 , define-se $\varphi^0=0.001$. Inicialmente, $k=0$.

Passo 1. Resolva o problema direto com o parâmetro estimado disponível, P^k , em ordem de obter o vetor de temperaturas estimadas, $\theta(P^k) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l)$.

Passo 2. Compute $S(P^k)$ a partir da EQ. 4.4.

Passo 3. Compute a matriz Jacobiana J^k vista na EQ. 4.7, por uma das EQS. 4.8 ou 4.9, e posteriormente, calcule a matriz Ω^k , dada pela EQ. 4.14, usando o valor atual de P^k .

Passo 4. Resolva o sistema linear de equações algébricas, apresentado na EQ. 4.15, em ordem de computar ΔP^k .

Passo 5. Calcule P^{k+1} , que é a nova estimativa para o parâmetro desconhecido, a partir da EQ. 4.16.

Passo 6. Resolva o problema direto com o novo parâmetro estimado, P^{k+1} , em ordem de obter o novo vetor de temperaturas estimadas, $\theta(P^{k+1})$. Então, compute $S(P^{k+1})$, conforme a EQ. 4.4.

Passo 7. Se $S(P^{k+1}) \geq S(P^k)$, altere φ^k por $10\varphi^k$ e retorne ao passo 4.

Passo 8. Se $S(P^{k+1}) < S(P^k)$, aceite o novo parâmetro estimado e altere φ^k por $0.1\varphi^k$.

Passo 9. Verifique o critério de parada. Caso o mesmo seja satisfeito, pare o procedimento iterativo, caso contrário, altere k para $k+1$ e retorne ao passo 3. O critério de parada é explicitado na seção 4.5.

4.4.2 MÉTODO ESTOCÁSTICO OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS (PARTICLE SWARM OPTIMIZATION - PSO)

Nos processos estocásticos têm-se um conjunto de variáveis aleatórias, que são utilizadas para estudar a evolução de um sistema ao longo do tempo. Os métodos estocásticos também são conhecidos como métodos evolutivos. Geralmente, em oposição aos métodos determinísticos, os métodos estocásticos não dependem de sólidas bases matemáticas e não fazem uso do gradiente da função objetivo. Eles tendem a reproduzir o comportamento da natureza para encontrar o mínimo da função objetivo, através da seleção organizada dos pontos onde essa função será computada (COLAÇO et al., 2006).

Os métodos estocásticos realizam um grande número de avaliações da função objetivo em todo o espaço de busca, a fim de aumentar a chance de encontrar o ótimo global da função objetivo. Basicamente, nos métodos evolucionários há uma grande comunicação entre as partículas geradas, sendo que a cada iteração, uma população mais próxima da ótima solução é gerada (CÂMARA & SILVA NETO, 2008; COTTA, 2009; BIHAIN et al., 2012; RIBEIRO et al., 2015).

Portanto, os métodos estocásticos dispensam a orientação de um vetor gradiente, o que evita o cálculo de derivadas para chegar à solução ótima. Consequentemente, esses métodos são adequados para tratar funções objetivas não-lineares e para problemas sem boas estimativas iniciais para os parâmetros à serem determinados, ou seja, estes métodos não necessitam de uma estimativa inicial muito próxima da solução exata. (COTTA, 2009; COLAÇO et al., 2006; VENTER, 2010).

De acordo com COLAÇO et al. (2006), a ideia do método PSO veio da observação de pássaros procurando lugares para construir seus ninhos. Quando a individualidade é grande, o indivíduo pode nunca encontrar o melhor lugar para a construção de seu ninho, já que a busca por lugares alternativos é grande. Em contrapartida, se a

sociabilidade aumenta no grupo, todos os indivíduos podem convergir para o local desejado.

Este método tem como base a comunicação entre as partículas, já que este comportamento entre todo o enxame tende a convergir as partículas para a melhor posição possível no espaço de busca. Cada elemento, após a iteração, verifica sua posição em relação a melhor posição global (p_g), e segue por meio de um elemento velocidade na direção desta melhor posição, entretanto esta será comparada com a atual posição da mesma partícula, a fim de se obter a melhor situação da própria partícula (p_i) (ECHEVARRÍA et al., 2014; EBERHART & KENNEDY, 1995).

Ao longo do processo evolutivo, a velocidade de cada partícula é calculada pela EQ. 4.17, e posteriormente, a sua posição é atualizada pela EQ. 4.18,

$$v_i^{k+1} = \alpha 1 v_i^k + \beta 1 r_1 (p_i^k - x_i^k) + \beta 1 r_2 (p_g^k - x_i^k) \quad (4.17)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \quad (4.18)$$

onde:

v_i = velocidade da partícula;

x_i = posição da partícula;

K = indica o número de iteração;

$i = 1, 2, \dots, W$ onde W é o tamanho do enxame;

$\beta 1$ = coeficiente de aceleração (parâmetro de aprendizagem);

$\alpha 1$ = Parâmetro inercial;

r_1 e r_2 : são números aleatórios $\in [0, 1]$, distribuição uniforme.

Na EQ. 4.17, o segundo termo do lado direito da equação representa a individualidade e o terceiro termo a sociabilidade. O primeiro termo representa a inércia das partículas e, em geral, ele deve diminuir com o decorrer do processo iterativo (EBERHART & KENNEDY, 1995). Recomenda-se utilizar $1 < \beta 1 < 2$ e $0 < \alpha 1 < 1$ (COLAÇO et al., 2006).

A cada iteração, a melhor posição global da população é inserida no problema direto e a função objetivo, EQ. 4.4, é avaliada. O processo iterativo da população

acontece até que a função objetivo atinja a tolerância de convergência ou que o número máximo de iterações seja alcançado. Determinar um segundo critério de parada é necessário, pois em algumas ocasiões, os indivíduos não conseguem evoluir a atender o primeiro critério de convergência, entretanto, sua função objetivo já está estabilizada (ECHEVARRÍA et al., 2014; COLAÇO et al., 2006). A FIG. 4.2 mostra um esquema do procedimento iterativo do método PSO.

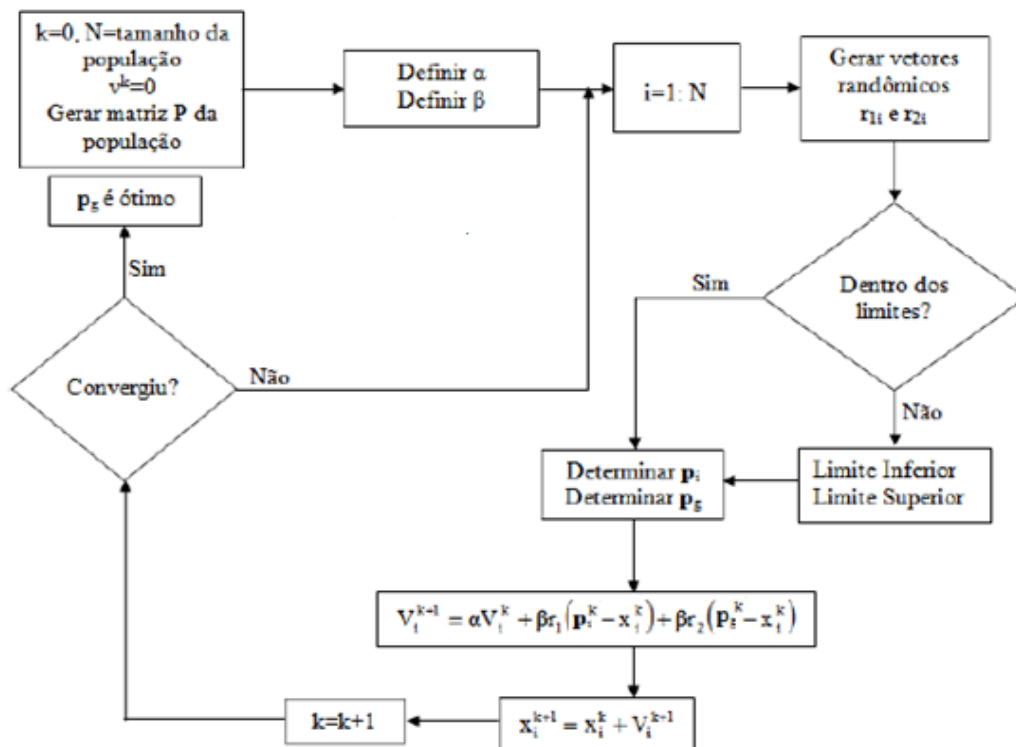


FIG. 4.2 Procedimento iterativo para o método PSO (adaptado COLAÇO et al., 2006)

4.5 CRITÉRIO DE PARADA

O critério de parada deve ser estabelecido para finalizar o procedimento iterativo, de modo que a solução seja estável em relação aos erros nos dados de entrada do problema (COTTA, 2009).

Nesta dissertação, foi utilizado o princípio da discrepância como primeiro critério de parada. Este é visto na EQ. 4.19,

$$S(P^{k+1}) < \textit{tolerância} \quad (4.19)$$

O critério visto na EQ. 4.19 testa se a função objetivo é suficientemente pequena, o que é esperado quando a mesma é estimada por um parâmetro próximo do real, que seria a solução exata do problema (OZISIK & ORLANDE, 2000).

Como abordado na explicação do PSO, estabelecer um segundo critério de parada é necessário, pois em algumas ocasiões, os indivíduos não conseguem evoluir a atender o princípio da discrepância, entretanto, sua função objetivo já está estabilizada (ECHEVARRÍA et al., 2014; COLAÇO et al., 2006).

Portanto, considera-se como segundo critério de parada, a variação da função objetivo menor ou igual à 0.0001 durante 50 iterações sucessivas, ou se o método atingir o número máximo de 500 iterações, conforme representado na EQ. 4.20.

$$\left| S(P^{k+1}) - S(P^k) \right| / S(P^k) \leq 0.0001 \quad \text{ou} \quad k > \textit{máximo de iterações} \quad (4.20)$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados e discussões com relação as modelagens desenvolvidas para o problema térmico na vareta combustível. São investigados aspectos de convergência das soluções, influência do número de Biot em relação ao tempo crítico, relevância do material de revestimento e do “gap” na distribuição de temperatura na vareta combustível, entre outros.

Também é apresentado os resultados do problema inverso em escrutínio, onde discute-se a respeito das estimativas obtidas para os parâmetros desconhecidos através dos métodos de Levenberg-Marquardt e do PSO.

5.1 RESULTADOS DA PRIMEIRA MODELAGEM

A primeira modelagem foi apresentada na seção 3.1. Conforme discorrido, essa baseou-se no trabalho de BHATTACHARYA et al. (2001), onde o problema formulado foi resolvido pelo método das funções de Green. Em contrapartida, nesta dissertação utilizou-se a técnica da Transformada Integral. A região do “gap” e a espessura do material de revestimento não foram levadas em consideração nesta primeira solução.

No estudo de BHATTACHARYA et al. (2001) foram investigadas duas variações para o termo fonte de calor, denominadas casos 1 e 2. Nesta dissertação, a solução obtida pela primeira modelagem, para os casos 1 e 2, são vistas respectivamente, nas EQS. 3.26 e 3.27. As expressões desenvolvidas para a distribuição de temperatura na vareta combustível, em ambos os casos mencionados, foram iguais as obtidas por BHATTACHARYA et al. (2001), o que mostra a concordância entre os métodos da Transformada Integral e o das Funções de Green.

BHATTACHARYA et al. (2001) validaram a solução analítica através da comparação com uma solução numérica. Os resultados apresentados pela primeira modelagem foram idênticos aos de BHATTACHARYA et al. (2001), o que autentica a solução desenvolvida pela primeira modelagem desta dissertação.

No trabalho dos autores mencionados, o termo fonte de calor uniforme adimensional, G^* , é igual à 32.4. A partir deste, o perfil de temperatura adimensional para cada caso proposto é analisado. Conforme supracitado, BHATTACHARYA et al. (2001) investigaram duas variações para o termo de geração de calor, expressados nos casos 1 e 2. Neste trabalho, dois novos termos fontes variáveis são propostos, vistos nos casos 3 e 4. A fim de facilitar as discussões acerca de cada variação proposta para o termo fonte, os quatros casos são expostos novamente:

$$\text{Caso 1: } G' = G^* t \quad (5.1)$$

$$\text{Caso 2: } G' = G^* r^2 e^{c_3 t} \quad (5.2)$$

$$\text{Caso 3: } G' = G^* (1 + c_1 t) \quad (5.3)$$

$$\text{Caso 4: } G' = G^* (1 + c_2 r^2) e^{c_3 t} \quad (5.4)$$

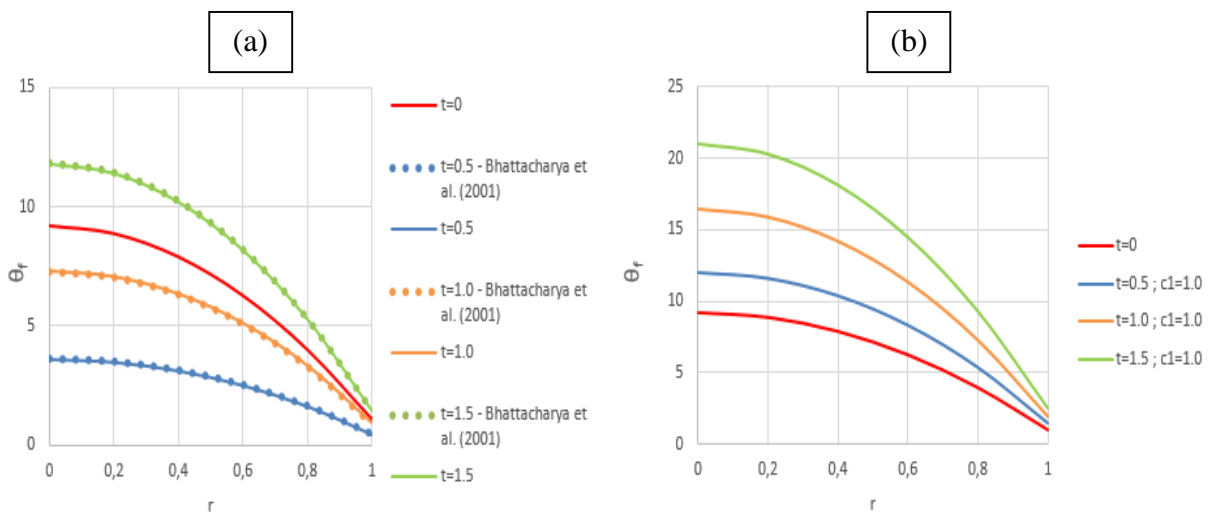


FIG. 5.1 Perfis de temperatura para $Bi=15$ (a) caso 1 (b) caso 3 com $c_1=1$

Os gráficos vistos nas FIG. 5.1.a e FIG. 5.1.b representam a distribuição de temperatura adimensional ao longo da vareta combustível para os casos 1 e 3, respectivamente. Em ambos os casos, o perfil de temperatura foi plotado para $Bi=15$ e em quatro instantes de tempo, e observa-se que em todos estes, a temperatura é

máxima no centro do cilindro e diminui ao longo da direção radial, conforme esperado, já que na superfície do elemento, $r=1$, acontece um resfriamento convectivo.

Entretanto, ao analisar cada curva da FIG. 5.1.a, percebe-se uma incoerência física relacionada ao problema térmico em escrutínio. Após a condição inicial, $t=0$, espera-se que para uma mesma posição radial, a temperatura aumente ininterruptamente, devido ao fluxo descontrolado de nêutrons ocasionado pelas reações de fissão nuclear em cadeia, que eleva a geração de calor do combustível.

Todavia, da forma como a variação do termo fonte de calor é tratado no caso 1, EQ. 5.1, o mesmo só alcança o valor de G^* , referente ao termo fonte uniforme em regime permanente (condição inicial do problema) em t igual à 1. Consequentemente, para $t < 1$, o termo fonte de calor é menor do que G^* e então, o perfil de temperatura ao longo da vareta é menor que o perfil de temperatura inicial, o que é contraditório com a física do problema. Este fato fica evidente ao analisar as curvas apresentadas no gráfico da FIG. 5.1.a, onde observa-se que para $t=0.5$ e $t=1.0$, a temperatura local é menor que a temperatura inicial da vareta combustível, sendo essa superada apenas em $t=1.5$.

A fim de buscar uma melhor representação física do problema térmico no reator nuclear, este trabalho propõe uma outra variação para o termo fonte não uniforme com relação ao tempo, expressada no caso 3, EQ. 5.3. Nesta análise, a solução transiente inicia do estado em regime permanente com termo de geração uniforme em todo o combustível, e à medida que o tempo cresce, o termo fonte de calor aumenta a partir de G^* , conforme esperado. O gráfico da FIG. 5.1.b é similar ao da FIG. 5.1.a, porém para a variação do termo fonte proposta no caso 3. Os perfis de temperatura são computados com $c_1=1$.

Ao analisar a FIG. 5.1.b, percebe-se que à medida que o tempo aumenta, a temperatura em uma mesma posição radial eleva-se incessantemente, ao contrário do que foi observado para o caso 1. Portanto, na abordagem do caso 3 proposto neste trabalho, o perfil de temperatura parte da condição inicial ($t=0$), e se eleva continuamente durante o transiente, o que reproduz melhor a física do problema térmico investigado no reator nuclear. Evidentemente, quanto mais próximo a superfície do cilindro menor será a variação entre a temperatura no tempo posterior e anterior, conforme pode ser visto na FIG. 5.1.b.

Uma outra análise é com relação a constante c_1 , cujo papel é claro. Percebe-se que para um mesmo tempo, quanto maior o valor de c_1 , maior será o termo de geração de calor, e conseqüentemente, maiores temperaturas locais na vareta combustível são observadas, conforme pode ser visto no gráfico da FIG. 5.2.

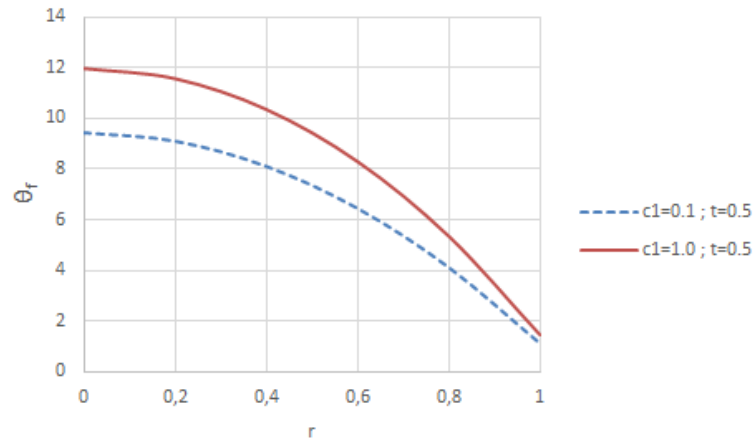


FIG. 5.2 Perfis de temperatura para o caso 3 com c_1 iguais à 0.1 e 1 em $t=0.5$, com $Bi=15$

Na FIG. 5.3 é investigado a influência do número de Biot em relação ao perfil de temperatura ao longo da vareta combustível. As curvas são referentes ao caso 3 com $c_1=1$ e $t=0.5$. Percebe-se que para um mesmo tempo, o perfil de temperatura ao longo do cilindro é menor para a análise com maior número de Biot. Este comportamento é esperado, já que quanto maior o número de Biot, maior é a transferência de calor por convecção junto a superfície da vareta combustível.

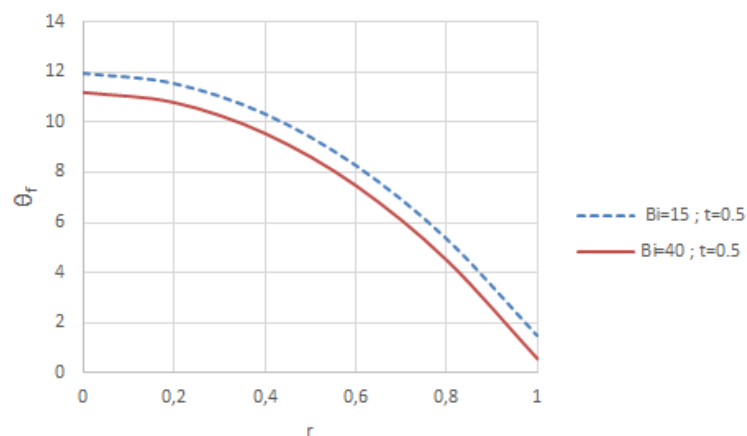


FIG. 5.3 Perfis de temperatura para o caso 3 com $c_1=1$ e $t=0.5$, para $Bi=15$ e $Bi=40$

A variação proposta por BHATTACHARYA et al. (2001) no caso 2, EQ. 5.2, para o termo fonte de calor é mais complexa, pois este passa a ser não uniforme na direção radial da vareta combustível. Nesta abordagem, o termo fonte aumenta com o raio, e então, a superfície do cilindro é o local com maior geração de calor. Conseqüentemente, em uma posição mais próxima ao centro do elemento, observa-se que o termo fonte de calor será menor que o termo fonte uniforme, G^* , caso $r^2 e^{c_3 r}$ seja menor que 1.

Para baixos valores de tempo tal fato acontece, e então a mesma situação observada anteriormente na variação proposta para o termo fonte no caso 1 se repete, onde em alguns tempos, a temperatura local é menor do que a temperatura inicial na vareta combustível, o que é contraditório com a física do problema térmico. Este fato fica evidente ao analisar as curvas mostradas no gráfico da FIG. 5.4.a, onde observa-se que para $t=0.05$ e $t=0.25$, a temperatura local é menor do que a temperatura inicial do elemento combustível, principalmente para baixos valores de r , onde o termo fonte é menor.

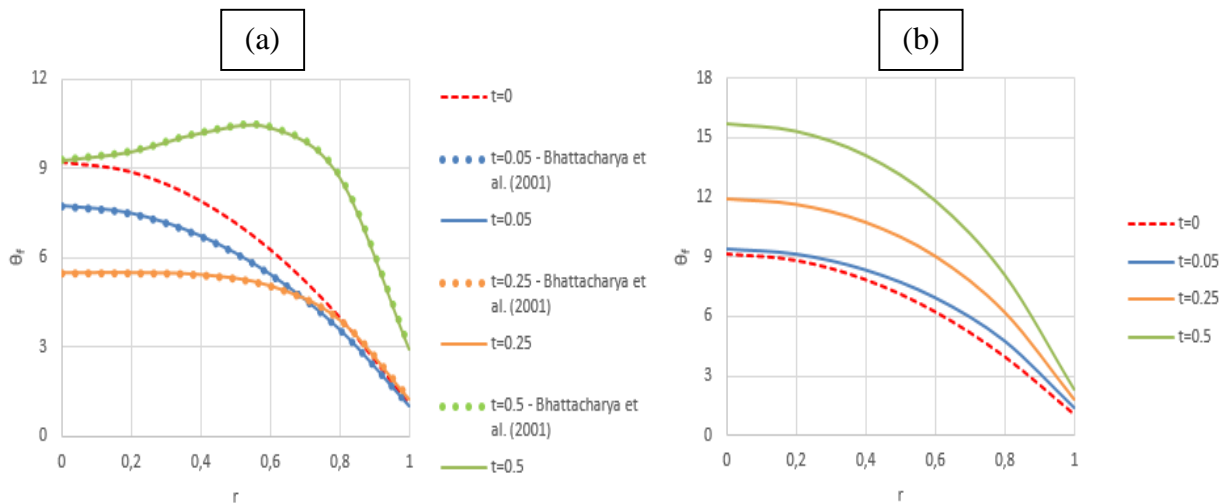


FIG. 5.4 Perfis de temperatura para $Bi=15$ (a) caso 2 com $c_3=4$ (b) caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$

Obviamente, à medida que o tempo aumenta este fato é superado, e então um aspecto interessante é observado, apesar da geração de energia ser maior junto à superfície do elemento combustível, a temperatura máxima é vista na região intermediária de r , como pode ser visto na FIG. 5.4.a para a curva com $t=0.50$. Tal fato

não deve causar estranheza, pois junto à superfície do cilindro acontece um resfriamento convectivo, e como a resistência à condução é maior que a resistência à convecção, devido ao número de Biot ser maior que 1 ($Bi=15$), o transporte de energia por condução na direção radial não é suficientemente rápido, gerando um acúmulo de energia na região intermediária, onde a máxima temperatura é observada.

Novamente a fim de buscar uma melhor representação física para o problema térmico investigado, este trabalho propõe uma outra variação para o termo fonte não uniforme com relação ao espaço e o tempo, que pode ser visto no caso 4, EQ. 5.4. Nesta análise, a solução transiente inicia do estado em regime permanente com termo de geração uniforme em todo o combustível, e mesmo para $r=0$ (centro do cilindro), à medida que o tempo cresce, o termo fonte de calor aumenta a partir de G^* , conforme esperado.

O gráfico da FIG. 5.4.b ilustra o perfil de temperatura local para a variação do termo fonte proposto no caso 4. Os perfis de temperatura plotados são para c_2 e c_3 iguais à 1 com $Bi=15$, em diferentes instantes de tempo. Ao analisar o gráfico, percebe-se que à medida que o tempo aumenta, a temperatura em uma mesma posição radial eleva-se continuamente, ao contrário do que foi visto na abordagem do caso 2, visto na FIG. 5.4.a.

Uma outra análise é com relação a constante c_2 , percebe-se que ao aumentar largamente o valor desta, maior será a variação do termo fonte na direção radial, e então a situação apresentada no gráfico da FIG. 5.4.a, onde à medida que o tempo aumenta, as maiores temperatura são vistas na região intermediária do elemento é reproduzida. O papel da constante c_3 é claro, à medida que essa aumenta, maiores temperaturas locais no elemento combustível são observadas.

Assim como já observado na análise térmica do caso 3, também percebe-se para o caso 4, que o perfil de temperatura ao longo do cilindro é menor para a análise com maior número de Biot, como não podia ser diferente. Tal fato pode ser observado na FIG. 5.5.

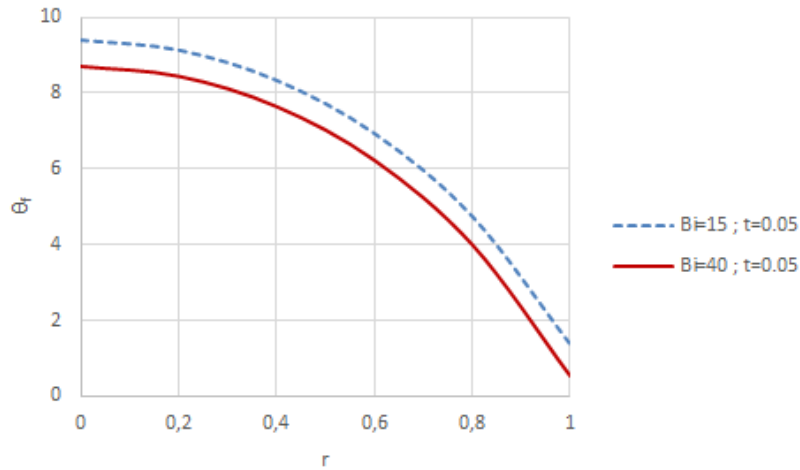


FIG. 5.5 Perfis de temperatura para o caso 4 com $c_2=c_3=1$ e $t=0.05$, para $Bi=15$ e $Bi=40$

É de interesse verificar a convergência da solução desenvolvida pela primeira modelagem. Em ambos os casos propostos nesta dissertação, a solução para a temperatura local é dividida em dois somatórios, como visto nas EQS. 3.28 e 3.29, e observa-se que independentemente da variação proposta para o termo fonte, o primeiro somatório do lado direito das equações são iguais. Evidentemente, tal fato não poderia ser diferente, já que este primeiro somatório refere-se a solução do problema homogêneo, sem termo fonte de calor. O segundo somatório é específico para cada caso proposto, e então, deve apresentar diferença quanto à sua convergência.

Na análise de convergência, é utilizada uma precisão de 6 dígitos significativos, ou seja, adota-se uma tolerância igual à 10^{-6} , e quando a diferença entre o termo posterior e anterior do somatório é menor que a tolerância estipulada, considera-se que o resultado está convergido. Primeiramente, é avaliado a convergência para o somatório referente à solução do problema homogêneo, que é igual para ambos os casos propostos. Este é avaliado em $r=1$, com $Bi=15$.

Observa-se que na fórmula deste somatório aparece um autovalor ao quadrado no denominador, e uma exponencial negativa em função do tempo no numerador. Como os autovalores são crescentes e positivos, estes tendem à fazer com que a série apresente convergência. Devido à exponencial negativa, à medida que o tempo aumenta, a tendência é que a série apresente uma convergência mais rápida.

TAB. 5.1 Análise de convergência para o somatório referente à solução do problema homogêneo em $r=1$.

Tempo adimensional (t)	Quantidade de termos do somatório
1×10^{-6}	11
1×10^{-5}	11
1×10^{-4}	10
1×10^{-3}	9
1×10^{-2}	6
1×10^{-1}	3
1	2

Tal fato é verificado na TAB. 5.1, onde à medida que o tempo cresce, a quantidade de termos do somatório para se atingir a precisão desejada diminui, sendo que a partir de $t=1$, a série converge logo na primeira iteração. De um modo geral, a série apresenta rápida convergência mesmo para baixos valores de tempo, muito em função do comportamento supracitado dos autovalores.

TAB. 5.2 Análise de convergência para o somatório referente à solução do problema não-homogêneo em $r=1$, para o caso 3.

Tempo adimensional (t)	Quantidade de termos do somatório
1×10^{-6}	2
1×10^{-5}	2
1×10^{-4}	2
1×10^{-3}	9
1×10^{-2}	11
1×10^{-1}	11
1	13
10	19
100	33

A análise apresentada na TAB. 5.2 refere-se ao somatório da parte não homogênea do problema, para o caso 3. Este é o segundo somatório do lado direito da EQ. 3.28, avaliado em $r=1$, para $c_1=1$ e $Bi=15$. Observa-se que agora, a quantidade de termos necessário para se atingir a precisão desejada passa a aumentar à medida que o tempo cresce. Tal fato é esperado, já que o termo fonte variável é crescente com o tempo. De um modo geral, a série apresenta uma rápida convergência, mesmo à medida que o tempo cresce.

TAB. 5.3 Análise de convergência para o somatório referente à solução do problema não-homogêneo em $r=1$, para o caso 4.

Tempo adimensional (t)	Quantidade de termos do somatório
1×10^{-6}	2
1×10^{-5}	4
1×10^{-4}	17
1×10^{-3}	25
1×10^{-2}	25
1×10^{-1}	26
1	32
10	293
100	21859

A análise apresentada na Tabela 5.3, refere-se ao somatório da parte não homogênea do problema, para o caso 4. Este é o segundo somatório do lado direito da EQ. 3.29, avaliado em $r=1$, para $c_2=1$, $c_3=1$ e $Bi=15$. Assim como visto para o caso 3, a quantidade de termos necessário para se atingir a precisão desejada passa a aumentar à medida que o tempo cresce, porém com uma taxa maior em relação ao caso anterior. Observa-se que à medida que t aumenta bruscamente, uma quantidade grande de termos são necessários para que a série apresente resultados convergidos dentro da precisão estipulada. É de interesse computar a solução transiente até a fusão do material de revestimento, e dentro deste contexto, $t > 10$ já é muito superior do que o tempo crítico.

Em geral, a taxa de convergência para as expansões das autofunções mostrou ser muito rápida, e para os casos analisados, dentro do intervalo de tempo de interesse, uma expansão com 40 termos é capaz de prever resultados totalmente convergidos para uma aproximação com seis dígitos de precisão.

Portanto, acredita-se que a ferramenta desenvolvida seja uma boa alternativa para abordagens mais envolvidas, tais como métodos puramente numéricos, baseados na aproximação de elementos finitos ou diferenças finitas.

5.2 RESULTADOS DA SEGUNDA MODELAGEM

Na seção anterior foi discorrido acerca da solução analítica para o combustível, sendo que os resultados foram apresentados sob o ponto de vista adimensional, a fim de serem comparados com a solução de BHATTACHARYA et al. (2001). Foi visto que as variações propostas para o termo fonte de calor, expressadas nos casos 3 e 4, reproduzem melhor a física do problema térmico investigado neste trabalho, portanto, a partir de agora somente estes serão considerados na análise. Eles são vistos nas EQS. 5.3 e 5.4, respectivamente.

Esta seção apresenta os resultados obtidos pela solução analítico-numérica desenvolvida na segunda modelagem deste trabalho, que levou em conta a região do combustível e do material de revestimento, sendo que esse foi analisado a partir da abordagem por parâmetros concentrados.

Para se analisar o problema sob a forma dimensional é necessário conhecer os parâmetros e as propriedades termofísicas da vareta combustível. Os parâmetros típicos de um reator PWR são mostrados na TAB. 5.4 e as propriedades termofísicas do material combustível e do material de revestimento na TAB. 5.5. Como visto em AN et al. (2014), as propriedades do Zircaloy-4 são difíceis de serem encontradas na literatura, portanto considera-se para o material de revestimento o Zircônio.

A partir dos dados presentes nas TABS. 5.4 e 5.5, os seguintes parâmetros adimensionais são determinados: $\mu=0,5753$; $\epsilon=0,1390$ e $G^*=3,3043$.

TAB. 5.4 Dados de um típico reator nuclear PWR (TODREAS & KAZIMI,1990)

Parâmetros	Valor
$h_g [W/m^2K]$	6469,5
$G [W/m^3]$	318121000
$R_f [mm]$	4,1
$R_g [mm]$	0,08
$R_c [mm]$	0,57
$T_\infty [K]$	578

TAB. 5.5 Propriedades médias para o Urânio e o Zircônio (AN et al., 2014)

Parâmetros	Combustível (Urânio)	Revestimento (Zircônio)
$\rho [Kg/m^3]$	10330	6415
$k [W/mK]$	2,8	30,8
$c_p [J/KgK]$	421	390
$T_{fusão}[K]$	3120	2150

Conforme discorrido durante a segunda modelagem, seção 3.2, para obter-se o campo de temperatura transiente no cilindro, avalia-se numericamente o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante, e posteriormente, aplica-se a fórmula de inversão da Transformada Integral, sendo que essa é baseado em uma expansão das autofunções do problema regular de autovalor de Sturm-Liouville. Logo, é de interesse verificar a convergência da solução, a fim de assegurar resultados convergidos. Nesta seção, outro tipo de análise de convergência é apresentada, onde essa é baseada dentro do seguinte critério: se ao aumentar largamente a quantidade de termos do somatório, o resultado final da grandeza de interesse não variar significativamente, o mesmo está convergido.

A FIG. 5.6 ilustra este procedimento para as duas variações de termos fontes propostos neste trabalho, expressados nos casos 3 e 4. O gráfico apresenta o perfil de temperatura adimensional ao longo da direção radial da vareta combustível para $Bi=15$. As curvas são plotadas no tempo crítico, para cada termo fonte variável

investigado, que no caso 3 é em $t=23,85$, enquanto que para o caso 4 é em $t=2,93$. As curvas do caso 3 são para $c_1=1$, e as do caso 4 para $c_2=1$ e $c_3=1$.

Percebe-se pela FIG. 5.6 que em ambos os casos analisados, as curvas com 10, 30 e 50 termos do somatório apresentam resultados similares, logo, uma expansão das autofunções com 10 termos é suficiente para prever resultados convergidos nos tempos especificados. No geral, é de interesse verificar o transiente até o tempo crítico, e dentro deste intervalo de interesse a solução mostra uma rápida convergência com baixo custo computacional.

Como as curvas foram obtidas no tempo crítico, em posições próximas ao material de revestimento, $r=1$, as temperaturas tendem à ser iguais, independentemente da variação do termo fonte proposta, conforme pode ser observado na FIG. 5.6.

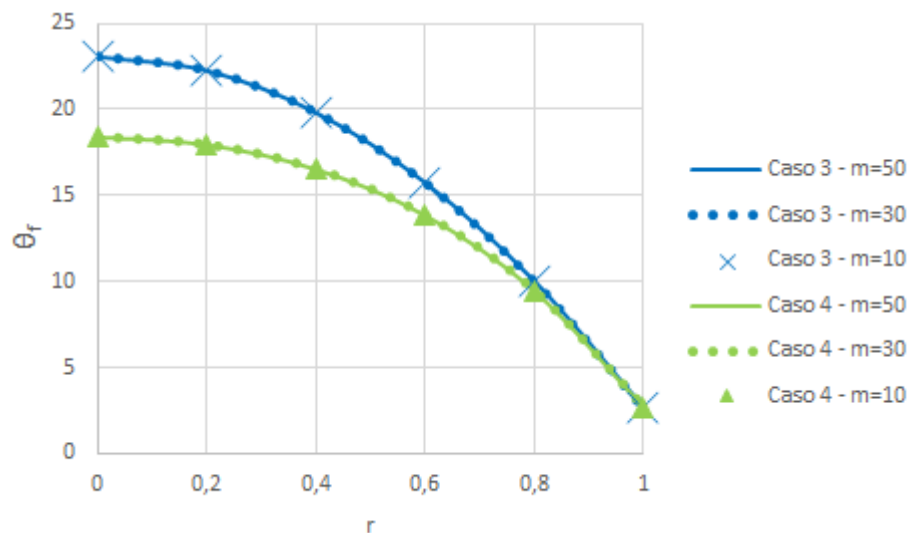


FIG. 5.6 Análise de convergência da segunda modelagem para os casos propostos

O principal objetivo desta seção é inferir acerca da influência da região do material de revestimento na transferência de calor na vareta combustível. Para tal, os resultados apresentados pela segunda modelagem são comparados com os da primeira, onde a espessura do material de revestimento não foi considerada. As FIGS. 5.7 e 5.8 apresentam tal procedimento, onde foram plotados os perfis de temperatura adimensional ao longo da direção radial da vareta combustível para os casos 3 e 4, respectivamente.

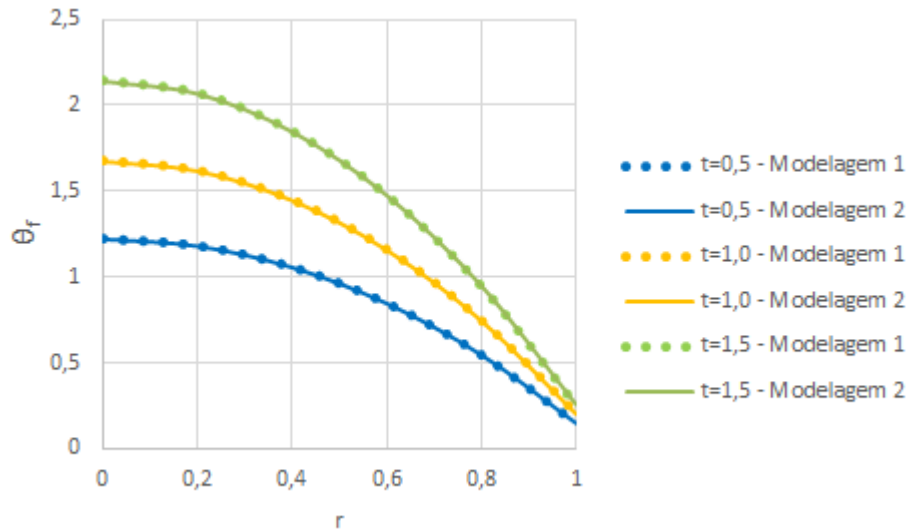


FIG. 5.7 Comparação entre a primeira e segunda modelagem: perfis de temperatura adimensional para o caso 3 com $c_1=1$, para $Bi=15$

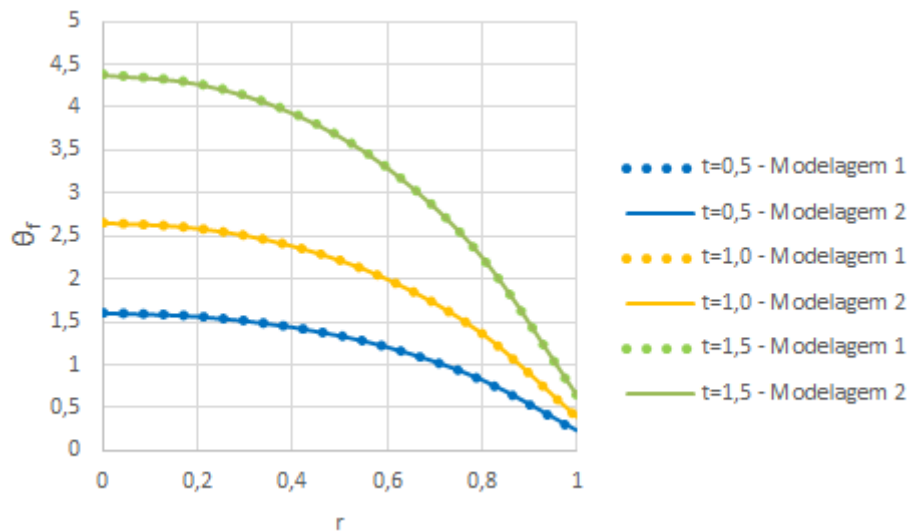


FIG. 5.8 Comparação entre a primeira e segunda modelagem: perfis de temperatura adimensional para o caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$, para $Bi=15$

A análise da distribuição de temperatura na vareta combustível para os casos em escrutínio já foi realizada na seção 5.1, e em suma, foi visto que a temperatura é máxima no centro do cilindro e decai ao longo da direção radial, devido ao resfriamento convectivo na superfície do revestimento. Ademais, o perfil de temperatura cresce com o tempo, conforme esperado.

Através da análise das FIGS. 5.7 e 5.8, um dos objetivos deste trabalho é verificado. Observa-se que a segunda modelagem, onde a espessura do revestimento

é considerada, apresentou resultados coincidentes com a primeira modelagem, onde não considerou-se a região do material de revestimento. Por conseguinte, pode-se inferir que a região do material de revestimento não apresenta maiores influências térmicas na transferência de calor por condução na vareta combustível, já que em ambos os casos propostos, os resultados comparados em diferentes instantes de tempo apresentaram exímia concordância.

Um parâmetro de grande interesse de engenharia é o perfil de temperatura no material de revestimento, ou seja, a distribuição de temperatura ao longo do tempo em $r=1$. A partir deste, o tempo crítico, que é definido como o período requerido para que o material de revestimento da vareta combustível atinja à sua temperatura de fusão, pode ser avaliado. O gráfico da FIG. 5.9 mostra a variação do tempo crítico com relação ao número de Biot, para as variações do termo fonte propostas neste trabalho, casos 3 e 4.

A análise deste gráfico reitera a influência do número de Biot com relação ao perfil de temperatura local no elemento combustível. Conforme já discutido, quanto maior o número de Biot, maior é taxa de transferência de calor por convecção junto a superfície do cilindro. Consequentemente, menor será o perfil de temperatura ao longo do cilindro, e então, um maior período de tempo será necessário para que o revestimento atinja à sua temperatura de fusão. Logo, com o aumento do número de Biot, maior é o tempo crítico.

Tal comportamento pode ser observado no gráfico da FIG. 5.9. O caso 3 foi plotado com $c_1=1$ e o caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$. O eixo horizontal do gráfico representa o número de Biot, e o eixo vertical o tempo crítico em minutos. Percebe-se que para o caso 4, o aumento do número de Biot não garante um crescimento significativo do tempo crítico, e então, uma outra maneira de intensificar o resfriamento junto a vareta combustível deve ser avaliada. Além disso, a análise do gráfico sugere que é mandatário ter uma variação precisa do termo fonte de calor, pois os casos analisados levaram a tempos críticos distintos. Dentro deste contexto, a solução inversa pode desempenhar um importante papel, conforme será discutido adiante.

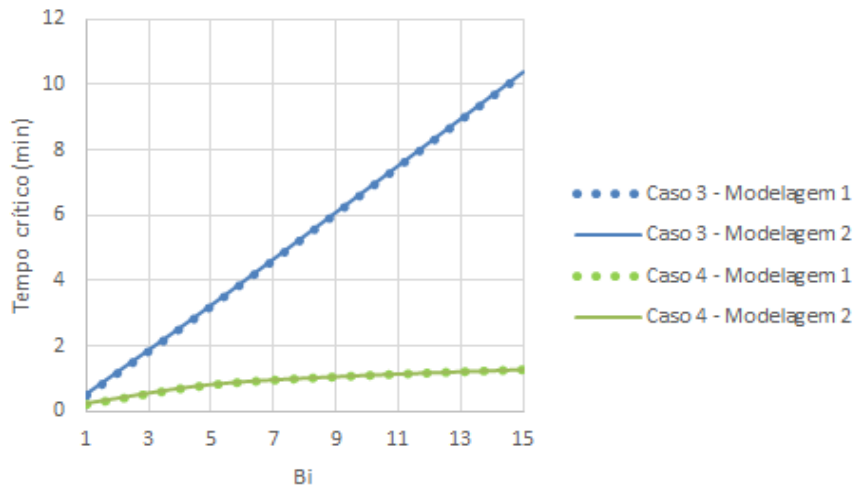


FIG. 5.9 Variação do tempo crítico com relação ao número de Biot para os casos 3 e 4

A primeira e a segunda modelagem levaram a tempos críticos idênticos, como não podia ser diferente, já que o material de revestimento não possui influência térmica relevante na vareta combustível.

O número de Biot é um parâmetro adimensional, definido na segunda modelagem pela EQ. 3.64. Conforme visto no Apêndice 1, a análise por parâmetros concentrados pode ser utilizada para a maioria das aplicações de engenharia se o número de Biot for menor que 0,1 (OZISIK, 1993).

Tal fato pode causar estranheza, pois nesta segunda modelagem utilizou o conceito de parâmetros concentrados e os resultados estão sendo apresentados para um $Bi=15$. A análise por parâmetros concentrados foi utilizada apenas para a região do material de revestimento e não para todo o domínio radial da vareta combustível, portanto, para validar a modelagem por parâmetros concentrados feita neste trabalho, vamos definir um número de Biot do revestimento, sendo dado por:

$$Bi_c = \frac{hR_c}{k_c} \quad (5.5)$$

Observa-se que o número de Biot do revestimento já foi mencionado durante o desenvolvimento matemático e precisa ser bem menor que 1, condição vista na EQ. 3.43, e que precisa ser satisfeita para a aplicação da modelagem desenvolvida. Obviamente, os resultados apresentados com $Bi=15$ não deve causar estranheza.

Para este número de Biot, o coeficiente de transferência de calor por convecção h é avaliado através da EQ. 3.64 em 8994 W/m²K. Com h determinado, avalia-se o número de Biot do revestimento através da EQ. 5.5, obtendo $Bi_c=0,16$.

Portanto, dentro do que é visto em OZISIK (1993), o número de Biot do revestimento está próximo da faixa válida para utilizar o conceito por parâmetros concentrados sem maiores perdas na solução desenvolvida, e então, não há nenhuma anormalidade nos resultados apresentados para $Bi=15$.

No trabalho de AN et al. (2014) foi visto que a solução em que se utiliza o conceito dos parâmetros concentrados não apresentava resultados acurados para altos coeficientes de transferência de calor, e então, a solução precisava ser desenvolvida para aumentar a sua aplicabilidade. Observa-se então, que a segunda modelagem é uma excelente contribuição, pois da forma como se aplicou o conceito dos parâmetros concentrados, apenas para a região do material de revestimento, é possível utilizar a solução para altos coeficientes de transferência de calor por convecção.

5.3 RESULTADOS DA TERCEIRA MODELAGEM

Esta seção apresenta os resultados obtidos pela solução analítico-numérica desenvolvida pela terceira modelagem deste trabalho, onde engloba-se o conjunto completo da vareta combustível, com as regiões do combustível, gap e revestimento.

Os parâmetros típicos de um reator nuclear PWR e as propriedades termofísicas do material combustível e do revestimento, que são necessários para computar os resultados, já foram apresentados nas TABS. 5.4 e 5.5.

Na seção anterior, o principal objetivo foi verificar a influência da região do material de revestimento na transferência de calor na vareta combustível, sendo que os resultados mostraram que o mesmo não possui relevância térmica significativa no problema em escrutínio. Na seção atual, onde os resultados da terceira modelagem são expostos, o principal objetivo é inferir acerca da região denominada “gap” na transferência de calor na vareta combustível. Para tal, os resultados da terceira modelagem são comparados com os obtidos pelas modelagens anteriores, onde a região do gap não foi considerada na análise térmica.

Conforme explicitado na seção 3.3, o método de solução da terceira modelagem é similar ao da segunda. Em ambas abordagens, o conjunto de equações diferenciais ordinárias resultantes foi avaliado numericamente, sendo que na forma matricial, percebeu-se diferenças apenas em alguns coeficientes. Portanto, ao verificar a convergência da solução obtida pela terceira modelagem, através do mesmo critério adotado na seção anterior, observou-se a mesma tendência de convergência dos resultados da segunda modelagem, muito em função da similaridade supracitada.

A FIG. 5.10 ilustra este procedimento para as duas variações de termos fontes propostos neste trabalho. O gráfico apresenta o perfil de temperatura no revestimento ao longo do transiente de interesse para cada termo fonte variável. Novamente, as curvas com 10, 30 e 50 termos do somatório apresentam resultados similares, logo, uma expansão das autofunções com 10 termos é suficiente para prever resultados convergidos no transiente de interesse em ambos os casos discutidos.

Outro aspecto interessante é observado nos gráficos da FIG. 5.10. O termo fonte expressado no caso 3 varia linearmente com o tempo, conforme pode ser visto na EQ. 5.3. Logo, tal fato faz com que o perfil de temperatura local na vareta combustível também varie linearmente com o tempo, como mostrado na FIG. 5.10.a. Já o termo fonte abordado pelo caso 4, EQ. 5.4, varia exponencialmente com o tempo, e então, o perfil de temperatura local na vareta combustível também possui um comportamento exponencial ao longo do tempo, como exposto na FIG. 5.10.b.

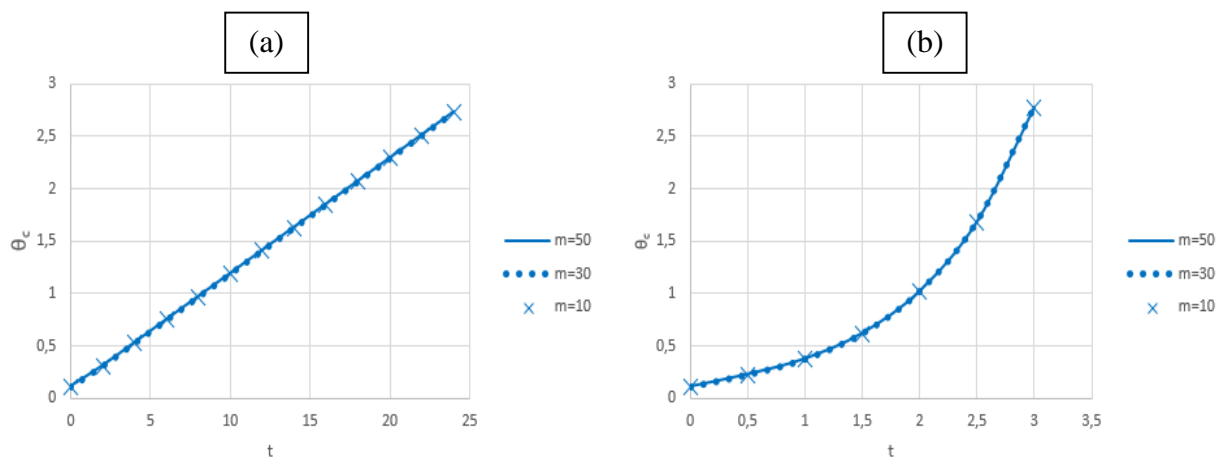


FIG. 5.10 Análise de convergência para a terceira modelagem com $Bi=15$ (a) caso 3 com $c_1=1$ (b) caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$

A FIG 5.11 compara os resultados obtidos pela terceira modelagem com as soluções anteriores. Nesta é possível observar os perfis de temperatura ao longo da região do material combustível em diferentes instantes de tempo, sendo que a FIG. 5.11.a é para o caso 3, e a FIG. 5.11.b para o caso 4.

Em ambos os casos, ao analisar apenas as curvas da terceira modelagem, percebe-se que à medida que o tempo cresce, o perfil de temperatura na região do combustível aumenta, de acordo com o esperado.

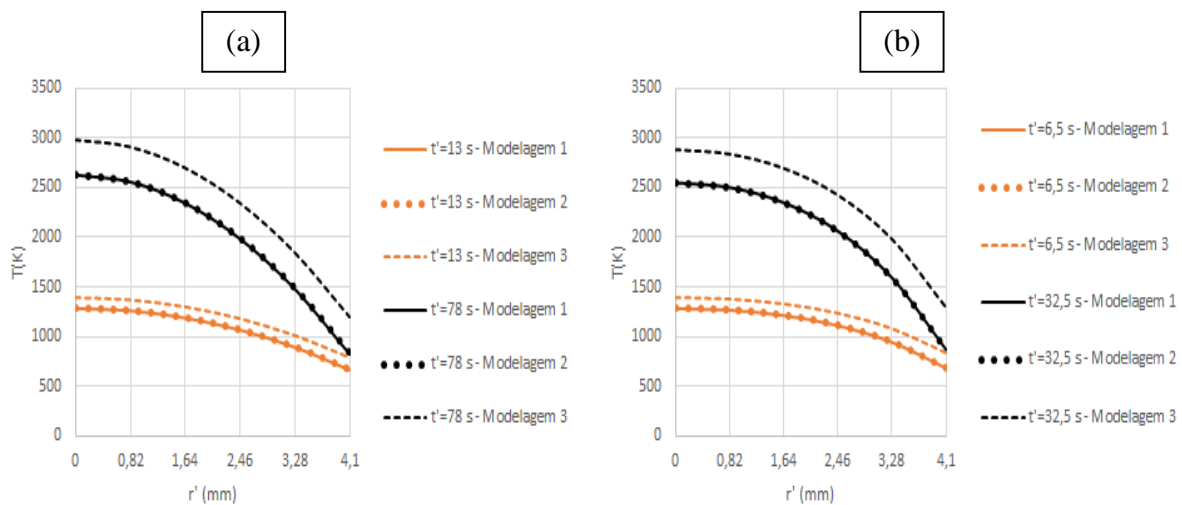


FIG. 5.11 Perfis de temperatura ao longo da região do combustível de urânio com $Bi=15$ em diferentes instantes de tempo (a) caso 3 com $c1=1$ (b) caso 4 com $c2=1$ e $c3=1$

Conforme já discutido para ambos os casos, os resultados da primeira e da segunda modelagem são similares, entretanto, observe pelas curvas expostas na FIG. 5.11, que a terceira modelagem, onde o gap foi investigado, apresenta resultados diferentes. Por exemplo, na FIG. 5.11.a, para um mesmo tempo, o perfil de temperatura na região do combustível é maior na análise com o “gap” (terceira modelagem). Observe ainda, que a diferença passa a ser mais significativa à medida que o tempo aumenta, conforme pode ser observado nas curvas para $t=78s$ em relação a $t=13s$.

Portanto, a região do gap possui influência no perfil de temperatura radial do combustível, e sobrestima o mesmo em relação as modelagens anteriores. Tal fato acontece devido à resistência térmica imposta pelo gap na transferência de calor na

vareta combustível, e como o fluxo de calor se dá no sentido do centro para a superfície da vareta, quando o gap não é considerado, menores temperaturas locais no material combustível são observadas.

Entretanto, a região do gap não possui relevância no perfil de temperatura na região do material de revestimento, ou seja, no perfil de temperatura superficial da vareta combustível. Tal fato é constatado na análise da FIG. 5.12, observe que em ambos os casos analisados, o perfil de temperatura no material de revestimento obtido pela terceira modelagem apresentou excelente concordância com os calculados pelas outras modelagens.

Como o perfil de temperatura no material de revestimento obtido pela terceira modelagem não apresentou grande diferença em relação as soluções anteriores, o tempo crítico também não irá apresentar diferenças significativas, sendo os mesmos já explicitados na FIG. 5.9.

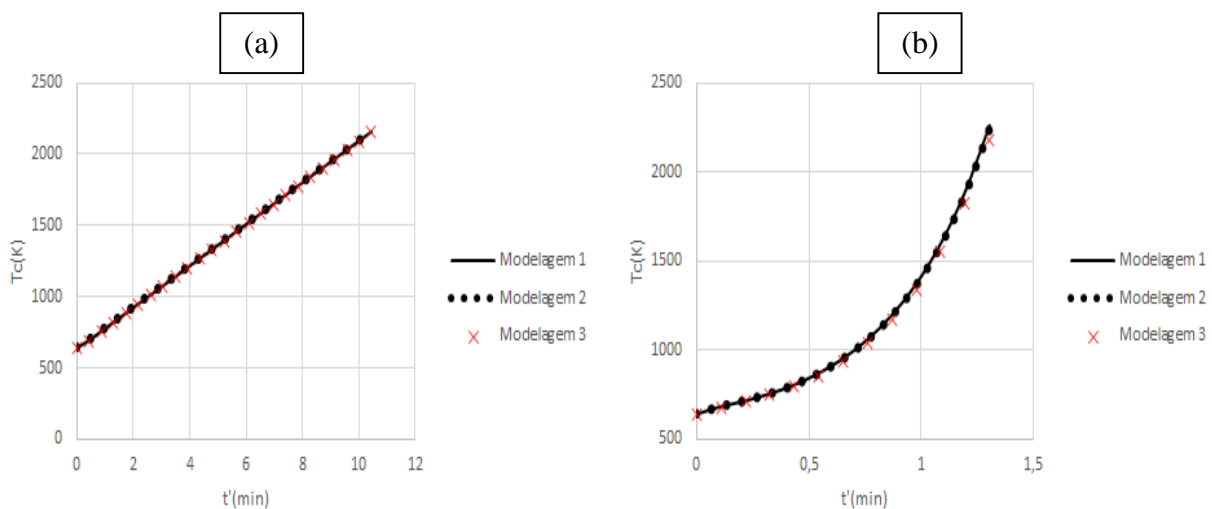


FIG. 5.12 Perfis de temperatura na superfície do material de revestimento ao longo do tempo com $Bi=15$ (a) caso 3 com $c_1=1$ (b) caso 4 com $c_2=1$ e $c_3=1$

Tais conclusões obtidas pela terceira modelagem foram investigadas na literatura e de acordo com YANG et al. (2013), onde esses autores analisaram não uniformidades circunferenciais na temperatura de parede, no fluxo de calor e no coeficiente de transferência de calor na superfície da vareta, o “gap” pode ser negligenciado para computar o perfil de temperatura na superfície do material de revestimento. Em contrapartida, YANG et al. (2013) mencionaram que o “gap” tem grande influência na distribuição de temperatura radial por causa de sua resistência

térmica. Portanto, as considerações de YANG et al. (2013) coincidem com os resultados obtidos pela terceira modelagem acerca da influência do “gap”, apesar de serem análises térmicas transientes com abordagens diferentes na vareta combustível.

De acordo com PODDAR et al. (2015), uma considerável queda de temperatura ocorre na região do gap, devido à baixa condutância de calor nesta região do gás de preenchimento, usualmente com hélio puro, entre o combustível e o revestimento.

A fim de ilustrar o perfil de temperatura ao longo de toda a vareta combustível na terceira modelagem, em ambos os casos escrutinados, a FIG. 5.13 é apresentada.

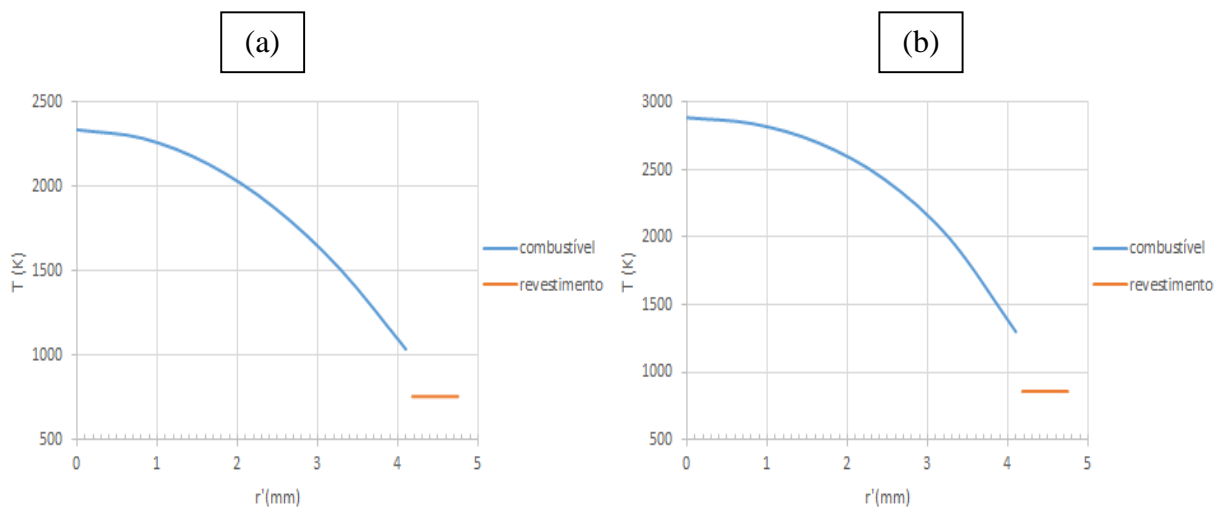


FIG. 5.13 Perfis de temperatura ao longo da vareta combustível com $Bi=15$ (a) caso 3 com $c1=1$ em $t'=52s$ (b) caso 4 com $c2=1$ e $c3=1$ em $t'=32,5 s$

Observa-se pela FIG. 5.13, que para ambas as variações propostas para o termo fonte de calor, a temperatura diminui ao longo da direção radial da região do combustível, e na região do “gap” novo decaimento é observado, e no material de revestimento a temperatura permanece constante, devido à abordagem concentrada.

Conforme discutido dentro da modelagem 3, especificamente na seção 3.6, AN et al. (2014) investigaram o processo de fusão em uma vareta combustível nuclear através do método da entalpia. Os referidos autores especificaram um coeficiente de transferência de calor e solucionaram o problema na vareta combustível, sendo essa a solução em regime permanente, seguidamente, eles diminuíram o coeficiente de

transferência de calor, com o intuito de simular um possível acidente por falta de refrigeração, e resolveram o problema formulado novamente, simulando o transiente.

Apesar desta abordagem ser diferente do que é feito nesta dissertação, já que aqui o termo fonte é variável e no trabalho dos autores citados considera-se o mesmo constante, a terceira modelagem pode ser utilizada com termo fonte constante, a fim de ser comparada com os resultados obtidos por AN et al. (2014) com mudança de fase na vareta combustível e propriedades constantes.

A FIG. 5.14 mostra o perfil de temperatura ao longo do tempo em três posições de interesse na vareta combustível, no centro, na parede do combustível e no material de revestimento, para a solução obtida por AN et al. (2014) e para a modelagem 3. Os referidos autores calcularam o perfil de temperatura para $h=34 \text{ kW/m}^2\text{K}$, simulando a condição inicial em regime permanente, onde o núcleo do reator opera em condição normal.

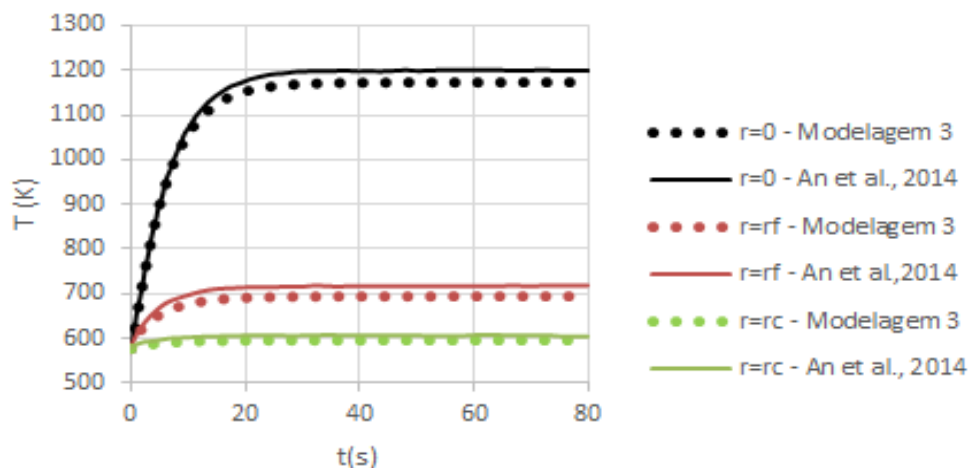


FIG. 5.14 Perfil de temperatura na vareta combustível nuclear em condição normal de operação

Percebe-se que no problema investigado por AN et. al. (2014), assim como foi discutido na análise térmica com termo fonte variável desta dissertação, a temperatura é máxima no centro do cilindro e diminui ao longo da direção radial, conforme visto na FIG. 5.14, já que ao longo do tempo, a curva no centro do cilindro é maior que a da parede do combustível, e essa é maior que a do revestimento.

Ainda neste gráfico, percebe-se que as duas soluções apresentaram boa concordância, principalmente antes de se alcançar o regime permanente. Mesmo

após $t'=20$ s, onde o estado permanente é atingido, o erro relativo máximo entre as duas soluções foi de aproximadamente 2%. Tal fato é esperado, pois para esta abordagem, AN et al. (2014) mostrou que com este coeficiente de transferência de calor por convecção, a mudança de fase não ocorre na vareta combustível. Logo, a formulação de AN et al. (2014) pelo método da entalpia contemplou apenas a fase sólida, assim como na formulação da terceira modelagem.

A fim de reproduzir o problema transiente, ocasionado pelo acidente por falta de refrigeração na vareta combustível, AN et al. (2014) diminuíram o coeficiente de transferência de calor para $h=0,2$ kW/m²K, pois para valores maiores a mudança de fase não acontecia. A solução de AN et al. (2014) com mudança de fase e a terceira modelagem são comparadas no centro do combustível e no material de revestimento, conforme exposto na FIG. 5.15.

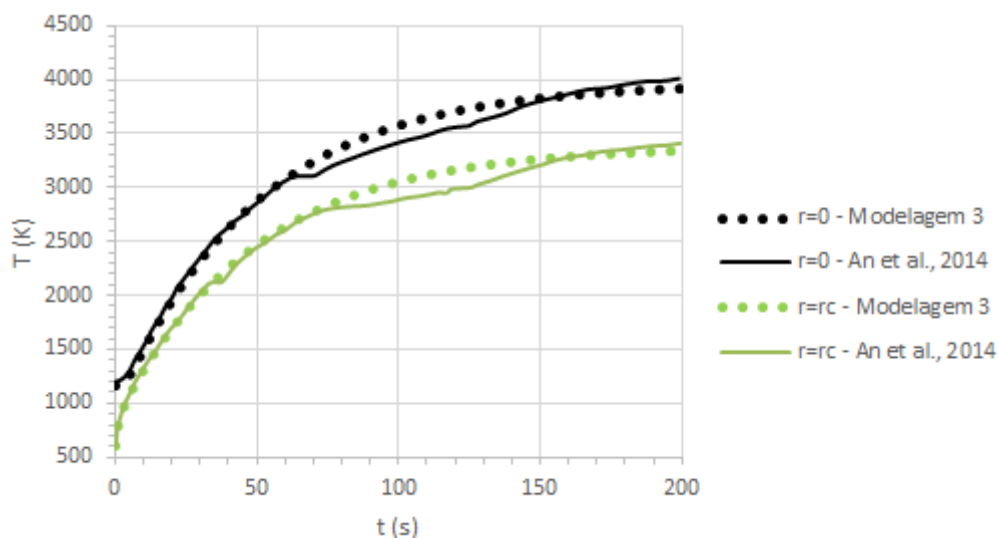


FIG. 5.15 Perfil de temperatura na vareta combustível nuclear em condição de acidente por falta de refrigeração.

Como visto na TAB. 5.5, as temperaturas de fusão do material combustível e do revestimento são respectivamente, 3120 K e 2150 K. Nos resultados obtidos por AN et al. (2014) mostrados na FIG. 5.15, a mudança de fase é observada no intervalo onde a temperatura se mantém constante. Nota-se que para o centro do combustível, tal fato ocorre entre aproximadamente 60 e 70 segundos, e para o revestimento entre 30 e 40 segundos. Se o grande interesse do problema for calcular o tempo crítico, observa-se que a terceira modelagem, onde a mudança de fase não acontece, é

suficiente para prevê-lo, já que os pontos onde a mudança de estado se inicia são coincidentes em ambos os resultados comparados.

No geral as soluções apresentaram boa concordância, sendo que para o intervalo de tempo entre 70 e 130 segundos um distanciamento maior foi observado, mas o erro relativo entre as duas soluções permaneceu menor que 5%. Neste período de tempo referido, a solução de AN et al. (2014) apresentou oscilações, que pode ser devido ao comportamento da solução pelo método da entalpia com discretização por diferenças finitas, e que pode ser uma justificativa para a variação dos resultados neste intervalo de tempo. Após 200 s o regime permanente é alcançado e novamente, os resultados são praticamente coincidentes.

Portanto, como uma primeira observação acerca da comparação de resultados entre a terceira modelagem, em que não se utilizou a mudança de fase, e a solução apresentada por AN et al. (2014), é que apesar da grande importância dos problemas com mudança de fase, este fator não mostrou influenciar significativamente no problema térmico na vareta combustível. Na TAB. 5.5 foram mostradas as propriedades termofísicas médias para o combustível e o revestimento no estado sólido, sendo que para o estado líquido os valores não se alteram largamente, o que justifica a similaridade dos resultados obtidos pela modelagem 3 com os de AN et al. (2014).

Ao analisar as curvas de temperatura da parte interna e externa do material de revestimento ao longo do tempo no trabalho de AN et al. (2014), percebe-se que a variação entre elas é insignificante, ou seja, o gradiente de temperatura no material de revestimento é extremamente pequeno, o que reitera os resultados obtidos pela segunda modelagem deste trabalho, onde verificou-se que o revestimento não desempenha um papel térmico importante na vareta combustível.

5.4 RESULTADOS DO PROBLEMA INVERSO

Os resultados apresentados nas seções anteriores investigaram a transferência de calor transiente por condução na vareta combustível, quando todas as informações casuais do problema foram tratadas como conhecidas. Foi visto que as formas

funcionais expressadas nos casos 3 e 4, EQS. 5.3 e 5.4, representam melhor a física do problema de geração de energia na vareta combustível.

A análise inversa neste trabalho possui o intuito de estimar o termo fonte variável no combustível, expressados nos casos 3 e 4. Especificamente, busca-se estimar o parâmetro c_1 para o caso 3, e c_2 e c_3 para o caso 4. O termo fonte constante adimensional (G^*) já é conhecido.

Ao estimar os parâmetros c_1 , c_2 e c_3 , o termo fonte variável pode ser avaliado ao longo do transiente em qualquer posição do combustível. Tal fato é muito importante, pois conforme supracitado, se o termo fonte de calor variável é conhecido, a distribuição de temperatura transiente na vareta combustível pode ser obtida, o que é fundamental para a operação do reator nuclear.

Portanto, o problema inverso apresentado neste trabalho possui grande aplicação para o problema térmico do reator nuclear, pois se um sensor estiver disponível para capturar medidas transientes na superfície do cilindro, a determinação do termo fonte variável passa pela solução do problema inverso por estimação de parâmetros desconhecidos para uma função de teste. Por exemplo, a EQ. 5.4 é uma função de teste com parâmetros c_2 e c_3 à serem determinados, a fim de ajustar a curva das temperaturas estimadas pelo problema direto, com a curva das temperaturas medidas pelo sensor, até minimizar a função objetivo.

Os parâmetros são estimados pela técnica determinística de Levenberg-Marquardt (OZISIK & ORLANDE, 2000), e pelo método estocástico PSO (COLAÇO et al., 2006). Conforme visto na seção 4.3, antes de começar as estimativas dos parâmetros, recomenda-se realizar a análise de sensibilidade para saber se os mesmos podem ser estimados e qual o melhor intervalo de tempo para a solução inversa.

Conforme explicitado na seção 4.2, são gerados dados pseudoexperimentais com ruídos devido à indisponibilidade de medidas reais de temperaturas transientes na parede da vareta combustível, a fim de verificar a acurácia dos métodos de solução do problema inverso na vareta combustível. O problema direto para a solução inversa é dado pela terceira modelagem deste trabalho, pois essa é a mais completa para a vareta combustível. O problema inverso é investigado para um número de $Bi=15$, e a posição de medida, r_{sensor} , é na superfície da vareta.

Para a primeira função de teste, vista no caso 3, EQ. 5.3, tem-se um problema inverso linear, onde a matriz jacobiana não é função do parâmetro c_1 à ser estimado.

A FIG. 5.16 mostra a análise de sensibilidade para o caso 3. Observa-se nesta a variação do determinante $J^T J$ ao longo do tempo, em que se considera $l=100$, que é o número total de medidas. Percebe que a magnitude do determinante de $J^T J$ aumenta continuamente no tempo, e que para tempos menores que um, o seu valor é próximo de zero, o que pode fazer com que o problema inverso seja mal condicionado (OZISIK & ORLANDE, 2000). Evidentemente, esta primeira análise envolve a estimativa de apenas um parâmetro, o que não deve causar maiores problemas para a solução, todavia, um tempo adequado para o experimento é $2 < t < 4$.

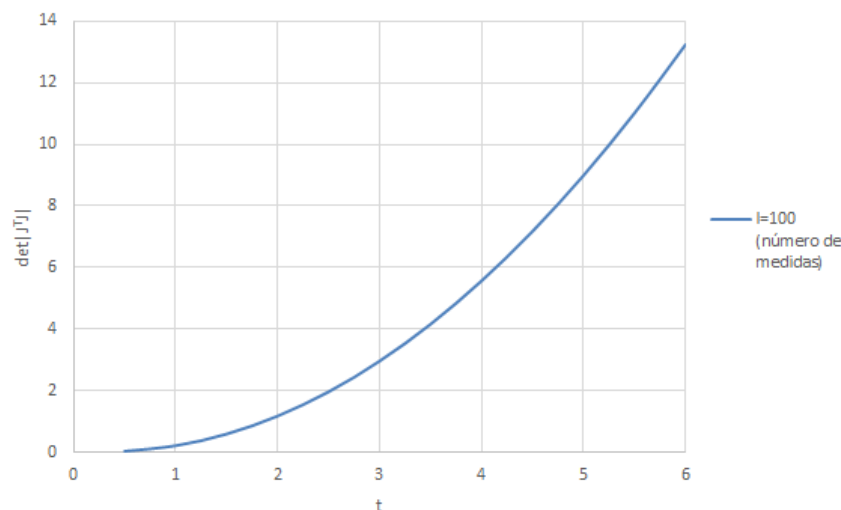


FIG. 5.16 Determinante de $J^T J$ para a função de teste expressada no caso 3

De modo a verificar a metodologia do problema inverso para estimativa de parâmetros na vareta combustível, os parâmetros conhecidos previamente são utilizados para gerar as temperaturas pseudoexperimentais com ruídos, e essas comparadas com as temperaturas estimadas pelo problema direto, ao longo do procedimento iterativo. Através desta abordagem é possível comparar as rotinas de otimização desenvolvidas.

Para gerar os pontos pseudoexperimentais foi utilizado o parâmetro $c_1=1$, sendo este considerado o valor real do parâmetro. Para as temperaturas estimadas, utilizou-se uma estimativa inicial com $c_1=30$ no método determinístico de Levenberg-Marquardt, ou seja, trinta vezes maior que o parâmetro real. E na técnica estocástica do PSO, usou-se uma população com 50 indivíduos, com limite inferior igual à 0,1 e

limite superior igual a 30. Utilizou-se $\alpha=0,5$ e $\beta=1$ (COLAÇO et al., 2006). Os critérios de parada são vistos nas EQS. 4.19 e 4.20, onde a tolerância para o critério da discrepância foi igual a 0,00009.

Os resultados para a estimativa do parâmetro c_1 pelo método de Levenberg-Marquardt e do PSO são mostrados nas TABS. 5.7 e 5.8, respectivamente.

TAB. 5.6 Caso 3: parâmetro real utilizado para gerar os dados pseudoexperimentais, estimativa inicial e a população inicial utilizado para computar as temperaturas estimadas pelos métodos de otimização

Parâmetro real	Levenberg-Marquardt	PSO
	Estimativa inicial	População inicial
$c_1=1$	$c_1=30$	$0.1 < c_1 < 30$

TAB. 5.7 Caso 3: resultados para a estimativa do parâmetro c_1 pelo método de Levenberg-Marquardt

Ruído	Iterações (k)	c_1		Função objetivo S(k)	Erro máximo= $\max Y-\theta_{estimado} $	Tempo computacional (s)
		Estimado	Erro relativo (%)			
1%	3	0,999970	-0,002992	0,000903	0,004969	0,950256
5%	53	1,001979	0,197948	0,026430	0,025548	2,544438
10%	53	0,995815	-0,418519	0,082243	0,053538	2,652131

TAB. 5.8 Caso 3: resultados para a estimativa do parâmetro c_1 pelo método do PSO

Ruído	Iterações (k)	c_1		Função objetivo S(k)	Erro máximo= $\max Y-\theta_{estimado} $	Tempo computacional (s)
		Estimado	Erro relativo (%)			
1%	9	0,998553	-0,144692	0,000923	0,005488	15,500559
5%	65	1,001979	0,197948	0,026430	0,025548	117,111407
10%	61	0,995815	-0,418519	0,082243	0,053538	113,860811

A partir dos resultados expostos nas TABS. 5.7 e 5.8, percebe-se que em todos os níveis de ruídos introduzidos, o erro relativo entre o parâmetro c_1 estimado e o real é menor que 0,5%, o que mostra que os métodos empregados para estimar o parâmetro desejado no problema térmico da vareta combustível foram executados com excelência.

Observa-se que em ambos os métodos de solução do problema inverso, o procedimento iterativo só é parado pelo critério da discrepância quando o nível de ruído é igual a 1%. Para os níveis de ruído iguais à 5% e 10%, o critério de parada deu-se pelo fato da função objetivo ter se estabilizado durante 50 iterações consecutivas.

Na técnica de Levenberg-Marquardt, TAB. 5.7, com 1% de ruído o método converge logo com 3 iterações, e para 5% e 10% são necessárias 53 iterações. À medida que o nível de ruído cresce, o valor minimizado da função objetivo aumenta, assim como o erro máximo, que é definido como a diferença máxima entre as temperaturas medidas (pseudoexperimentais) e as temperaturas estimadas. Entretanto, observa-se que em todos os casos analisados, o erro relativo do parâmetro estimado é praticamente nulo, o que mostra que o nível de ruído não influenciou na estimativa do parâmetro c_1 .

Ainda na TAB. 5.7, percebe-se que o método de Levenberg-Marquardt possui baixo custo computacional, com rápida convergência, sendo que com 1% de ruído são gastos 0,95 s, e mesmo para 10% de ruído o tempo computacional foi de apenas 2,65 s. Em suma, devido à característica determinística do método de Levenberg-Marquardt, à medida que o nível de ruído aumenta, todas as variáveis analisadas passaram a ter erros crescentes, entretanto esses são bem menores que o níveis de ruídos introduzidos, o que reitera a eficiência do método de Levenberg-Marquardt.

No método do PSO, TAB. 5.8, com 1% de ruído o método converge com 9 iterações, e para 5% e 10% são necessárias respectivamente, 65 e 61 iterações. Novamente, a medida que o nível de ruído cresce, o valor minimizado da função objetivo aumenta, assim como o erro máximo. Todavia, em todos os casos analisados, o erro relativo do parâmetro estimado é praticamente nulo, o que mostra que o nível de ruído também não influenciou na estimativa do parâmetro c_1 no método do PSO.

Em contrapartida, percebe-se na TAB. 5.8 que o método do PSO possui maior custo computacional em relação ao método de Levenberg-Marquardt, o que é

esperado, devido à natureza estocástica daquele, e que foi abordada no capítulo 4. Por exemplo, para 5% de ruído o tempo computacional do PSO foi 46 vezes maior que o do Levenberg-Marquardt. Entretanto, apesar desta alta relação, o tempo computacional para este nível de ruído no PSO ainda foi menor que 2 minutos.

Nota-se na TAB. 5.8, que o número de iterações e o tempo computacional para o nível de ruído com 5% foram relativamente superiores aos apresentados com 10% de ruído. Tal fato é explicado pela característica randômica dos métodos estocásticos, pois mesmo com a tendência do erro aumentar com o nível do ruído, neste caso a população com 10% de ruído conseguiu se aproximar mais rapidamente do seu ponto ótimo global, justificado pelo fato de que o aprimoramento da solução tende à ser mais difícil com o ruído igual à 10%, e então a estabilização da função objetiva é ligeiramente mais rápida, sendo que o critério de parada foi dado pela estabilização da função objetiva durante 50 iterações subsequentes. Por isso, tal comportamento para o número de iterações e o tempo computacional foi observado. Entretanto, nota-se que não foi nada muito discrepante.

Em suma, os métodos utilizados para a solução do problema inverso foram satisfatórios, e para um mesmo nível de ruído, o parâmetro estimado por ambos os métodos teve resultados similares, principalmente para os níveis de ruído iguais à 5% e 10%. A principal diferença deu-se no tempo computacional, e neste aspecto, o método determinístico de Levenberg-Marquardt apresenta grande vantagem em relação ao método estocástico do PSO.

As FIGS. 5.17 e 5.18 mostram a minimização da função objetivo ao longo do procedimento iterativo para estimativa do parâmetro c_1 nos métodos de Levenberg-Marquardt e PSO, respectivamente.

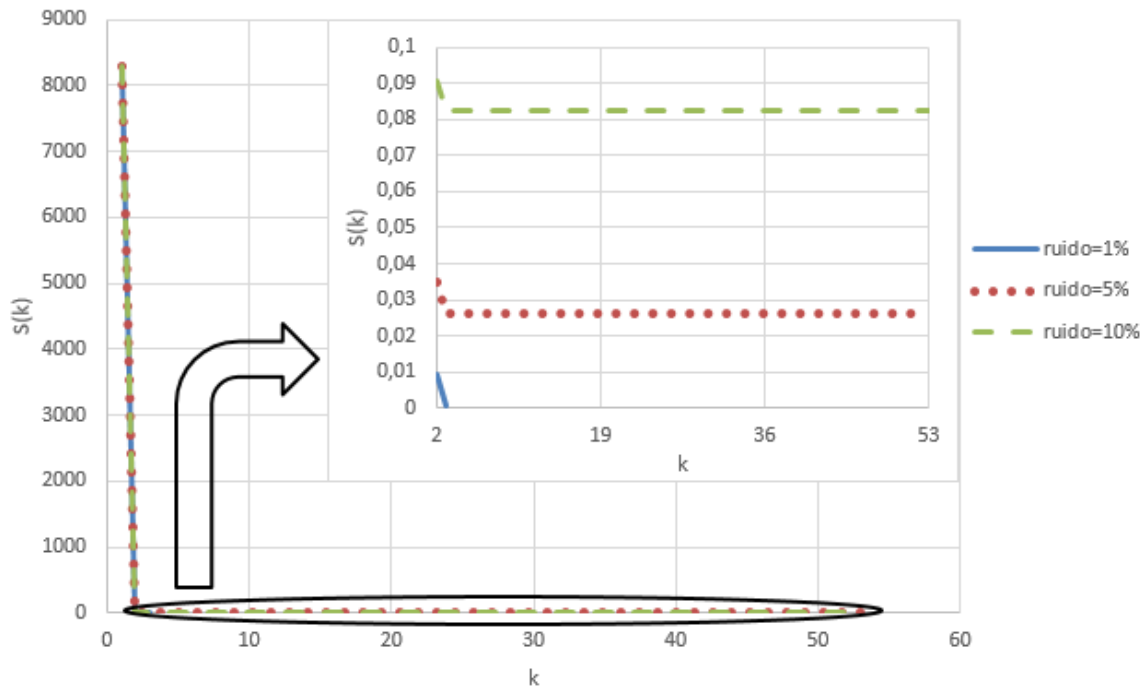


FIG. 5.17 Caso 3: minimização da função objetivo com diferentes níveis de ruído ao longo do processo iterativo pelo método de Levenberg-Marquardt

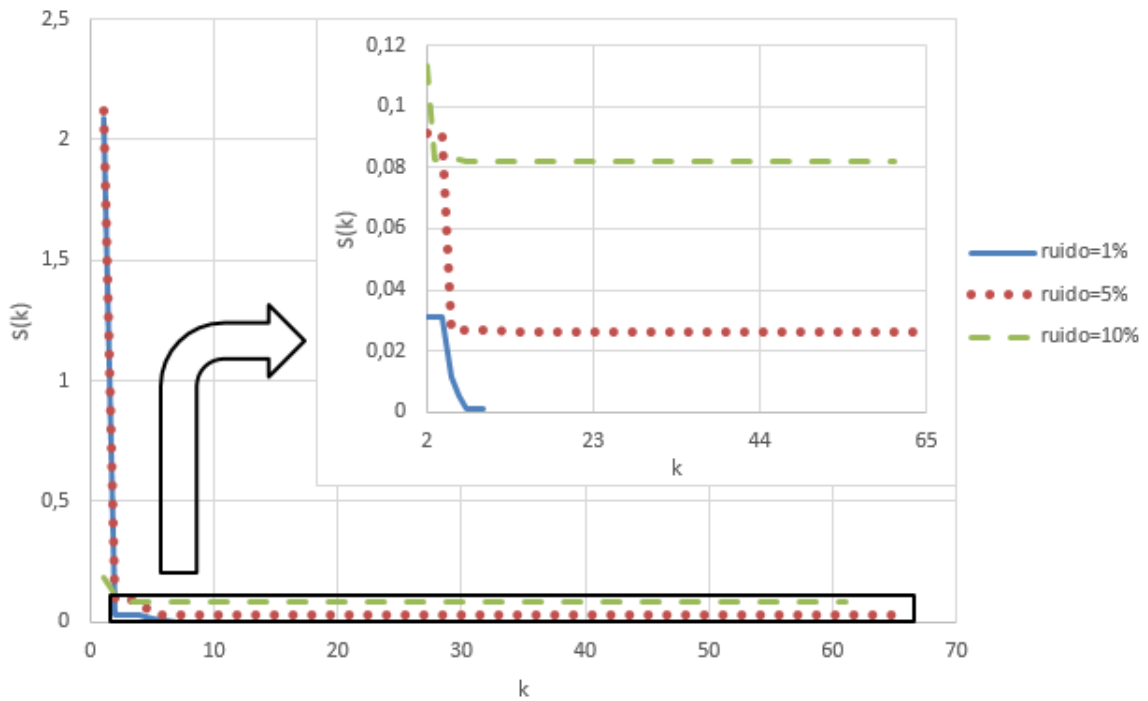


FIG. 5.18 Caso 3: minimização da função objetivo com diferentes níveis de ruído ao longo do processo iterativo pelo método do PSO

A análise das FIGS. 5.17 e 5.18 reitera o que tinha sido explicitado acerca da minimização da função objetiva, onde nota-se que a maior minimização desta ocorre para o menor percentual de ruído. Ademais, fica claro que apenas com 1% de ruído a convergência deu-se pelo critério da discrepância, sendo que nos outros casos a convergência dos resultados se deu pela estabilização da função objetivo por 50 iterações consecutivas.

As FIGS. 5.19, 5.20 e 5.21 mostram respectivamente, o histórico do parâmetro c_1 ao longo do processo iterativo para o método de Levenberg-Marquardt com 1%, 5% e 10% de ruído, sendo possível observar o desenvolvimento do parâmetro desde o valor inicial arbitrado até o valor estimado. Observa-se que mesmo para os casos com 5% e 10% de ruído, logo na segunda iteração o parâmetro à ser estimado já se aproxima do valor real.

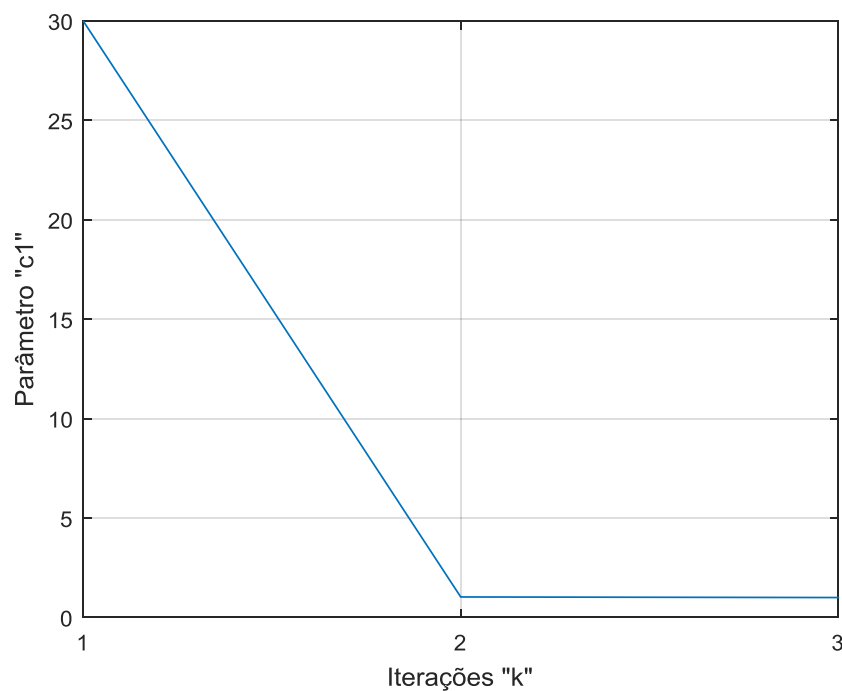


FIG. 5.19 Caso 3: evolução do parâmetro c_1 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 1% de ruído.

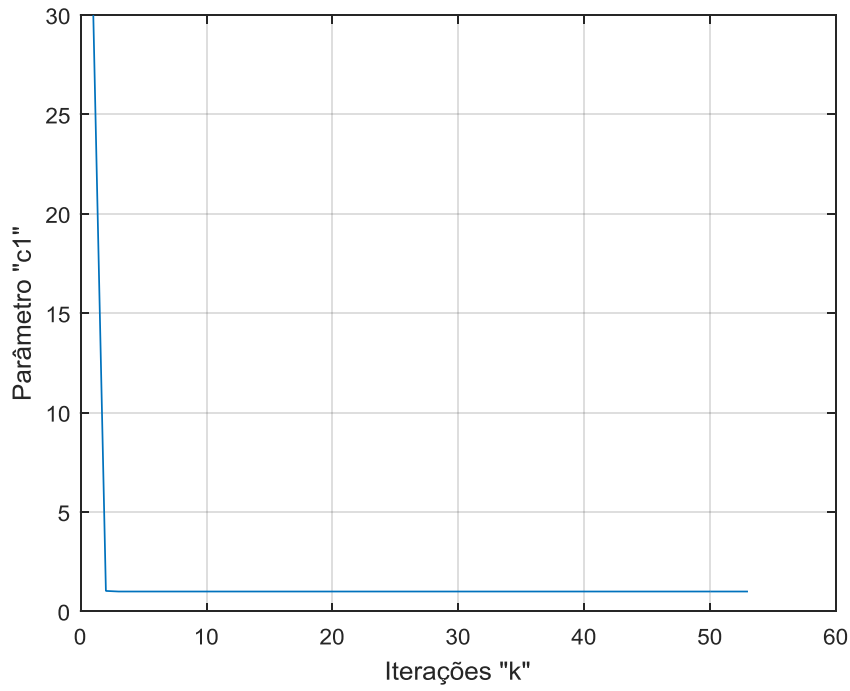


FIG. 5.20 Caso 3: evolução do parâmetro c_1 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 5% de ruído.

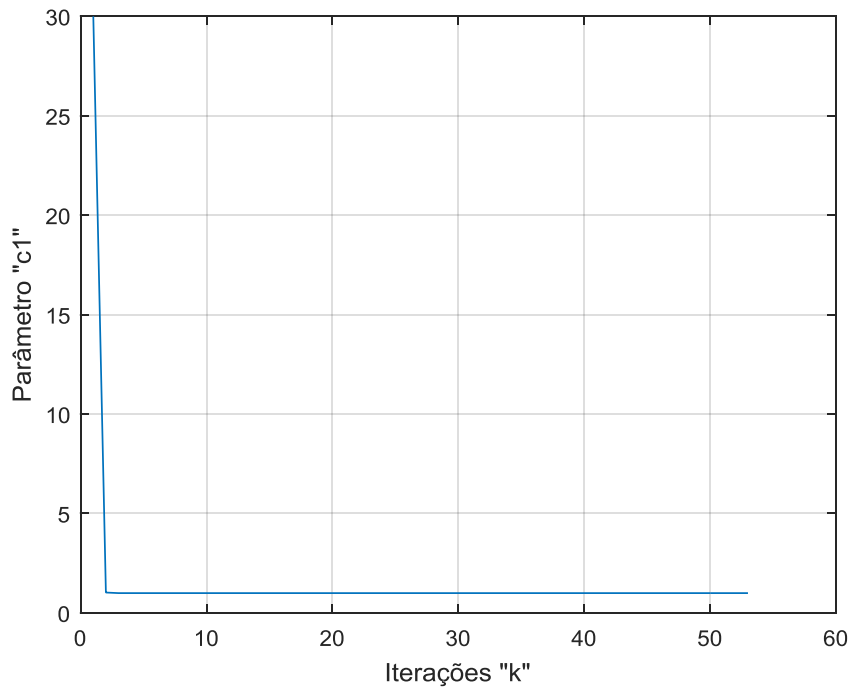


FIG. 5.21 Caso 3: evolução do parâmetro c_1 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 10% de ruído.

Conforme mencionado na seção 4.4.2 acerca do método do PSO, este tem como base a comunicação entre as partículas, onde após cada iteração, cada elemento verifica sua posição atual em relação a melhor posição global de todo o enxame, e então segue por meio de um elemento velocidade na direção desta. Tal comportamento evolucionário pode ser visto nas FIGS. 5.22, 5.23 e 5.24, onde essas foram plotadas para o ruído máximo. Na FIG. 5.22 é mostrada a população inicial randômica, já na FIG. 5.23 é vista a população após a segunda iteração, e na FIG. 5.24 tem-se a população final quando o método converge, onde todos os elementos estão em torno do ótimo global, que é o valor de c_1 estimado.

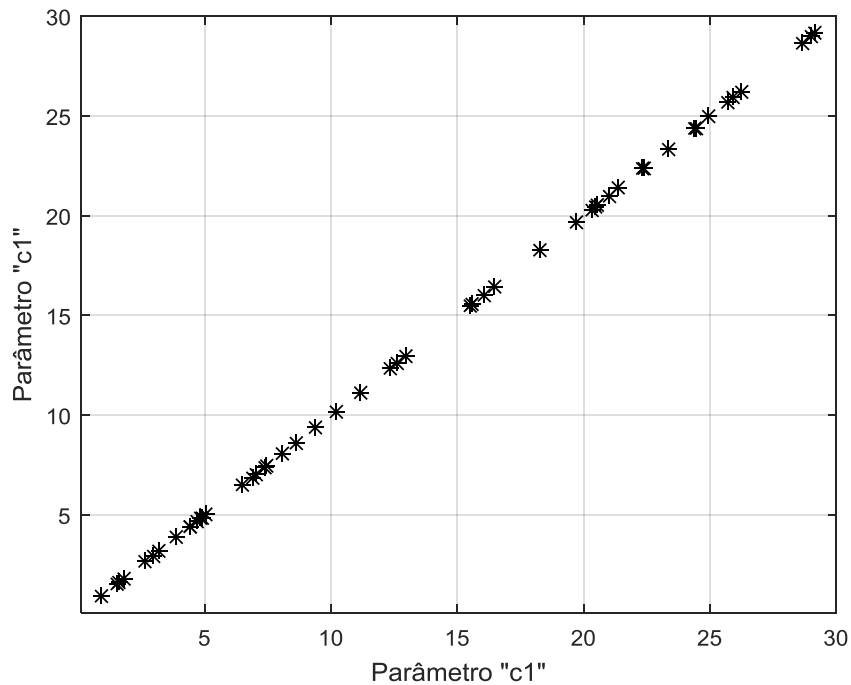


FIG. 5.22 Caso 3: população inicial com 50 indivíduos no método do PSO com 10% de ruído

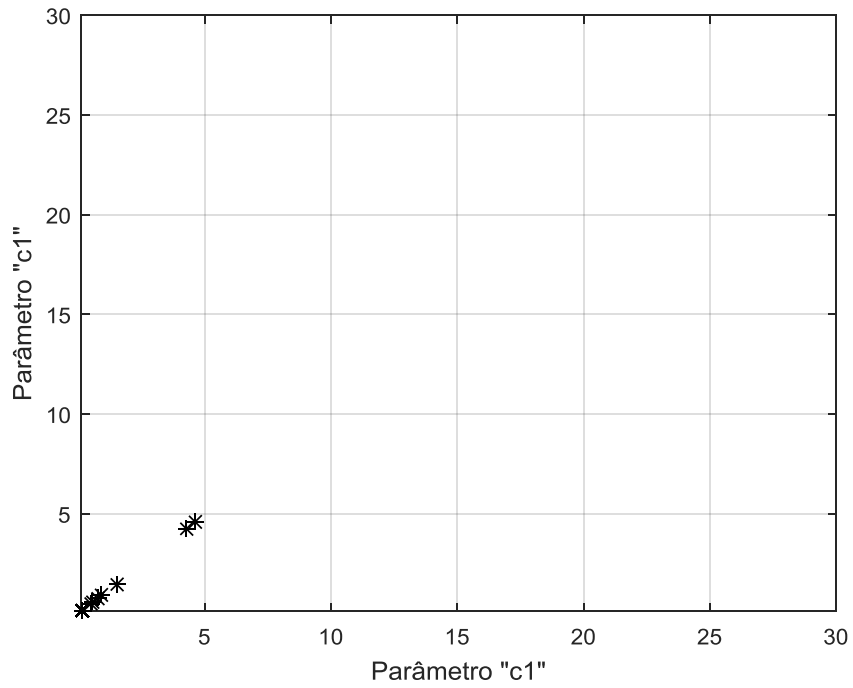


FIG. 5.23 Caso 3: população com 50 indivíduos após a segunda iteração no método do PSO com 10% de ruído

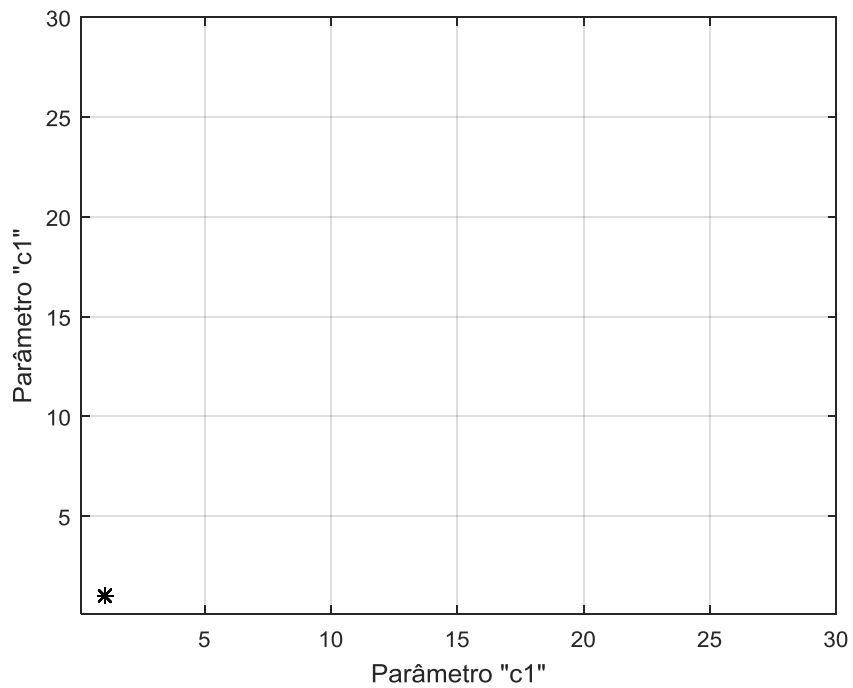


FIG. 5.24 Caso 3: população final com 50 indivíduos no método do PSO com 10% de ruído

Pelas FIGS. 5.19 à 5.21, percebe-se o caráter determinístico do método de Levenberg-Marquardt, em busca da determinação do parâmetro c_1 após a estimativa inicial. Já pelas FIGS. 5.22 à 5.24, observa-se a natureza estocástica do método PSO, onde a cada iteração uma nova população randômica é criada mais próxima da ótima solução.

Após o parâmetro c_1 ser estimado, o termo fonte variável proposto no caso 3, EQ. 5.3, é computado ao longo do transiente, e então obtém-se a curva das temperaturas estimadas pelo problema inverso. As FIGS. 5.25, 5.26 e 5.27 comparam as curvas das temperaturas estimadas, exatas e pseudoexperimentais para o método de Levenberg-Marquardt, com 1%, 5% e 10% de ruído, respectivamente. Já as FIGS. 5.28, 5.29 e 5.30 comparam as curvas das temperaturas estimadas, exatas e pseudoexperimentais para o método do PSO, com 1%, 5% e 10% de ruído, respectivamente.

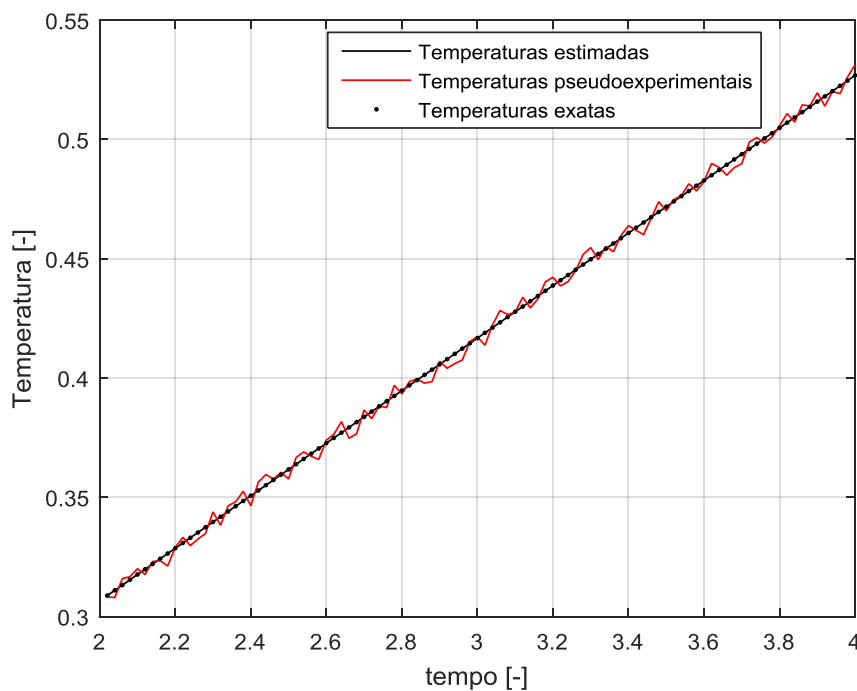


FIG. 5.25 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 1% de ruído

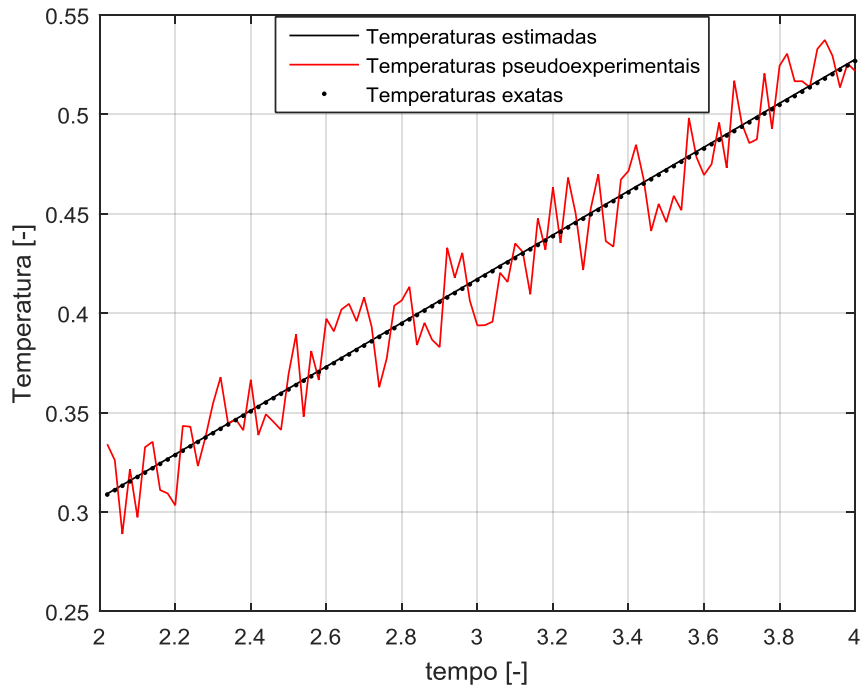


FIG. 5.26 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 5% de ruído

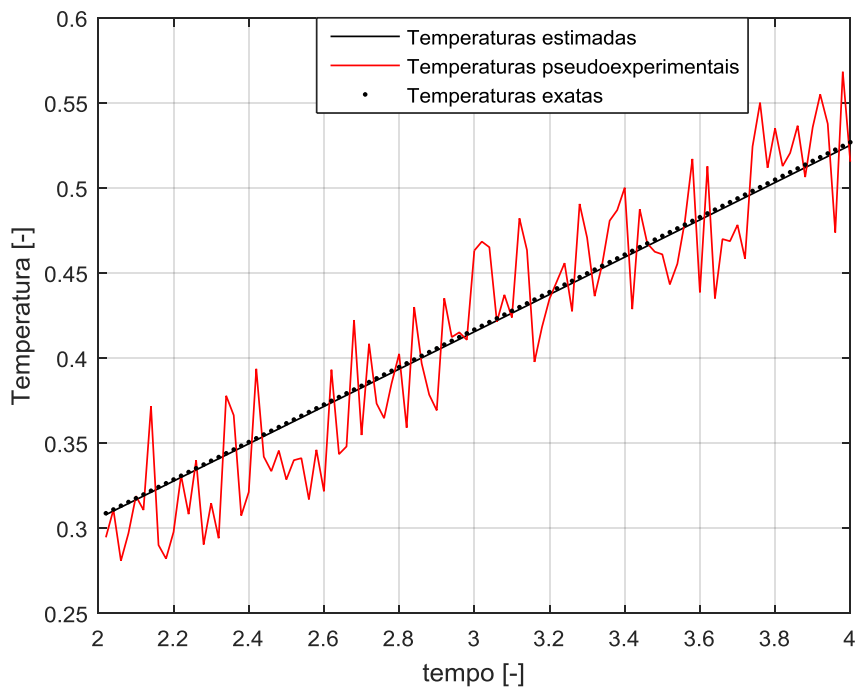


FIG. 5.27 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 10% de ruído

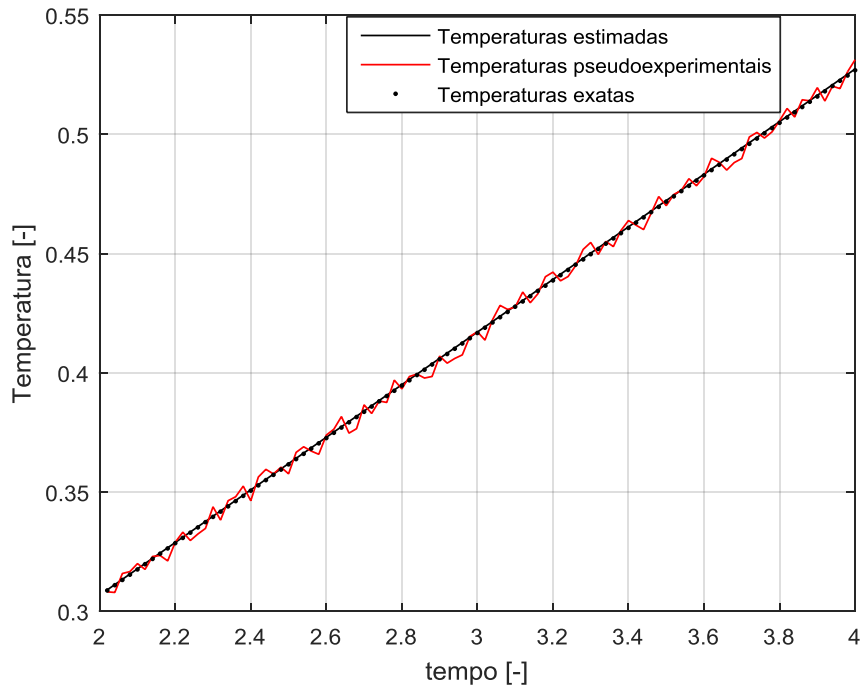


FIG. 5.28 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 1% de ruído

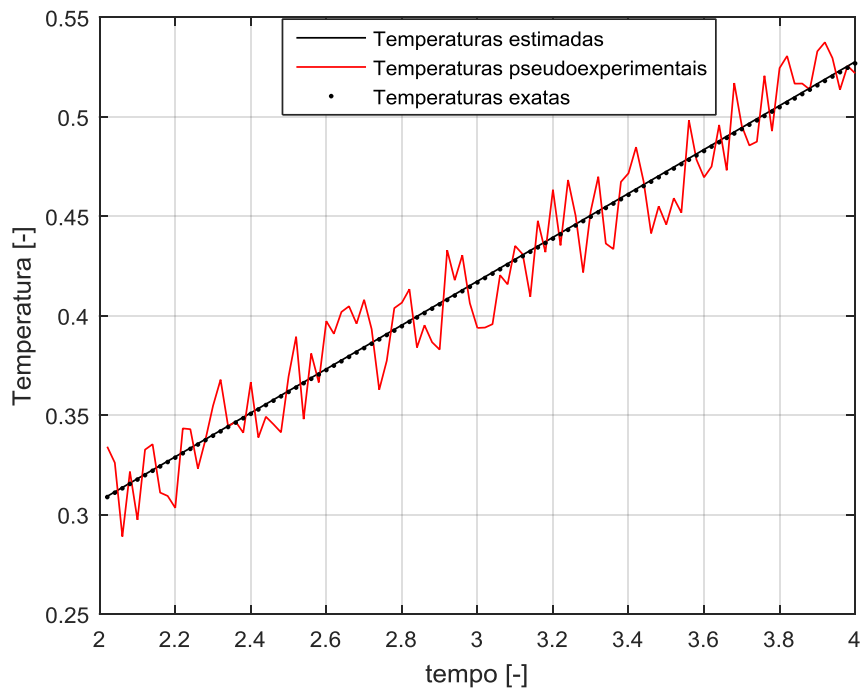


FIG. 5.29 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 5% de ruído

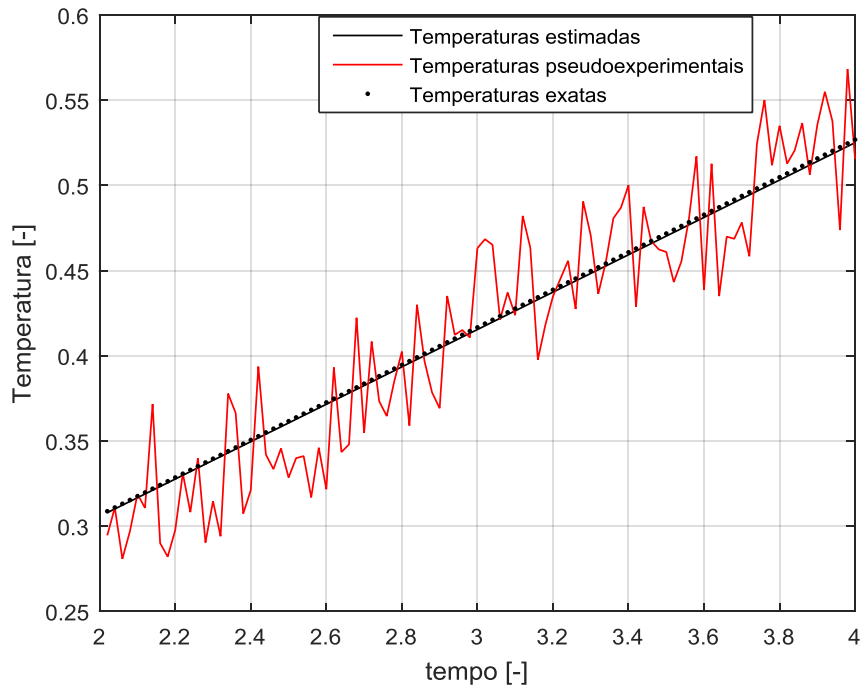


FIG. 5.30 Caso 3: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 10% de ruído

Novamente, os gráficos expostos autenticam a excelência dos métodos de Levenberg-Marquardt e do PSO na solução do problema inverso em escrutínio, pois para todos níveis de ruídos, a solução estimada apresentou exímia concordância com a solução exata, que é obtida com o parâmetro c_1 real, conforme visto nas FIGS. 5.25 à 5.30.

Para a segunda forma funcional de teste, vista no caso 4, EQ. 5.4, tem-se um problema inverso não linear, onde a matriz jacobiana é função dos parâmetros c_2 e c_3 à serem estimados. Portanto, no caso do método determinístico de Levenberg-Marquardt a matriz jacobiana precisa ser atualizada a cada iteração. Evidentemente, para o método estocástico do PSO tal fato é dispensável, já que este não depende do cálculo da matriz jacobiana.

A FIG. 5.31 mostra a análise de sensibilidade para a segunda função de teste. Observa-se nesta, que os coeficientes de sensibilidade dos parâmetros c_2 e c_3 não apresentam dependência linear neste intervalo de tempo, o que favorece a estimativa dos parâmetros (OZISIK & ORLANDE, 2000). Observou-se que para $t > 0,5$, o determinante da matriz $J^T J$ assume valores cada vez mais crescentes, entretanto, a

sensibilidade do parâmetro c_2 em relação a c_3 é pequena, pois enquanto os coeficientes de sensibilidade de c_3 apresentam magnitude cada vez maior, os de c_2 se mantêm praticamente constante ao longo do tempo, o que dificulta a estimativa dos parâmetros. Portanto, o tempo considerado na análise foi $0,005 < t < 0,5$, com $l=100$. Nesta abordagem o determinante de $J^T J$ foi da ordem de 10^{-2} .

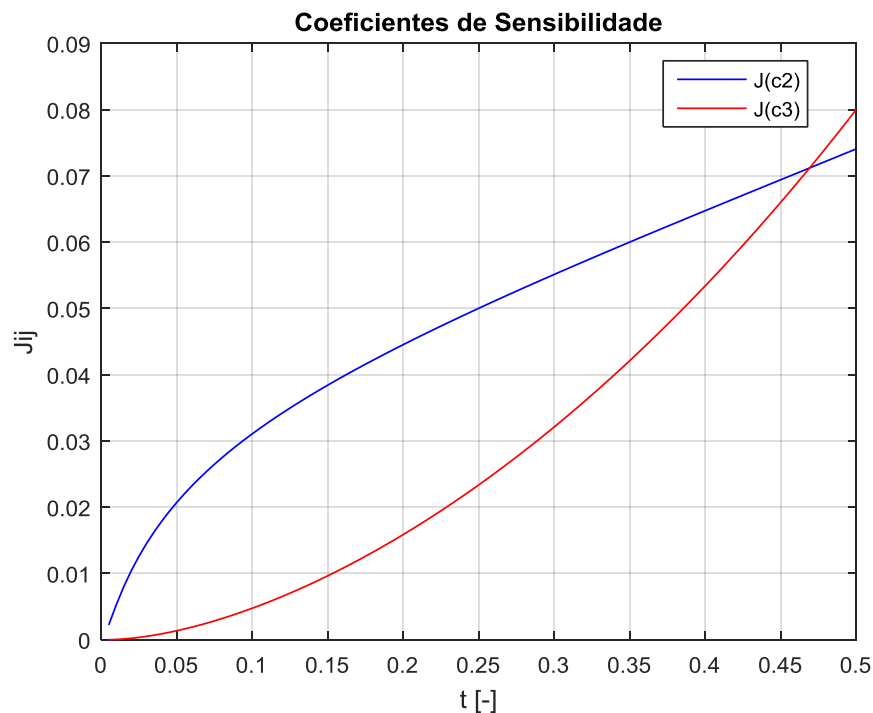


FIG. 5.31 Coeficientes de sensibilidade para a função de teste expressada no caso 4.

Para gerar os pontos pseudoexperimentais foi utilizado o parâmetro $c_2=1$ e $c_3=1$. Para as temperaturas estimadas no método determinístico de Levenberg-Marquardt, utilizou-se uma estimativa inicial com $c_2=15$ e $c_3=15$, ou seja, quinze vezes maior que os parâmetros reais. E na técnica estocástica do PSO, usou-se uma população com 50 indivíduos, com limites inferiores iguais à 0,1 e limites superiores iguais à 15, para cada parâmetro à ser estimado. Utilizou-se $\alpha_1=0,5$ e $\beta_1=1$ (COLAÇO et al., 2006). Os critérios de parada são vistos nas EQS. 4.19 e 4.20, onde a tolerância para o critério da discrepância foi igual à 0,0002.

Os resultados para a estimativa dos parâmetros c_2 e c_3 pelo método de Levenberg-Marquardt e do PSO são mostrados nas TABS. 5.10 e 5.11, respectivamente.

TAB. 5.9 Caso 4: parâmetros reais utilizados para gerar os dados pseudoexperimentais, estimativas iniciais e populações iniciais utilizados para computar as temperaturas estimadas pelos métodos de otimização

Parâmetro real	Levenberg-Marquardt	PSO
	Estimativa inicial	População inicial
$c_2=1 ; c_3=1$	$c_2=15 ; c_3=15$	$0.1 < c_2 < 15 ; 0.1 < c_3 < 15$

TAB. 5.10 Caso 4: resultados para a estimativa dos parâmetros c_2 e c_3 pelo método de Levenberg-Marquardt

ruído	iterações (k)	c2		c3		Função objetivo S(k)	erro máximo= $\max Y-\theta_{estimado} $	Tempo computacional (s)
		Estimado	Erro relativo (%)	Estimado	Erro relativo (%)			
1%	10	1,000644	0,064436	0,996816	-0,318414	0,000172	0,002334	1,496984
5%	60	0,997712	-0,228843	1,016997	1,699676	0,004339	0,011260	5,107380
10%	60	1,034993	3,499345	1,018589	1,858881	0,016137	0,021612	5,032034

TAB. 5.11 Caso 4: resultados para a estimativa dos parâmetros c_2 e c_3 pelo método do PSO

ruído	iterações (k)	c2		c3		Função objetivo S(k)	erro máximo= $\max Y-\theta_{estimado} $	Tempo computacional (s)
		Estimado	Erro relativo (%)	Estimado	Erro relativo (%)			
1%	17	0,993510	-0,649042	1,006917	0,691672	0,000174	0,002397	31,553970
5%	67	0,997712	-0,228845	1,016997	1,699678	0,004339	0,011260	138,819846
10%	67	1,034993	3,499346	1,018589	1,858880	0,016137	0,021612	125,190769

A partir dos resultados expostos nas TABS. 5.10 e 5.11, nota-se que para todos os níveis de ruídos, o erro relativo dos parâmetros c_2 e c_3 estimados são bem menores que o nível de ruído introduzido, o que mostra que os métodos empregados para estimar os parâmetros desejados no problema térmico da vareta combustível obtiveram resultados satisfatórios.

Tanto no método de Levenberg-Marquardt quanto no PSO, a convergência dos resultados só é obtida pelo critério da discrepância quando o nível de ruído é igual a 1%. Para os níveis de ruído iguais à 5% e 10%, o critério de parada é pela estabilização da função objetivo durante 50 iterações consecutivas.

Na técnica de Levenberg-Marquardt, TAB. 5.10, com 1% de ruído o método converge com 10 iterações, e para 5% e 10% são necessárias 60 iterações. À medida que o nível de ruído aumenta, o valor minimizado da função objetivo aumenta, assim como o erro máximo. Entretanto, observa-se que em todos os casos analisados, o erro relativo dos parâmetros estimados é pequeno, e mesmo com 10% de ruído, o erro relativo observado foi de 3,5% para o parâmetro c_2 e 1,86% para o parâmetro c_3 , ambos bem menores que o nível de ruído introduzido.

Pela TAB. 5.10, percebe-se ainda que o método de Levenberg-Marquardt possui baixo tempo computacional, com rápida convergência, sendo que com 1% de ruído são gastos apenas 1,5 s, e mesmo para 10% de ruído o tempo computacional foi de apenas 5,03 s. Com 5 e 10% de ruído o tempo computacional é praticamente idêntico, até mesmo porque o número de iterações são iguais e o método é determinístico.

No método do PSO, TAB. 5.11, com 1% de ruído o método converge com 17 iterações, e para 5% e 10% são necessárias 67 iterações. Novamente, a medida que o nível de ruído cresce, o valor minimizado da função objetivo aumenta, assim como o erro máximo. Entretanto, em todos os casos analisados, o erro relativo do parâmetro estimado é baixo, assim como observado no método de Levenberg-Marquardt. Nota-se que para 5 e 10% de ruído, os parâmetros estimados por ambos os métodos geraram erros relativos idênticos.

A grande diferença entre os métodos usados para a solução do problema inverso é com relação ao tempo computacional, percebe-se que o método do PSO possui maior custo computacional em relação ao método de Levenberg-Marquardt, o que é esperado devido à natureza estocástica do PSO. Por exemplo, para 10% de ruído o tempo computacional do PSO foi 25 vezes maior que o do Levenberg-Marquardt. Ainda assim, apesar desta alta relação, o tempo computacional para este nível de ruído no PSO foi de pouco mais que 2 minutos.

Observa-se na TAB. 5.11, que o erro relativo do parâmetro c_2 com 5% foi menor que o mesmo com 1% de ruído, e o tempo computacional para o nível de ruído com 5% foi menor que o apresentado com 10% de ruído. Isso mostra a natureza randômica do método PSO, pois a tendência do erro é aumentar com o nível do ruído, conforme já foi abordado no caso anterior.

Os métodos utilizados para a solução do problema inverso no caso 4 obtiveram resultados satisfatórios, e para um mesmo nível de ruído, os parâmetros estimados

por ambos os métodos teve resultados similares, principalmente para os níveis de ruído iguais à 5% e 10%. A principal diferença deu-se no tempo computacional, e neste aspecto, o método determinístico de Levenberg-Marquardt possui grande vantagem em relação ao método estocástico do PSO.

As FIGS. 5.32 e 5.33 mostram a minimização da função objetivo ao longo do procedimento iterativo para a estimativa dos parâmetros c_2 e c_3 nos métodos de Levenberg-Marquardt e PSO, respectivamente.

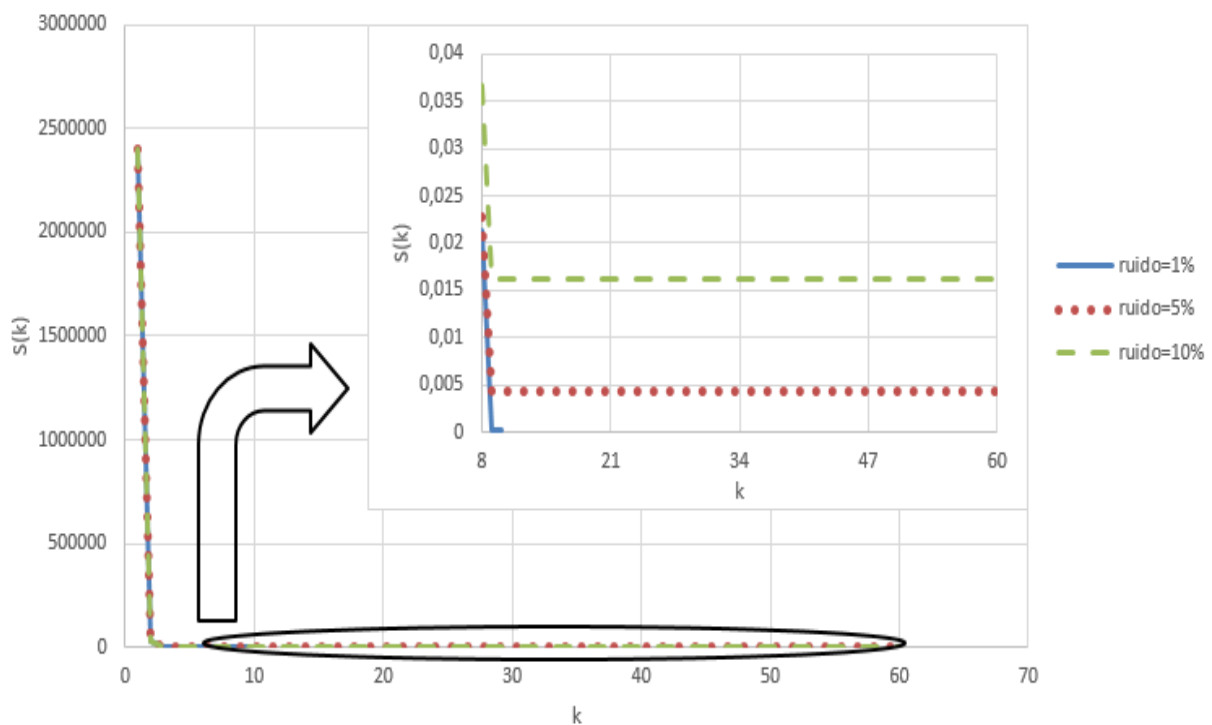


FIG. 5.32 Caso 4: minimização da função objetivo com diferentes níveis de ruído ao longo do processo iterativo de Levenberg-Marquardt

A partir da análise das FIGS. 5.32 e 5.33 fica claro o comportamento da minimização da função objetivo com relação ao nível de ruído, onde o menor resíduo é encontrado para o menor percentual de ruído, o que acarreta em um melhor refinamento da solução do problema inverso. Fica evidente que em ambos os métodos de solução, apenas com 1% de ruído o critério de parada foi pela discrepância, sendo que nos outros níveis de ruídos a convergência deu-se pela estabilização da função objetivo dentro da tolerância estipulada por 50 iterações consecutivas.

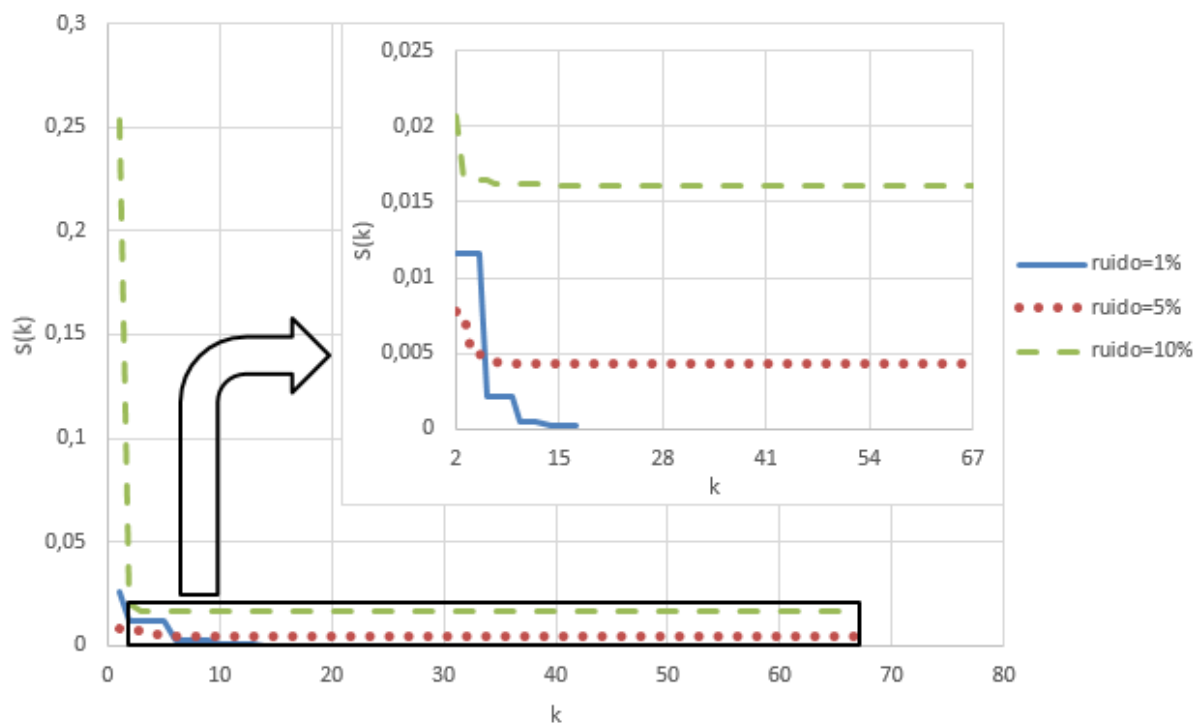


FIG. 5.33 Caso 4: minimização da função objetivo com diferentes níveis de ruído ao longo do processo iterativo pelo método do PSO

As FIGS. 5.34, 5.35 e 5.36 expõem respectivamente, o histórico dos parâmetros c_2 e c_3 ao longo do procedimento iterativo para o método de Levenberg-Marquardt com 1%, 5% e 10% de ruído, desde o valor inicial arbitrado até o valor estimado.

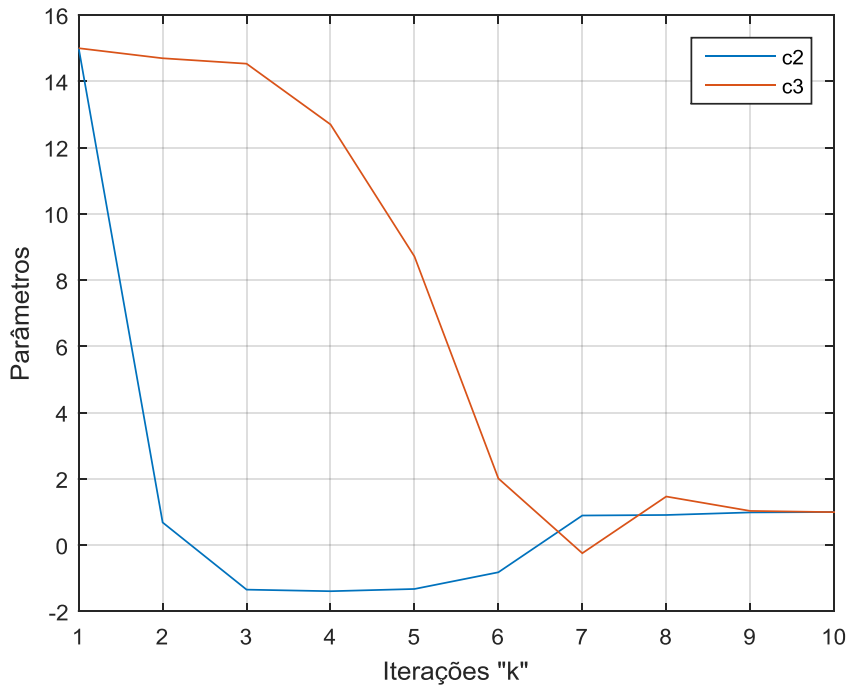


FIG. 5.34 Caso 4: evolução do parâmetro c_2 e c_3 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 1% de ruído

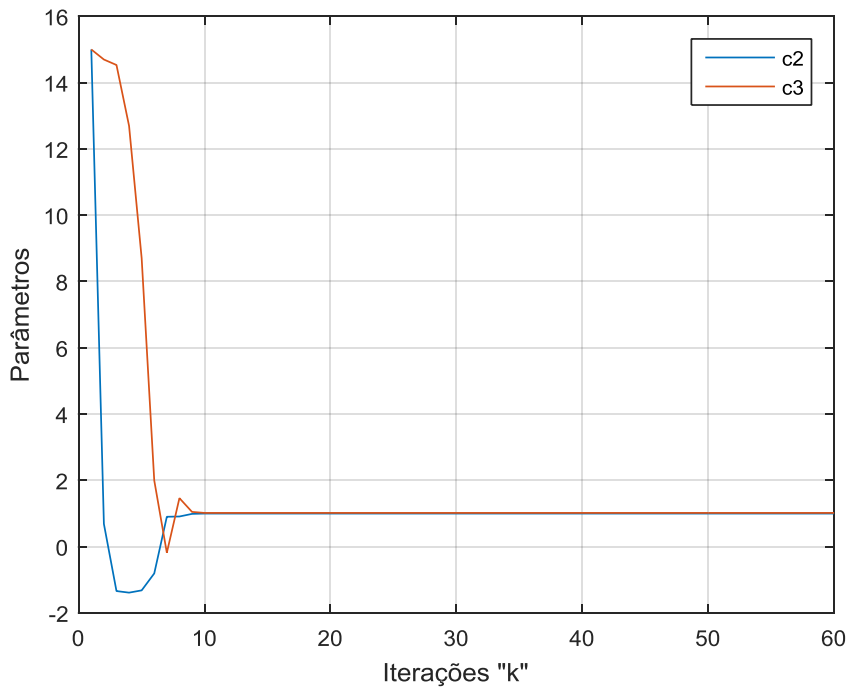


FIG. 5.35 Caso 4: evolução do parâmetro c_2 e c_3 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 5% de ruído

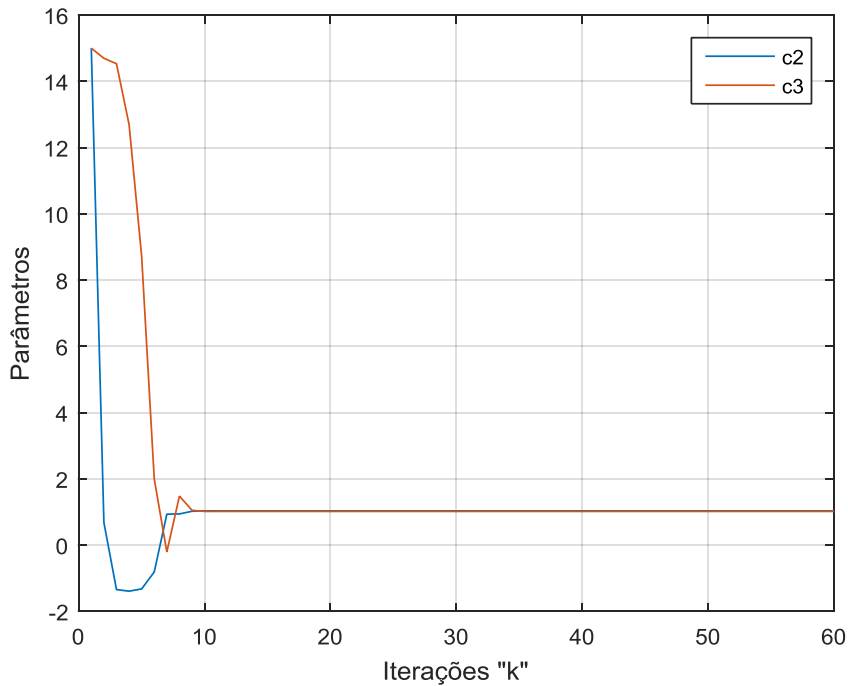


FIG. 5.36 Caso 4: evolução do parâmetro c_2 e c_3 ao longo das iterações no método de Levenberg-Marquardt com 10% de ruído

As FIGS. 5.37, 5.38 e 5.39 mostram o comportamento evolucionário do método do PSO para estimativa dos parâmetros c_2 e c_3 , onde essas foram plotadas para o maior nível de ruído analisado. Na FIG. 5.37 é vista a população inicial randômica para cada parâmetro, já na FIG. 5.38 é mostrada a população após a terceira iteração, e na FIG. 5.39 é apresentada a população final quando o método converge, onde os elementos estão em torno do ótimo global de cada parâmetro estimado.

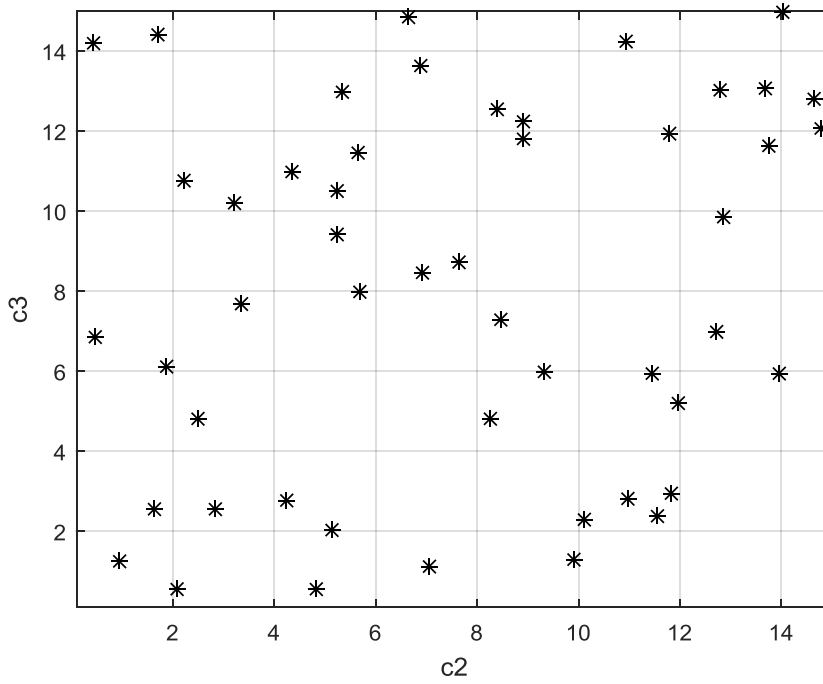


FIG. 5.37 Caso 4: população inicial com 50 indivíduos no método do PSO com 10% de ruído

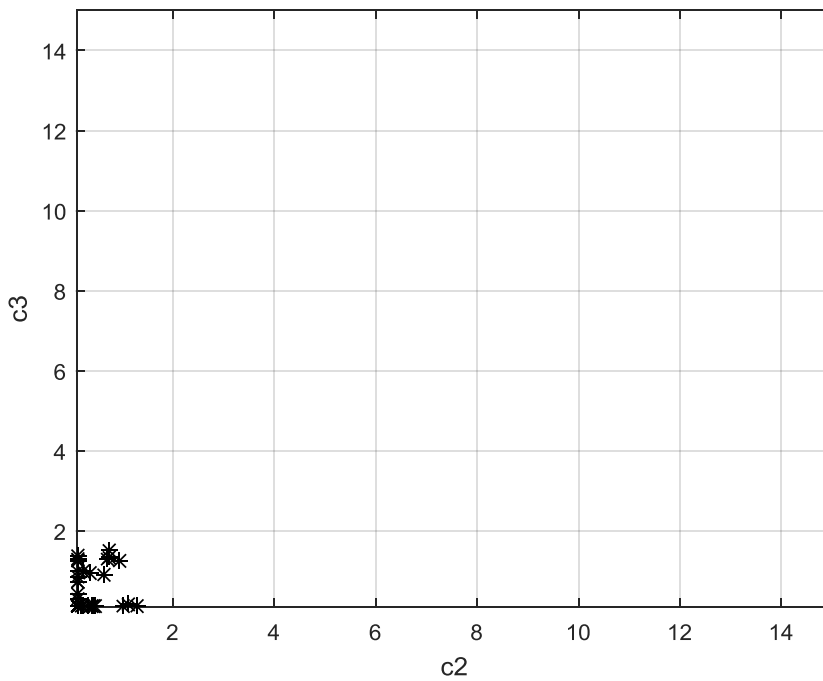


FIG. 5.38 Caso 4: população com 50 indivíduos após a terceira iteração no método do PSO com 10% de ruído

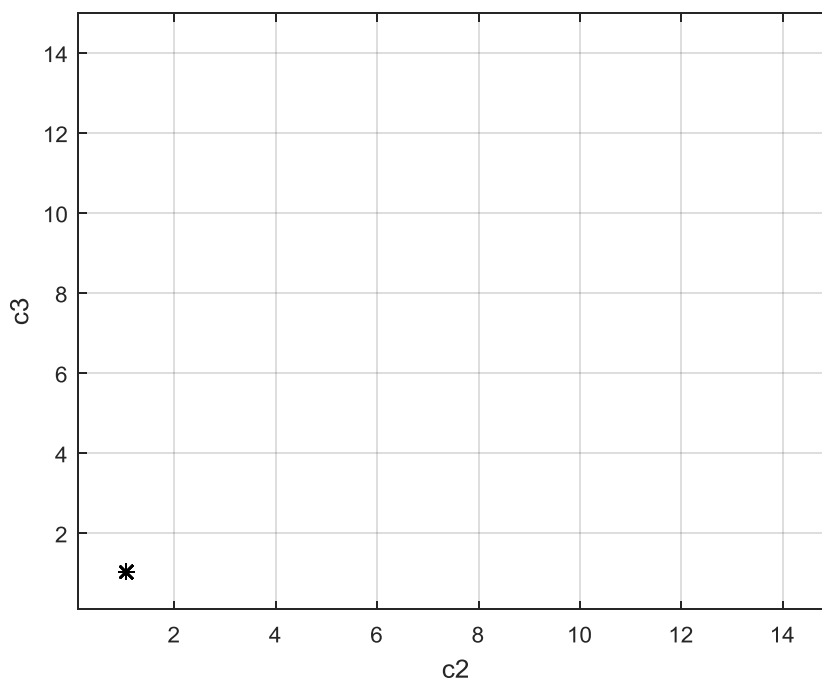


FIG. 5.39 Caso 4: população final com 50 indivíduos no método do PSO com 10% de ruído

Pelas FIGS. 5.34 à 5.36, novamente percebe-se o caráter determinístico do método de Levenberg-Marquardt, em busca da determinação dos parâmetro c_2 e c_3 após a estimativa inicial. Já pelas FIGS. 5.37 à 5.39, observa-se a característica estocástica do método PSO, onde a cada iteração uma nova população randômica é criada mais próxima da ótimo solução de cada parâmetro.

Após os parâmetro c_2 e c_3 serem estimados, o termo fonte variável proposto no caso 4 é computado ao longo do transiente, e então obtém-se a curva das temperaturas estimadas pelo problema inverso. As FIGS. 5.40, 5.41 e 5.42 comparam as curvas das temperaturas estimadas, exatas e pseudoexperimentais para o método de Levenberg-Marquardt, com 1%, 5% e 10% de ruído, respectivamente. Já as FIGS. 5.43, 5.44 e 5.45 comparam as curvas das temperaturas estimadas, exatas e pseudoexperimentais para o método do PSO, com 1%, 5% e 10% de ruído, respectivamente.

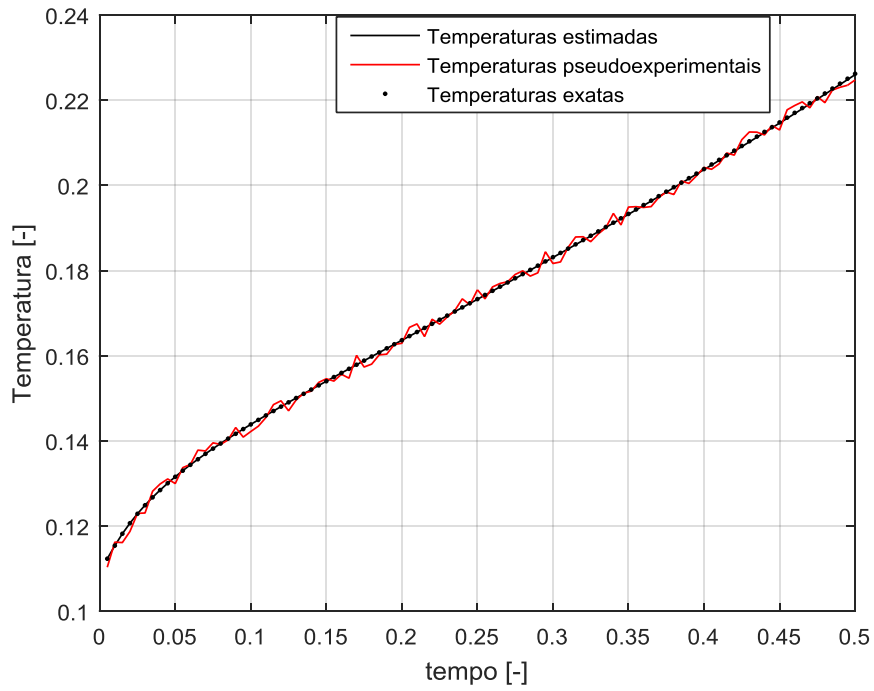


FIG. 5.40 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 1% de ruído

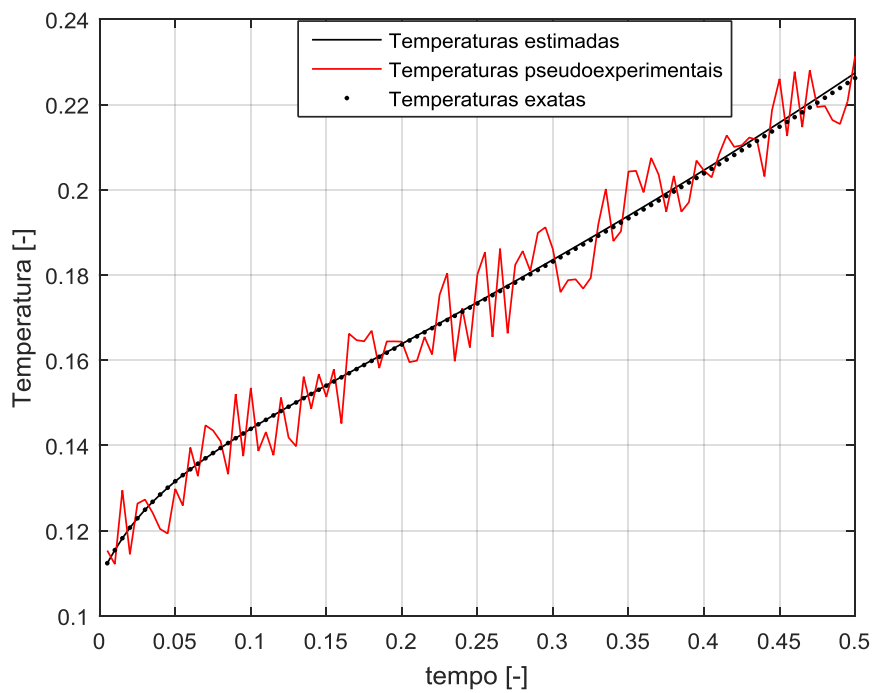


FIG. 5.41 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 5% de ruído

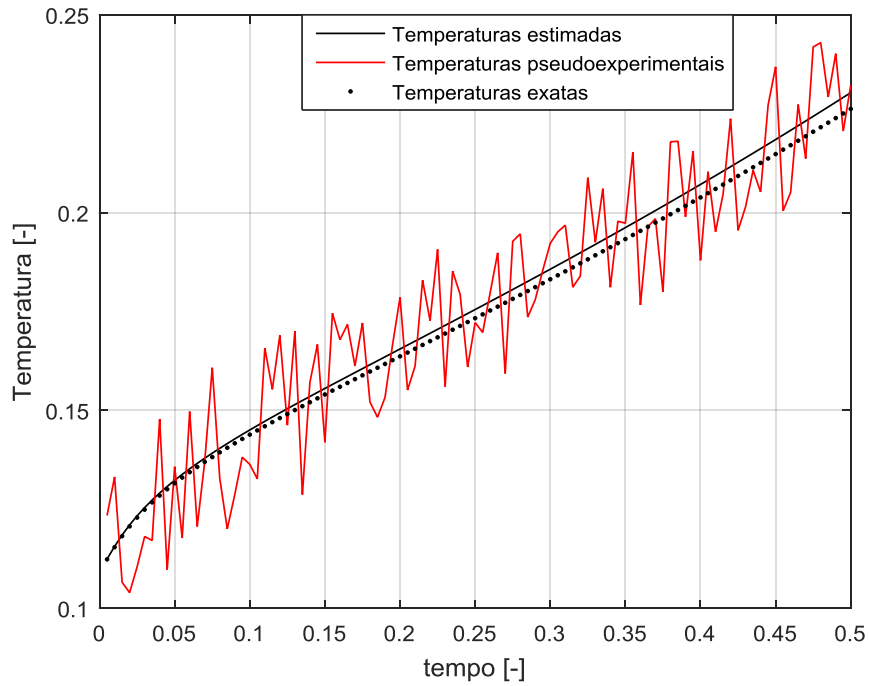


FIG. 5.42 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método de Levenberg-Marquardt com 10% de ruído

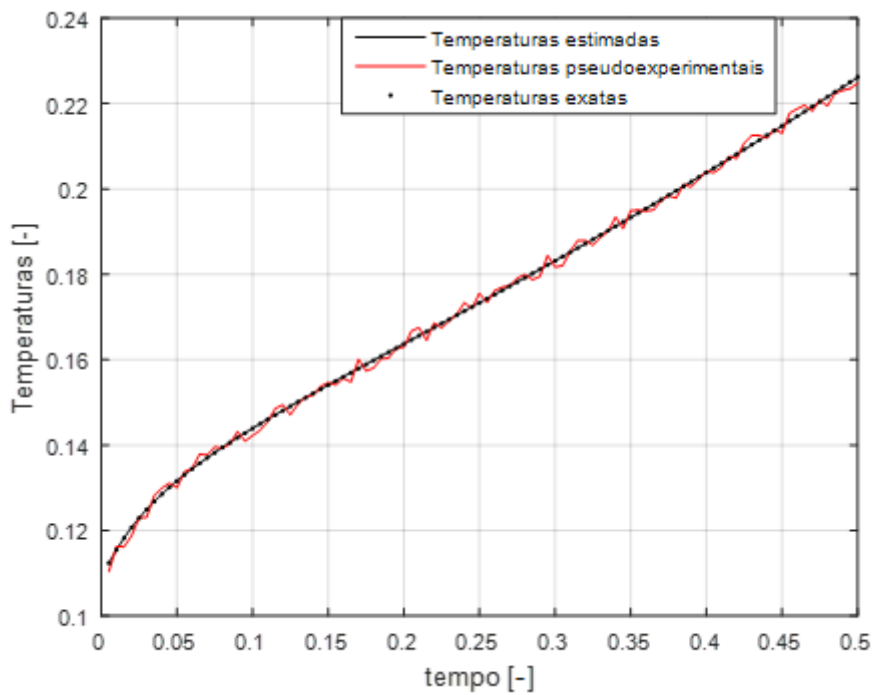


FIG. 5.43 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 1% de ruído

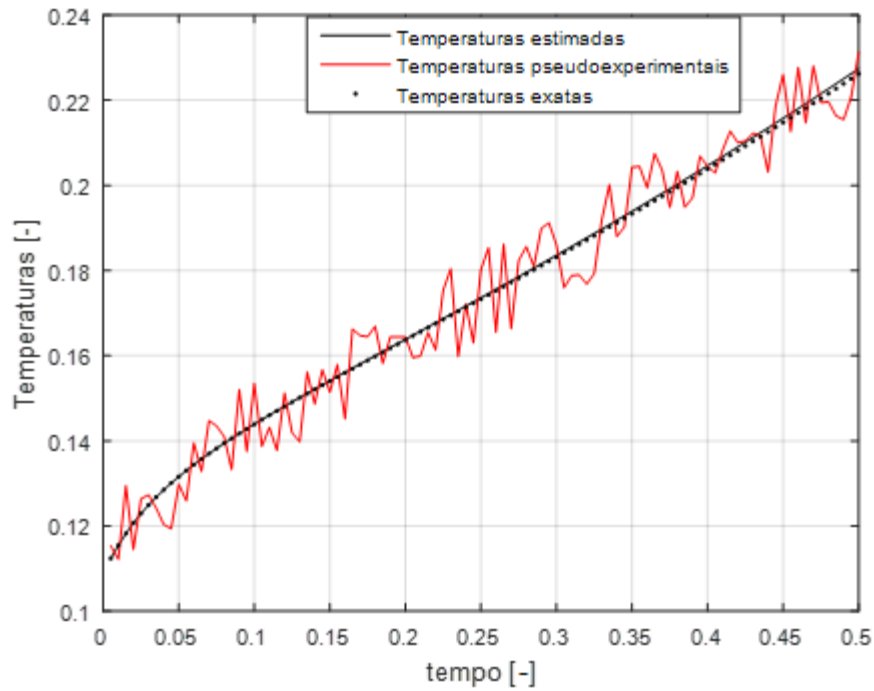


FIG. 5.44 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 5% de ruído

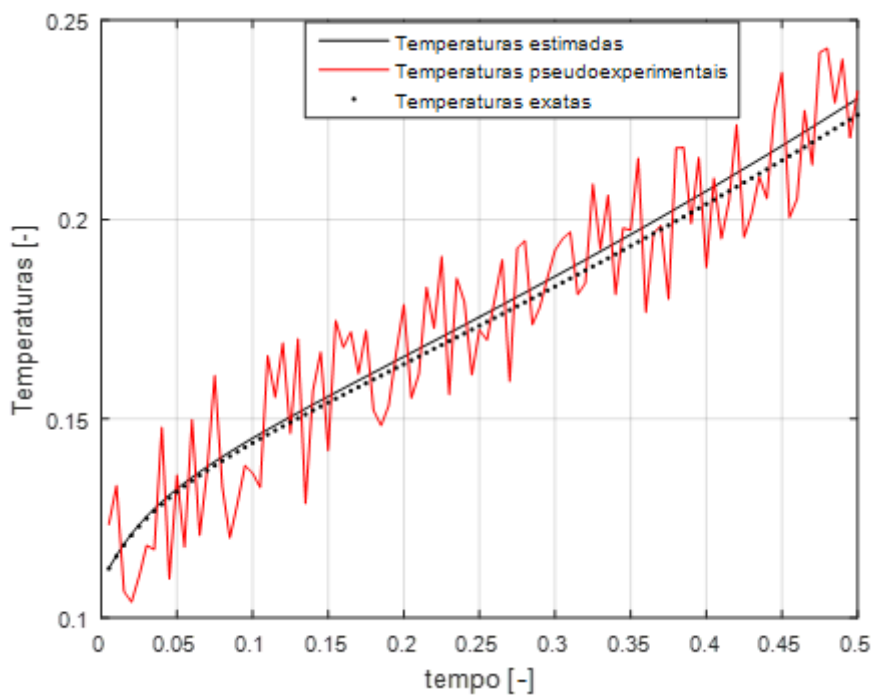


FIG. 5.45 Caso 4: comparação entre as temperaturas estimadas, pseudoexperimentais e exatas no método do PSO com 10% de ruído

Observa-se que para ambos os métodos com 1% e 5% de ruído, a solução estimada é praticamente idêntica à solução exata. Com 10% de ruído observa-se que a solução estimada apresenta pequeno desvio em relação à solução exata, tal fato acontece pois em ambos os métodos, o erro relativo dos parâmetros c_2 e c_3 foram respectivamente, 3,5% e 1,6%. Entretanto, o desvio entre a solução exata e estimada é bem menor que o percentual de ruído introduzido, o que reitera o êxito dos métodos de Levenberg-Marquardt e do PSO na solução do problema inverso na vareta combustível.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 CONCLUSÕES

A dissertação consistiu-se na análise térmica do processo de geração de energia em varetas combustíveis nucleares cilíndricas. Foi visto que em caso de um acidente nuclear, o comportamento térmico da pastilha combustível é essencialmente determinado pela solução da equação da condução de calor.

O problema transiente abordado neste trabalho é ocasionado por uma falha no sistema de barras de controle do reator nuclear, que acarreta em um fluxo descontrolado de nêutrons, e então, o termo fonte de calor volumétrico passa a ser variável. Apesar das soluções terem sido construídas a partir desta abordagem, as modelagens desenvolvidas neste trabalho são úteis para outros problemas de interesse, como por exemplo o transiente após o desligamento do reator, ou no caso de uma simulação de um acidente por falta de refrigeração, onde o coeficiente de transferência de calor entre o revestimento e o fluido refrigerante passa a ser menor. Em suma, se o termo fonte é conhecido, as modelagens desenvolvidas podem ser aplicadas.

Outro ponto a se destacar, é que os resultados foram apresentados a partir dos parâmetros típicos de um reator nuclear PWR, entretanto as modelagens desenvolvidas podem ser utilizadas para qualquer outro tipo de reator nuclear, em que as varetas combustíveis possuem o mesmo padrão apresentado neste trabalho.

A dissertação também apresentou um problema de transferência de calor inverso para a vareta combustível, com o intuito de estimar o termo fonte variável. O problema inverso apresentado mostrou ter grande aplicação para a análise térmica no reator nuclear, pois se um sensor estiver disponível para medir as temperaturas na superfície da vareta combustível, o termo fonte variável pode ser estimado pela análise inversa, e então, a distribuição de temperatura transiente no cilindro pode ser obtida pelo problema direto, e a partir desta, vários parâmetros de interesse podem ser analisados, como por exemplo o tempo crítico, que é o período gasto para o material de revestimento se fundir.

Tal fato é extremamente importante, pois o material de revestimento é a primeira barreira para impedir a liberação de materiais radioativos no meio ambiente. Logo, se o termo fonte é estimado com acurácia, o tempo crítico pode ser estimado em caso de um acidente nuclear, o que auxilia no sistema operacional e de segurança da central nuclear. Ademais, uma acurada distribuição de temperatura na vareta combustível é importante, pois ela é essencial para toda a física envolvida no processo de geração de energia nos reatores nucleares, sendo fundamental para a alta performance do processo.

A primeira modelagem apresentada nesta dissertação consistiu-se em uma solução analítica, em que a espessura do material de revestimento e do “gap” não foram levadas em consideração na análise térmica. A solução geral para o perfil de temperatura ao longo do combustível foi coincidente com a obtida por BHATTACHARYA et al. (2001), o que mostrou a grande concordância entre a técnica da Transformada Integral, utilizada nesta dissertação, e o método das Funções de Green, usado pelos autores supracitados. Tal fato é esperado, já que ambos os métodos de solução são baseados em uma expansão de autofunções.

A solução desenvolvida na primeira modelagem mostrou ser útil, pois independentemente da forma como o termo fonte variável é tratado, com respeito ao tempo e ao espaço, o perfil de temperatura pode ser obtido. Além disso, a solução mostrou grandes aspectos de convergência, já que para os casos analisados, uma expansão das autofunções com 40 termos foram suficientes para obter resultados totalmente convergidos em uma aproximação de seis dígitos de precisão. Em geral, a taxa de convergência mostrou ser muito rápida, e acredita-se que a ferramenta desenvolvida pode ser uma boa alternativa para abordagens mais envolvidas, tais como métodos puramente numéricos, que são baseados em aproximação de elementos finitos ou diferenças finitas.

Ainda dentro da primeira modelagem, foram propostos dois termos fontes de calor variáveis, expressados pelos casos 3 e 4, a fim de reproduzir a física do problema térmico em escrutínio no reator nuclear, principalmente para baixos valores de tempo.

A segunda modelagem tratou-se de uma solução analítico-numérica, em que o material de revestimento passou a ser levado em conta na análise térmica. Este foi modelado através da análise por parâmetros concentrados. O modelo foi solucionado

analiticamente pelo método da Transformada Integral, e o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante foi avaliado numericamente.

O principal intuito da segunda modelagem foi inferir acerca da região do material de revestimento no problema térmico investigado, através da comparação com a primeira modelagem. Neste aspecto, viu-se que a região do material de revestimento não apresenta maiores influências térmicas na transferência de calor por condução na vareta combustível, já que os resultados comparados apresentaram exímia concordância.

Ademais, foi visto no trabalho de AN et al. (2014), que o modelo utilizando o conceito por parâmetros concentrados não apresentava resultados precisos para elevados coeficiente de transferência de calor entre o revestimento e o fluido refrigerante, e então, a solução precisava ser desenvolvida para aumentar a sua aplicabilidade. Da forma como se aplicou o conceito dos parâmetros concentrados nesta dissertação, apenas para a região do material de revestimento, e não em todo o conjunto da vareta, é possível utilizar a solução para altos coeficientes de transferência de calor por convecção entre o revestimento e o combustível, sendo essa uma importante contribuição, conforme explicitado na seção 5.2. Por exemplo, os resultados apresentados foram para um típico $Bi=15$, que reproduz um coeficiente de transferência de calor de aproximadamente $9000 \text{ W/m}^2\text{K}$.

A terceira modelagem foi a mais completa para o conjunto da vareta combustível, sendo incluído a região do gap. A solução desenvolvida foi bem similar à segunda modelagem. O principal objetivo da terceira modelagem foi inferir com relação a região do “gap” na transferência de calor por condução na vareta combustível, através da comparação de seus resultados com os da modelagens anteriores, em que o gap não foi levado em consideração.

Dentro deste contexto, foi visto que a região do gap influencia no perfil de temperatura radial do combustível, e sobrestima o mesmo em relação aos apresentados pela primeira e segunda modelagem. Tal fato é devido à resistência térmica imposta pelo gap na transferência de calor na vareta combustível.

Entretanto, a região do gap não possui relevância significativa no perfil de temperatura superficial do cilindro, ou seja, na região do material de revestimento. Logo, se o principal interesse for o cálculo do tempo crítico, o gap não possui maiores influências.

Os resultados para a terceira modelagem mostraram que essa possui baixo custo computacional, com uma rápida taxa de convergência para o transiente de interesse. A terceira solução além de contemplar todas as regiões da vareta combustível, é extremamente útil pois independente da variação proposta para o termo de geração de calor, o perfil de temperatura pode ser avaliado ao longo do cilindro.

Ainda dentro da terceira modelagem, foram comparados os resultados obtidos com termo fonte constante com a solução de AN et al. (2014), onde esses consideram a mudança de fase na vareta combustível. Foi visto que no geral, os resultados apresentaram boa concordância, e então, como uma primeira observação, é que apesar da grande importância dos problemas com mudança de fase, aparentemente este fator não influencia significativamente no problema térmico na vareta combustível.

Dentro da análise térmica na vareta combustível, foi visto que o número de Biot pode desempenhar um importante papel a fim de aumentar o tempo crítico, o que pode ser um aspecto interessante a fim de evitar ou amenizar os efeitos de um acidente nuclear.

A análise inversa teve o objetivo de estimar o termo fonte de calor variável no material combustível, para as funções testes expressadas no caso 3 e 4, e mostrar a sua aplicabilidade a fim de se obter uma acurada distribuição de temperatura na vareta. Especificamente, bastava-se estimar os parâmetros c_1 , c_2 e c_3 , e então o termo de geração podia ser avaliado ao longo do transiente em qualquer posição do combustível.

O problema direto foi dado pela terceira modelagem, já que essa é a mais completa para o conjunto da vareta combustível, e os métodos de solução utilizados para o problema inverso foram o de Levenberg-Marquardt e o PSO, onde os seus algoritmos computacionais foram implementados no software MATLAB.

Devido a indisponibilidade de temperaturas reais na superfície do cilindro, foram geradas dados pseudoexperimentais com ruídos, a fim de verificar a eficiência dos métodos de solução do problema inverso na vareta combustível. Em ambos os casos analisados, os métodos de Levenberg-Marquardt e do PSO apresentaram resultados satisfatórios, principalmente para 1% e 5% de ruído. Mesmo com 10% de ruído, os parâmetros estimados não provocaram grande desvio entre a solução exata e a estimada, sendo esse bem menor que o nível de ruído introduzido. No geral, a solução

inversa mostrou ser extremamente útil para a análise térmica na vareta combustível, e os métodos utilizados apresentaram resultados satisfatórios em ambos os casos investigados.

Dentro dos resultados apresentados pelos métodos de solução do problema inverso, foi possível perceber claramente o caráter determinístico da técnica de Levenberg-Marquardt, e da natureza estocástica do método do PSO, ao longo do processo iterativo para estimação dos parâmetros. Em relação aos erros relativos e aos valores minimizados da função objetivo, ambos os métodos de solução tiveram resultados similares. A principal diferença observada foi com relação ao tempo computacional, onde neste aspecto, o método de Levenberg-Marquardt levou grande vantagem em relação ao PSO, conforme esperado.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi assumido que a temperatura do fluido refrigerante se mantém constante ao longo do transiente. Como sugestão para trabalhos futuros, pode ser interessante utilizar um coeficiente de transferência de calor entre o revestimento e o refrigerante, variável com o tempo, a fim de simular exatamente a variação da temperatura do fluido refrigerante ao longo do tempo, e posteriormente, comparar com os resultados obtidos neste trabalho, com o intuito de verificar se ocorre alguma mudança significativa na solução.

Outro possível ponto a ser explorado seria verificar a influência da geometria da vareta combustível na análise térmica do reator nuclear. Neste trabalho foi analisada a forma cilíndrica, entretanto, podem ser investigadas outras geometrias, e posteriormente, comparar os resultados.

Com relação ao problema de transferência de calor inverso na vareta combustível, foi visto que para a realização de sua solução, foram gerados dados pseudoexperimentais. Logo, para dar continuidade a análise inversa apresentada neste trabalho, seria interessante a realização de experimentos para medir as temperaturas reais na parede da vareta combustível.

Ademais, neste trabalho foi feita a solução inversa por estimativa de parâmetros, já que existia o conhecimento da forma funcional do termo fonte, e então, o problema inverso se reduziu a estimação de coeficientes presentes na função teste conhecida previamente. Portanto, uma outra sugestão para trabalhos futuros seria realizar uma solução inversa por estimativa de função, como por exemplo, através do método do gradiente conjugado com problema adjunto para estimativa de função (OZISIK & ORLANDE, 2000).

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEKSEEV, A.K. The Heat Flux Measurement Method Based on Isotherm Registration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.40, pp.1643—1646. 1997.
- ALIFANOV, O. M. Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, New York, 1994.
- AN, C.; MOREIRA, F. C.; SU, J. Thermal analysis of the melting process in a nuclear fuel rod. *Applied Thermal Engineering* 68 (2014) 133-143. 2014.
- ANNAFI, T. A.; GYEABOUR I, A. A.; AKAHO, E. H. K; ANNOR-NYARKO, M.; QUAYE, C. R. Finite difference analysis of the transient temperature profile within GHARR-1 fuel element. *Annals of Nuclear Energy* 68 (2014) 204-208. 2014.
- BHATTACHARYA, S.; NANDI, S.; DASGUPTA, S; SIRSHENDU, D. “Analytical Solution of Transient Heat Transfer with Variable Source for Applications in Nuclear Reactors”. *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, N. 7, pp. 1005-1013, 2001.
- BIHAIN, A.L.J.; CÂMARA L.D.T.; SILVA NETO A.J. Avaliação da Rotina Inversa R2W na Estimacão de Parâmetros de transferência de Massa no Processo de Adsorção de Glicose e Frutose. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 13, No. 3 (2012) 277-289. 2012.
- BLAIR, J. M.; SELANDER, W. N. “Temperature Transients in a Cylinder due to a Time Varying Heat Transfer Coefficient”. Atomic Energy of Canada Limited, 1972.
- BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 9ª EDIÇÃO. RIO DE JANEIRO: LTC, 2012.

- CALDEIRA, A. B.; COSTA NETO, R. T.; CARVALHO, M. S. Estimation of tracked vehicle suspension parameters. *Acta Scientiarum. Technology (Online)*, v. 39, p. 51-57, 2017.
- CALDEIRA, A. B. ; JACCOUD, B. R. ; GUEDES, R. O. C. Inverse problem for porosity estimation during solidification of TNT. *Acta Scientiarum. Technology (Online)*, v. 38, p. 469-475, 2016.
- CÂMARA, L. D. T.; SILVA NETO, A. J. Inverse Stochastic Characterization of Adsorption Systems by a Random Restricted Window (R2W) Method. *International Conference on Engineering Optimization*, Rio de Janeiro, Brazil, 2008.
- ÇENGEL, Y. A. *Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática*, 3ª Edição. São Paulo, SP: McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda., 2009.
- CHÁVEZ, C. E.; ALONZO-ATIENZA, F.; ÁLVAREZ D. Avoiding the inverse crime in the inverse problem of electrocardiography: estimating the shape and location of cardiac ischemia. *Computing in Cardiology*, v. 40, n. 40, p. 687-690. 2013.
- CHEN, W.L.; ISHII, M.; GROLMES, M.A. Simple heat conduction model with phase change for reactor fuel pin, *Nucl. Eng. Des.* 60 (1976) 452e460. 1976.
- CHEN, W.L.; ISHII, M.; GROLMES, M.A. The application of the simple fuel pin transient and melting model to thermal-hydraulics in LMFBR subassembly. *Nuclear Engineering and Design* 53 (1979) 321-338. 1979.
- COELHO, P. Reator de fissão nuclear. Disponível em: <<http://www.engquimicasantosp.com.br/2012/07/reator-de-fissao-nuclear.html>>. Acesso em: 03 de Abril de 2017. 2012.
- COLAÇO, M. J. Problema inverso de estimativa do coeficiente de transferência de calor em uma placa resfriada por sprays. [Rio de janeiro], 1998, ix, 107 p. 29,7 cm (COPPE / UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1998). 1998.

- COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R. B.; DULIKRAVICH, G. S. Inverse and Optimization Problems in Heat Transfer. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng*, 28, 2006.
- COTTA, C. P. N. Problemas Inversos de condução de calor em meios heterogêneos: Análise teórico-experimental via transformação integral, inferência Bayesiana e termografia por infravermelho. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro/ COPPE. Rio de Janeiro. p. 248-257. 2009.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. Integral transform method. *Appl. Math. Modelling*, 1993, Vol. 17, March. 1993.
- COTTA, R. M.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; KNUPP, D. C. Nonlinear eigenvalue problem in the integral transforms solution of convection-diffusion with nonlinear boundary conditions. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 26 Issue: 3/4, pp. 767-789. 2016.
- DUDERSTADT, J. J E HAMILTON, L. J. *Nuclear Reactor Analysis*. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1976.
- DULIKRAVICH, G. S. E MARTIN, T. J. Inverse Shape and Boundary Condition Problems and Optimization in Heat Conduction. Chapter 10 in *Advances in Numerical Heat Transfer*, 1, 381-426, Minkowycz, W. J. and Sparrow. E. M. (eds.), Taylor and Francis. 1996.
- EBERHART, R.; KENNEDY, J. A new Optimizer Using Particle Swarm Theory. Sixth International Symposium on Micro machine and Human Science. 0-7803-2676-8/95. IEEE. 1995.
- ECHEVARRÍA, L. C.; SANTIAGO, O. L.; FAJARDO, J. A. H.; SILVA NETO, A. J.; SÁNCHEZ, D. J. A variant of the particle swarm optimization for the improvement of fault diagnosis in industrial systems via faults estimation. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 28 (2014) 35-51. 2014.

- ELETRONUCLEAR (BRASIL). Eletrobras (Org.). Implantação da unidade de armazenamento complementar de combustíveis irradiados. Disponível em: <<http://www.eletronuclear.gov.br/LinkClick.aspx?fileticket=Vv9XO5nsTVc%3d&tabid=347>>. Acesso em: 04 de Abril de 2017. 2013.
- ENGLE, H.W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. Regularization of Inverse Problems. In: Mathematics and Its Applications, Vol. 375, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. 1996.
- ESKANDARI, M.R; BAVANDI, A.; MIHANDOOST, A. Studies on Nuclear Fuel Rod Thermal Performance. Energy Procedia 14 (2012) 142-147. 2012.
- GUEDES, R. O. C.; OZISIK, M. N. Conjugated turbulent heat transfer with axial conduction in wall and convection boundary conditions in a parallel-plate channel. International Journal of Heat and Fluid Flow, v. 13, n.4, p. 322-328. 1992.
- GHIAASIAAN, S. M.; WASSEL, A. T.; FARR JR., J. L. Heat conduction in nuclear fuel rods. Nuclear Engineering and Design 85 (1985) 89-96. North-Holland, Amsterdam. 1985.
- GILAT, A. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas [recurso eletrônico]: uma introdução com aplicações usando o MATLAB / Amos Gilat, Vish Subramaniam; tradução Alberto Resende de Conti. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Bookman, 2008.
- HAMILTON, F.C. ; COLAÇO, M. J. ; CARVALHO, R.N.; LEIROZ, A. J. K. Heat transfer coefficient estimation of an internal combustion engine using particle filters. Inverse Problems in Science & Engineering (Print), v. 22, p. 483-506. 2014.
- HAN, G. Y. A mathematical model for the thermal-hydraulic analysis of nuclear power plants. International Communications Heat Mass Transfer, Vol. 27, No. 6, pp. 795-805. 2000.

- HUANG, J.; THAN, V.; NGO, T.; WANG, C. An inverse method for estimating heat sources in a high speed spindle. *Applied Thermal Engineering* 105 (2016) 65-76. 2016.
- IAEA. Computational analysis of the behaviour of nuclear fuel under steady state, transient and accident conditions december. International Atomic Energy Agency, Vienna. (2007)
- INCROPERA, F. P; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L., LAVINE, A. S. *Fundamentos de Transferência de calor e de Massa*. 6ª edição, Rio de Janeiro: Editora LTC, 2008.
- JURKOWSKI, T., JARNY, Y. E DELAUNAY, D. Estimation of Thermal Conductivity of Thermoplastics under Moulding Condition: an Apparatus and an Inverse Algorithm, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.40, pp.4169--4181. 1997.
- KAPIO, J.; SOMERSALO, E. Statistical inverse problems: discretization, model reduction and inverse crimes. *Science Direct Journal of Computational and Applied Mathematics*. v. 198. p. 493-504. 2007.
- KNUPP, D. C., COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., KAKAÇ, S. Transient conjugated heat transfer in microchannels: Integral transforms with single domain formulation. *International Journal of Thermal Sciences*, 88: 248-257, 2015.
- KURPISZ, K.; NOWAK, A. J. *Inverse Thermal Problems*. WIT Press, Southampton, UK. 1995.
- LEIROZ, A. J. K.; COTTA, R. M. On the solution of nonlinear elliptic convection-diffusion problems through the integral transform method. *Numerical Heat Transfer. Part B, Fundamentals*, v.23, p. 401-411, 1993.
- MACHADO, H. A.; ORLANDE, H. R. B. Inverse problem for estimating the heat flux to a non-newtonian fluid in a parallel plate channel. *Journal of the Mechanical Society of Mechanical Sciences*, 20 (1), 51-61. 1998.

- MIKHAILOV, M. D.; OZISIK, M. N. Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion. New York, John Wiley, 1984.
- MONTEIRO, N. A. Percepção pública da energia nuclear e estratégias para uma melhor comunicação / Nilton de Araújo Monteiro. – Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, 2013. XV, 108 p.: il.; 29,7cm, 2013.
- MOREIRA, F. C. Análise de Condução de Calor com Mudança de Fase em uma Vareta Combustível Nuclear / Felipe Celestino Moreira. – Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, 2013. XV, 106 p.: il.; 29,7cm, 2013.
- OLIVEIRA, A. A. Reator rápido regenerador independente de urânio enriquecido / Aline Alves Oliveira; orientado por Sergio de Oliveira Vellozo. – Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 92 p.: il, 2014.
- ORLANDE, H. R. B.; COLAÇO, M. J.; MALTA, A. A. Estimation of the Heat Transfer Coefficient in the Spray Cooling of the Continuously Cast Slabs. National Heat Transfer Conference, ASME HTD-Vol. 340, vl.2. Baltimore, pp. 109-116. 1997.
- OZISIK, M.N. Heat Conduction. M. Necati Ozisik. – 2nd ed., Wiley, New York, 716p. 1993.
- OZISIK, M.N., ORLANDE, H.R.B. Inverse Heat Transfer: fundamentals and applications, Taylor & Francis, London, 2000.
- PODDAR, A.; CHATTERJEE, R; CHAKRAVARTY, A.; GHOSH, K; MUKHOPADHYAY, A.; SEN, S. Thermodynamic analysis of a solid nuclear fuel element surrounded by flow of coolant through a concentric annular channel. Progress in Nuclear Energy 85 (2015) 178-191.
- PONTEDEIRO, A. C.; COTTA, R. M.; SU, J. Improved lumped model for thermal analysis of high burn-up nuclear fuel rods. Progress in Nuclear Energy 50 (2008) 767-773. 2008.

- PRESGRAVE, A. V.; GUEDES, R. O. C.; SCOFANO NETO, F. Integral transform solution to the endometrial ablation problem. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (Impresso)*, v. 31, p. 117-124, 2009.
- REGIS, C. R.; COTTA, R. M.; SU, J. Improved lumped analysis of transient heat conduction in a nuclear fuel rod. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, No. 3, pp. 357-366, 2000.
- RIBEIRO, M. A. C.; CÂMARA, L. D. T.; SILVA NETO, A. J. Validação do método estocástico R2W na obtenção de ótimos globais de funções não-lineares. *REUCP, Petrópolis, Volume 9, nº1 (2015), P. 42-53. ISSN 2318-0692. 2015.*
- SANTIAGO, D. M. N. Modelo termohidráulico para realimentação do cálculo de seções de choque neutrônicas em reatores PWR / Daniela Maiolino Norberto Santiago – Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, XI, 55 p.:il.; 29,7 cm, 2011.
- SCOFANO NETO, F.; GUEDES, R. O. C. Integral Transform Solution for Diffusion Equations Coupled Through Boundary Conditions. *Proceedings of the I International Conference on Mathematics and Computers in Mechanical Engineering*, 1999.
- SILVA, S.M.M.L.; GUIMARÃES, G.; DUARTE, M.A.V. Estimador de uma Função Objetivo de Correlação na Medição Simultânea de Propriedade Térmicas, *Anais XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ABCM. 1997*
- SILVA NETO, A. J.; MOURA NETO, F.D. *Problemas Inversos - Conceitos Fundamentais e Aplicações*, ed. Rio de Janeiro: Ed. UERJ - Editora da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, v. 1, 82p. 2005.
- SILVA NETO, A.J.; OZISIK, M. N. Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem Of Estimating The Time-Varying Strength Of A Line Heat Source. *JOURNAL OF*

APPLIED PHYSICS, UNITED STATES OF AMERICA, v. 71, n.11, p. 5357-5362. 1992.

SILVA NETO, A. J.; OZISIK, M. N. Inverse Problem Of Simultaneously Estimating The Timewise-Varying Strengths Of Two Plane Heat Sources. JOURNAL OF APPLIED PHYSICS, UNITED STATES OF AMERICA, v. 73, n.5, p. 2132-2137, 1993.

SOUSA, G. R. G. Identificação da queda inadvertida de barra de controle utilizando medidas dos termopares / Gabriel Ricardo Güntensperger Sousa. – Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, XII, 85 p.:il.; 29,7 cm. 2015.

SOUZA, T. J. Método para identificação em tempo real da queda involuntária de barras de controle em reatores PWR / Thiago Juncal de Souza. – Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, XII, 83 p.: il, 29,7cm. 2013.

SOUZA, C. F. L. ; SOUZA, M. V. C. ; COLAÇO, M. J. ; CALDEIRA, A. B. ; SCOFANO NETO, F. Inverse determination of blood perfusion coefficient by using different deterministic and heuristic techniques. JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES AND ENGINEERING (ONLINE), v. 36, p. 193-206. 2014.

SU, J. E COTTA, R.M. Improved lumped parameter formulation for simplified LWR thermohydraulic analysis. Annals of Nuclear Energy, 28 (2001) 1019-1031. 2001

SU, J.; SILVA NETO, A. J. Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem of Source Strength Estimation in Cylindrical Rods. APPLIED MATHEMATICAL MODELLING, v. 25, p. 861-872. 2001.

TODREAS, N. E.; KAZIMI, M.S. Nuclear Systems I: Thermal Hydraulic Fundamentals, Hemisphere Pub. Corp., New York, 1990.

ULMER-SCOLLE, D.S. The basics of nuclear energy: How is nuclear power produced? Disponível em: < <http://geoinfo.nmt.edu/resources/uranium/power.html>>. Acesso em: 05 de Abril de 2017.

VENTER, G. Review of optimization techniques. Encyclopedia of Aerospace Engineering. Stellenbosch University. Department of Mechanical and Mechatronic Engineering. South Africa. 2010.

VIEIRA, C. B. Simulação computacional da convecção natural em cavidades contendo um fluido com geração interna de calor / Camila Braga Vieira. – Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, XVIII, 115p.: il, 29,7 cm. 2010.

WOODBURY, K. Inverse Engineering Handbook. CRC Press, Boca Raton. 2002.

YANG. T; LIU. X. J.; CHENG. X. Investigation on heat transfer non-uniformity in rod bundle. Nuclear Engineering and Design 265 (2013) 222-231. 2013.

8 APÊNDICES

8.1 APÊNDICE 1: PARÂMETROS CONCENTRADOS

No problema de transferência de calor por condução através da análise por parâmetros concentrados, a variação da temperatura no sólido é função apenas do tempo, não variando com o espaço. Nesta abordagem, a temperatura em todos os pontos do elemento, é igual à sua própria temperatura média, onde essa varia com o tempo.

A formulação baseada no método dos parâmetros concentrados traz grandes simplificações na análise da condução de calor transiente, entretanto à sua aplicação possui restrições. Basicamente, a temperatura transiente é obtida através de um balanço de energia no sólido, onde:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa de transferência} \\ \text{de calor para o sólido} \\ \text{através das fronteiras} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de aumento da} \\ \text{energia interna do} \\ \text{sólido} \end{array} \right) \quad (8.1)$$

A faixa de validação desta aproximação está baseada no número de Biot, que pode ser entendido como a razão entre as resistências térmicas interna e externa.

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{\frac{L}{k}}{\frac{1}{h}} \rightarrow \text{Resistência térmica interna} / \text{Resistência térmica externa} \quad (8.2)$$

A análise por parâmetros concentrados é válida se a distribuição de temperatura dentro do elemento permanece suficientemente uniforme durante o transiente. Para sólidos, tal fato acontece se a resistência interna do sólido ao fluxo de calor for desprezível, ou seja, se o número de Biot for pequeno.

De acordo com Ozisik, 1993, soluções analíticas exatas para condução transiente em sólidos planos, cilíndricos ou esféricos, submetidos à resfriamento convectivo, mostram que para $Bi < 0,1$, a variação de temperatura no sólido durante o transiente é

menor que 5%, ou seja, gradientes de temperatura suaves. Logo, conclui-se que a análise por parâmetros concentrados pode ser utilizada para a maioria das aplicações de engenharia se o número de Biot for menor que 0,1.

Em suma, materiais com alta condutividade térmica submetidos a baixa convecção são mais propensos a atender o critério da análise por parâmetros concentrados.

8.2 APÊNDICE 2: AVALIAÇÃO DO SISTEMA MATRICIAL

O sistema matricial à ser avaliado na segunda e na terceira modelagem é do tipo,

$$[C_{mn}]\{\theta'\} + [D_{mn}]\{\theta\} = \{H_m(t)\} \quad (8.3)$$

onde m e n são respectivamente, as linhas e colunas das matrizes, sendo que esses estão relacionados com a quantidade de autovalor do problema de Sturm-Liouville à ser considerado na análise, e conforme já mencionado, m é igual à n . Para solucionar o sistema matricial é utilizado o conceito de inversão de matrizes e o método da diagonalização (BOYCE & DIPRIMA, 2012). Para tal, a EQ. 8.3, é reescrita como:

$$[C_{mn}]^{-1}[C_{mn}]\{\theta'\} + [C_{mn}]^{-1}[D_{mn}]\{\theta\} = T(t)[C_{mn}]^{-1}\{H_m\} \quad (8.4)$$

$$\{\theta'_m\} = -[U_{mn}]\{\theta_m\} + T(t)\{V_m\} \quad (8.5)$$

onde $[U_{mn}] = [C_{mn}]^{-1}[D_{mn}]$ e $\{V_m\} = [C_{mn}]^{-1}\{H_m\}$. A matriz inversa de C é computada numericamente no MATLAB, e o seu tamanho está relacionada com a quantidade de autovalores do problema de Sturm-Liouville, conforme supradito.

Se a matriz $[U_{mn}]$ tem um conjunto completo de m autovetores linearmente independentes, esse é certamente o caso quando os autovalores da matriz $[U_{mn}]$ são todos distintos ou a matriz é auto-adjunta, onde uma matriz é dita auto-adjunta se ela for idêntica à sua transposta conjugada (BOYCE & DIPRIMA, 2012).

No programa numérico implementado é garantido que a matriz $[U_{mn}]$ tem um conjunto completo m de autovetores linearmente independentes, e que se trata do caso de quando todos os autovalores são distintos e reais. A partir daí, o método da diagonalização é aplicado na EQ. 8.5.

Sendo a matriz $[U_{mn}]$ diagonalizável, pode se transformar a EQ. 8.5 em um sistema de equações solúvel. Para tal, considera-se a matriz $[Z_{mn}]$, cujas colunas são os autovetores da matriz $[U_{mn}]$, onde esses são obtidos numericamente no MATLAB. E então, define-se uma variável dependente nova y por:

$$\{\theta_m\} = [Z_{mn}]\{y_m\} \quad (8.6)$$

substituindo a EQ. 8.6 na EQ. 8.5 obtém-se,

$$[Z_{mn}]\{y'_m\} = -[U_{mn}][Z_{mn}]\{y_m\} + T(t)\{V_m\} \quad (8.7)$$

multiplicando por $[Z_{mn}]^{-1}$, onde essa também é computada numericamente,

$$\{y'_m\} = -[L_{mn}]\{y_m\} + T(t)\{O_m\} \quad (8.8)$$

onde $[Z_{mn}]^{-1}[U_{mn}][Z_{mn}] = [L_{mn}]$ e $[Z_{mn}]^{-1}[V_m] = [O_m]$. A matriz $[L_{mn}]$ é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz $[U_{mn}]$, arrumados na mesma ordem que os autovetores correspondentes, que aparecem como colunas de $[Z_{mn}]$. A EQ. 8.8 é um sistema de m equações desacopladas, que podem ser resolvidas separadamente (BOYCE & DIPRIMA, 2012). Em forma escalar, a EQ. 8.8 é reescrita como:

$$y'_j = -r_j y_j + T(t)O_j \rightarrow j = 1, 2, \dots, m \quad (8.9)$$

A EQ. 8.9 é uma equação linear de primeira ordem, com a seguinte solução formal,

$$y_j(t) = e^{-r_j t} \int_{t_0}^t e^{r_j s} T(s) O_j ds + c_j e^{-r_j t} \rightarrow j = 1, 2, \dots, m \quad (8.10)$$

onde r_j são os autovalores da matriz $[U_{mn}]$, que são computados numericamente, e c_j são constantes arbitrárias que são obtidas a partir da condição inicial. Cada elemento do vetor coluna $\{y_m\}$ é computado pela EQ. 8.10 e implementado na rotina, para finalmente obter-se a solução θ_m a partir da EQ. 8.6. Nota-se que ao ser multiplicado pela matriz de semelhança $[Z_{mn}]$, o segundo termo do lado direito do sinal de igualdade da EQ. 8.10 fornece a solução geral da equação homogênea $\{\theta'_m\} = -[U_{mn}]\{\theta_m\}$, enquanto o primeiro termo fornece uma solução particular da EQ. 8.5.

Finalmente, com a solução para as temperaturas transformadas, implementa-se essas na fórmula de inversão, a fim de obter a distribuição de temperatura transiente ao longo da vareta combustível.