

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

HENRIQUE DA SILVA KRANZFELD

**REDUÇÃO DE ORDEM DE SISTEMAS DINÂMICOS DE GRANDE
PORTE POR EQUIVALENTES MODAIS**

**Rio de Janeiro
2016**

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

HENRIQUE DA SILVA KRANZFELD

**REDUÇÃO DE ORDEM DE SISTEMAS DINÂMICOS DE
GRANDE PORTE POR EQUIVALENTES MODAIS**

Projeto de Fim de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: 1 Ten Thiago Henrique Sanches Bossa - M. C.
Co-Orientador: Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE

Rio de Janeiro
2016

c2016

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

621.3	Kranzfeld, Henrique da Silva
K89r	Redução de ordem de sistemas dinâmicos de grande porte por equivalentes modais / Henrique da Silva Kranzfeld; orientado por Thiago Henrique Sanches Bossa; Paulo Cesar Pellanda – Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2016.
	53p. : il.
	Projeto de Fim de Curso (PROFIC) – Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2016.
	1. Curso de Engenharia Elétrica – Projeto de Fim de Curso. 2. Modal. I. Bossa, Thiago Henrique Sanches. II. Pellanda, Paulo Cesar. III. Título. IV. Instituto Militar de Engenharia.

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

HENRIQUE DA SILVA KRANZFELD

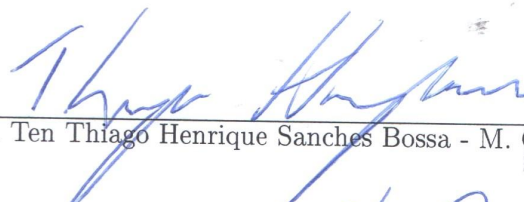
**REDUÇÃO DE ORDEM DE SISTEMAS DINÂMICOS DE
GRANDE PORTE POR EQUIVALENTES MODAIS**

Projeto de Fim de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: 1 Ten Thiago Henrique Sanches Bossa - M. C.

Co-Orientador: Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE

Aprovado em 27 de Setembro de 2016 pela seguinte Banca Examinadora:



1 Ten Thiago Henrique Sanches Bossa - M. C. - Presidente



Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE



Maj Alberto Mota Simões - Dr. ISAE

Rio de Janeiro
2016

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	5
LISTA DE ABREVIATURAS	6
1 INTRODUÇÃO	9
1.1 Motivação	9
1.2 Objetivos	10
1.3 Estrutura do Trabalho	11
2 SISTEMAS DINÂMICOS	12
2.1 A Transformada de Laplace	12
2.2 Espaço de Estados e Sistemas Lineares	14
2.2.1 Função de Transferência	15
2.2.2 Diagonalização de Sistemas	16
2.2.3 Decomposição em Frações Parciais	17
2.3 Truncamento Modal	18
2.4 Truncamento Balanceado	18
3 ESPAÇOS DE FUNÇÕES	20
3.1 Norma de Funções	20
3.2 Produto Interno	20
3.3 Espaços de Hilbert	22
3.4 Norma \mathcal{H}_2	24
3.5 Norma \mathcal{H}_∞	25
4 ÍNDICES DE DOMINÂNCIA MODAL	27
4.1 Preliminares Matemáticos	27
4.2 Método do Valor Inicial (IDMVI)	28
4.3 Método do Valor Final (IDMVF)	28
4.4 Índice de Green (IDMG)	29
4.5 Índice da Norma Infinita (IDMNI)	29
4.6 Índice da Norma \mathcal{H}_2 (IDMN2)	29
4.7 Limitações dos IDM	30

5	IDM PROPOSTO	32
5.1	Premissas do Problema	32
5.2	Forward Recursive Minimum Error (FRME)	32
5.3	Backward Recursive Minimum Error (BRME).....	37
6	RESULTADOS	39
6.1	Sistema Randômico com 30 Estados e 20 Modos	39
6.2	Média de 100 sistemas randômicos com 20 modos	43
6.3	Média de 10 sistemas gerados a partir do sistema New England.....	46
6.4	Sistema Randômico com 300 estados e 230 modos	49
7	CONCLUSÃO	51

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.5.1	Exemplo FRME - 1ª iteração	33
FIG.5.2	Exemplo FRME - 2ª iteração	33
FIG.5.3	Limitação - 1ª iteração	34
FIG.5.4	Limitação - 2ª iteração	35
FIG.5.5	Exemplo BRME - 1ª iteração	37
FIG.5.6	Exemplo BRME - 2ª iteração	37
FIG.6.1	Erros da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_2 para um sistema com 20 modos	40
FIG.6.2	Erros normalizados da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_2 para um sistema com 20 modos	41
FIG.6.3	Erros da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para um sistema com 20 modos	42
FIG.6.4	Erros normalizados da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para um sistema com 20 modos	42
FIG.6.5	Média dos erros da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_2 para a média de 100 sistemas com 20 modos	43
FIG.6.6	Média dos erros normalizados da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_2 para a média de 100 sistemas com 20 modos	44
FIG.6.7	Média dos erros da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para a média de 100 sistemas com 20 modos	45
FIG.6.8	Média dos erros normalizados da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para a média de 100 sistemas com 20 modos	45
FIG.6.9	Sistema New England (ATHAY ET AL., 1979)	47
FIG.6.10	Média dos erros normalizados utilizando a norma \mathcal{H}_2 para a média de 10 casos gerados a partir do sistema New England	48
FIG.6.11	Média dos erros normalizados utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para a média de 10 casos gerados a partir do sistema New England	48
FIG.6.12	Erros normalizados utilizando a norma \mathcal{H}_2 para a um sistema com 300 estados e 230 modos	49
FIG.6.13	Erros normalizados utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para a um sistema com 300 estados e 230 modos	50

LISTA DE ABREVIATURAS

ABREVIATURAS

BRME	-	<i>Backward Recursive Minimum Error</i>
FRME	-	<i>Forward Recursive Minimum Error</i>
IDM	-	Índice de Dominância Modal
IDMG	-	Índice de Dominância Modal por Green
IDMN2	-	Índice de Dominância Modal por Norma \mathcal{H}_2
IDMNI	-	Índice de Dominância Modal por Norma Infinita
IDMVF	-	Índice de Dominância Modal pelo Valor Final
IDMVI	-	Índice de Dominância Modal pelo Valor Inicial
MIMO	-	<i>Multiple Inputs - Multiple Outputs</i>
SEP	-	Sistema Elétrico de Potência
SISO	-	<i>Single Input - Single Output</i>

SÍMBOLOS

$Re(x)$	-	parte real do número complexo x
$Im(x)$	-	parte imaginária do número complexo x
\bar{x}	-	complexo conjugado do número complexo x
\mathbf{M}^T	-	matriz transposta de \mathbf{M}
\mathbf{M}^{-1}	-	matriz inversa de \mathbf{M}
$ \mathbf{M} $	-	determinante da matriz \mathbf{M}
$\delta(t)$	-	função impulso
$u(t)$	-	função degrau
λ	-	pólo de um determinado sistema
σ	-	valor singular de Hankel de uma matriz
$G_r(s)$	-	modelo reduzido de ordem r
$\tilde{G}(s)$	-	sistema resultante da diferença entre o modelo completo e o reduzido
\mathcal{RL}_2	-	espaço das funções racionais estritamente próprias e sem pólos no eixo imaginário
\mathcal{RH}_2	-	espaço das funções racionais estritamente próprias e estáveis
\mathcal{RL}_∞	-	espaço das funções racionais próprias e sem pólos no eixo imaginário
\mathcal{RH}_∞	-	espaço das funções racionais próprias e estáveis

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo principal a proposição de um novo índice de dominância modal (IDM). Dois novos IDMs foram sugeridos, o Forward Recursive Minimum Error (FMRE) e o Backward Recursive Minimum Error (BRME), gerados a partir de cálculos recursivos.

Para alcançar tal meta, um programa em Matlab[®] foi desenvolvido de forma que este implementasse o IDM proposto e os presentes na literatura, com o intuito de promover uma comparação entre os seus desempenhos.

Quatro tipos de simulações foram realizadas: sistema randômico com 30 estados e 20 modos, média de 100 sistemas randômicos com 20 modos, média de 10 sistemas gerados a partir do sistema de potência New England e sistema randômico com 300 estados e 230 modos.

Com os resultados obtidos, pode-se afirmar que tanto o FRME quanto o BRME apresentaram um desempenho superior em relação aos outros IDMs. Desta forma, os novos IDMs propostos podem ser usados em uma estratégia de controle eficiente em sistemas dinâmicos, em especial os de grande porte.

ABSTRACT

This work had as main goal the proposal of a new modal dominance index (MDI). Two new MDIs were introduced, the Forward Recursive Minimum Error (FRME) and the Backward Recursive Minimum Error (BRME), generated from recursive calculations.

To achieve this objective, a program in Matlab[®] was developed so that it implemented the new MDI and the ones presented in the literature, in order to make a comparison between their performances.

Four types of simulations were made: random system with 30 states and 20 modes, mean of 100 random systems with 20 modes, mean of 10 systems generated from the New England power system and random system with 300 states and 230 modes.

Based on the results obtained, it can be stated that both FMRE and BRME had a superior performance than the others MDIs. Thus, these new MDIs can be used in an efficient control strategy in dynamic systems, particularly in large ones.

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Em sistemas elétricos de potência (SEP), é de fundamental importância garantir o suprimento contínuo de energia elétrica dentro de certos padrões de qualidade. A saber, um SEP deve ser capaz de fornecer energia elétrica com frequência e tensão constantes, de atender a demanda de potência ativa e reativa das cargas e de realizar este serviço com confiabilidade a um custo de operação mínimo. Deve-se observar ainda que as cargas que esse sistemas atendem são revestidas de um fator aleatório, apesar de seguirem certos padrões. Além disso, a demanda por energia elétrica é crescente, o que cria a constante necessidade de expansão e alteração da rede. Desta forma, um SEP envolve modelos matemáticos cada vez mais complexos, incluindo equivalentes de geração, transmissão e seus controladores (DA SILVA, 2005)(KUNDUR ET AL., 2003).

A estabilidade de um SEP pode ser abordada sob a ótica da estabilidade de frequência, da estabilidade de tensão e da estabilidade angular. Neste último, pode ainda ser estudada a estabilidade a pequenas perturbações que envolve oscilações de 0,15 a 0,7 Hz de frequência(DA SILVA, 2005).

Muitos destes sistemas são intratáveis computacionalmente se forem consideradas, em sua totalidade, as variáveis que os compõe. Isto dificulta a implementação de um controle eficiente. Uma das formas de viabilizar o projeto do controle consiste na redução de ordem do sistema, que busca encontrar um subconjunto reduzido de variáveis que consiga descrever de maneira satisfatória seu comportamento dinâmico.

Matematicamente, tem-se a seguinte formulação: dado um modelo linear invariante no tempo $G(s)$ de ordem n , deseja-se calcular um modelo reduzido $G_r(s)$ de ordem r , com $r < n$, tal que o erro $e = \|G(s) - G_r(s)\|$ seja o menor possível. Aqui, o modelo $G(s)$ é uma função de transferência representada por uma função racional. Com isso, a ordem é definida como sendo o grau do denominador desta fração, ou seja, a quantidade de pólos do sistema.

Em sistemas em que o modelo completo é conhecido, existem basicamente duas abordagens para se obter um modelo de ordem reduzida: o truncamento balanceado e o truncamento por dominância modal, ou truncamento modal.

O truncamento balanceado é um método matematicamente rigoroso que define o sistema reduzido a partir do cálculo dos gramianos do sistema, assim como dos valores singulares de Hankel (ZHOU ET AL., 1996).

Este método possui como principal vantagem proporcionar o menor limitante do erro do modelo, definido por $e = \|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$, onde σ_i são os $n - r$ menores valores singulares de Hankel do modelo completo. No entanto, como desvantagens tem-se que esse método, principalmente por ter que resolver as equações de Lyapunov para obter os valores singulares de Hankel, possui uma carga computacional impeditiva em sistemas de grande porte, isto é, para sistemas com mais de 1000 variáveis de estado. Além disso, este algoritmo não se compromete em manter a base modal da realização em espaços de estados original. A manutenção desta base facilita a aplicação de uma solução de controle e a análise do sistema.

Já o método do truncamento modal se baseia na importância relativa dos modos do sistema, preservando desta forma a estrutura deste, em termos de autovalores e resíduos, eliminando os modos menos relevantes. Para decidir qual modo é mais relevante, este método utiliza algum Índice de Dominância Modal (IDM).

Como vantagens, tem-se a possibilidade da análise da dinâmica de um modo específico, uma vez que a estrutura do sistema é preservada, além de poder ser aplicado em sistemas com grande número de estados. Como desvantagem, tem-se que o erro de modelagem apresentado por este método, para uma mesma ordem de redução, é maior que o erro fornecido pelo truncamento balanceado.

Os IDMs são pouco explorados na literatura (AGUIRRE, 1993), e o mais utilizado em métodos de reduções modais (GREEN AND LIMEBEER, 1995) (MARTINS ET AL., 1996) possui definições e derivações pouco rigorosas e obscuras, havendo campo para ser aperfeiçoado. Adicionalmente, não há IDM que endereça o problema de redução modal de custo quadrático, onde o erro de redução é calculado por $e = \|G(s) - G_r(s)\|_2$.

1.2 OBJETIVOS

De forma a contribuir para o preenchimento desta lacuna, este estudo tem por objetivo propor um novo IDM que apresente, em geral, erros menores do que os apresentados pelos principais IDMs presentes na literatura.

Para tal, como objetivo intermediário, tem-se então o desenvolvimento de um programa em Matlab[®] que implemente o IDM proposto bem como os presentes na literatura, de forma que seus desempenhos possam ser comparados. Um estudo e uma modelagem do

problema de redução modal foram desenvolvidos, fundamentando a proposição do novo IDM bem como a justificativa de sua superioridade.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em sete capítulos, com as seguintes descrições sucintas:

- O Capítulo 2 apresenta os conceitos fundamentais de sistemas dinâmicos, definindo a transformada de Laplace e analisando a teoria de sistemas representados em espaço de estados.
- O Capítulo 3 estuda os espaços de funções, expondo conceitos importantes como norma de funções e produto interno.
- O Capítulo 4 apresenta os principais índices de dominância modal da literatura.
- O Capítulo 5 propõe dois novos IDMs, o Forward Recursive Minimum Error e o Backward Recursive Minimum Error.
- O Capítulo 6 exhibe os resultados obtidos utilizando estes novos métodos, comparando-os com os outros presentes na literatura.
- O Capítulo 7 apresenta as conclusões, destacando as principais contribuições deste estudo e indicando sugestões para novas pesquisas nesta área.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

2.1 A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Os sistemas dinâmicos podem ser descritos por equações diferenciais. No entanto, nem sempre é uma tarefa simples resolvê-las. Desta forma, existe uma ferramenta bastante útil não só para resolver este tipo de equações mas também para analisar a resposta de determinado sistema no domínio da frequência. Trata-se da transformada de Laplace.

Considere uma função $f(t)$ definida para $t > 0$. A transformada de Laplace desta, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$ ou por $F(s)$, é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Nem sempre a transformada de Laplace de uma função existe. Para garantir esta existência, a função $f(t)$ deve satisfazer duas condições. Suponha que

- a) f é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$ para qualquer A positivo e
- b) $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M$, onde K , a e M são constantes reais com K e M necessariamente positivas.

Então a transformada de Laplace existe para $s > a$. Mais em Boyce and DiPrima (2006).

Repare que este método muda o domínio da função estudada. Inicialmente, era o domínio da variável t e, após a transformada, o domínio tornou-se o da variável s . Em problemas de Engenharia em geral a variável t representa o domínio do tempo enquanto que a variável s representa o domínio da frequência. Esta variável pode ser complexa, representando a frequência complexa do sistema.

Matematicamente, tem-se que $s = \sigma + j\omega$. Com esta frequência, pode-se prever o comportamento de um sistema em regime transitório e em regime permanente. Se a frequência tiver a parte real nula, ou seja, $\sigma = 0$ e $s = j\omega$, tem-se que a transformada de Laplace se torna a transformada de Fourier, muito útil para a análise de um sistema em regime estacionário.

Existe uma fórmula para a transformada inversa. Contudo, dada a sua complexidade, ela não é muito utilizada. Para evitar a utilização desta fórmula, usa-se o fato de que

se f é uma função contínua então existe, essencialmente, uma bijeção entre as funções e as suas transformadas. Com isso, pode-se montar uma tabela com as principais funções utilizadas e suas respectivas transformadas.

Existem duas funções de grande importância para a Engenharia cujas transformadas são conhecidas. A função degrau $u(t)$ definida como $u(t) = 0$ se $t < 0$ e $u(t) = 1$ se $t \geq 0$ e a função impulso $\delta(t)$ definida como $\delta(t) = 0$ se $t \neq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Cabe ressaltar que esta função não existe no sentido usual da palavra mas deve ser entendida como um sinal que é igual a zero todo o tempo, com a exceção de um breve período em que ela assume valores muito altos.

Deste modo, $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ e $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, deduzidas pela simples aplicação da definição da transformada de Laplace.

Ainda neste tópico, existem dois teoremas úteis para o estudo de sistemas dinâmicos. O primeiro deles é o Teorema do Valor Inicial.

Teorema (Valor Inicial) *Dada uma função x em que a transformada de Laplace possa ser aplicada, tem-se que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

Demonstração. Com efeito,

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt = [x(t)e^{-st}] \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0)$$

que é a conhecida fórmula para a transformada da derivada de uma função.

Com isso,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\mathcal{L}[\dot{x}(t)]) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt = 0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0)]$$

O que implica

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

□

Por fim, existe o Teorema do Valor Final.

Teorema (Valor Final) *Dada uma função x em que a transformada de Laplace possa ser aplicada, tem-se que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Demonstração. Com efeito, utilizando-se a fórmula da transformada da derivada de uma função,

$$\lim_{s \rightarrow 0} (\mathcal{L}[\dot{x}(t)]) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt = x(\infty) - x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0)]$$

O que implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

□

2.2 ESPAÇO DE ESTADOS E SISTEMAS LINEARES

Segundo Ogata (2010), o estado de um sistema dinâmico é definido como o menor conjunto de variáveis que conseguem descrever completamente o comportamento do sistema, dado o conhecimento destas no tempo $t = t_0$, juntamente com as entradas do sistema para $t \geq t_0$.

Suponha, então, que existam n variáveis de estado x_1, x_2, \dots, x_n que consigam descrever completamente um sistema. Estas variáveis podem ser consideradas como n componentes de um vetor \mathbf{x} . Este vetor é chamado de vetor de estados. Estas variáveis podem ainda ser consideradas os eixos de um espaço n -dimensional, o espaço de estados. Qualquer estado de um dado sistema pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

Seja então um sistema dinâmico com n variáveis de estado x_1, x_2, \dots, x_n , p entradas u_1, u_2, \dots, u_p e q saídas y_1, y_2, \dots, y_q . Com isso, este pode ser representado pelo seguinte conjunto de equações.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p; t) \end{aligned}$$

Para as saídas:

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p; t)$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p; t) \\
&\vdots \\
y_q(t) &= g_q(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p; t)
\end{aligned}$$

Definindo o vetor de saídas \mathbf{y} e o vetor de entradas \mathbf{u} de modo análogo ao vetor \mathbf{x} de estados, assim como os vetores de funções \mathbf{f} e \mathbf{g} , estas equações podem ser escritas de forma mais compacta.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)
\end{aligned}$$

Se os vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} forem compostos apenas de funções lineares, estes conjuntos de equações pode assumir a seguinte forma.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{A}(t)$ é a matriz de estados, $\mathbf{B}(t)$ é a matriz de entrada, $\mathbf{C}(t)$ é a matriz de saída e $\mathbf{D}(t)$ é a matriz de transmissão direta.

Se o sistema for invariante no tempo, ou seja, se as funções dos vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} não envolvem a variável tempo t explicitamente, tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{2.2}$$

2.2.1 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Se o sistema descrito por (2.1) e (2.2) possuir uma entrada e uma saída, ou seja, se $p = q = 1$, pode-se obter uma fração racional conhecida como a função de transferência do sistema, que representa a razão entre a transformada de Laplace do sinal de saída com a transformada de Laplace do sinal de entrada.

Aplicando a transformada de Laplace a (2.1) e a (2.2) e manipulando algebricamente as equações, pode-se chegar a

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.3)$$

Veja que $G(s)$, devido ao termo $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

onde $Q(s)$ é um polinômio em s e $|\mathbf{A}|$ simboliza o determinante da matriz \mathbf{A} .

Desta forma, as raízes de $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$, que são os autovalores do matriz \mathbf{A} , são justamente os pólos do sistema.

No caso de mais de uma saída ou mais de uma entrada, a função de transferência se torna uma matriz $p \times q$ de funções de transferência $\mathbf{G}(s)$ dada por

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

2.2.2 DIAGONALIZAÇÃO DE SISTEMAS

Se a matriz de estados em (2.1) for diagonalizável, pode-se aplicar uma transformação $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ de tal forma que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ seja diagonal. Os elementos da diagonal desta nova matriz são os $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalores de \mathbf{A} . Desta forma, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. A matriz \mathbf{P} possui como colunas os n autovetores independentes de \mathbf{A} .

Considerando a nova matriz de estados \mathbf{z} , tem-se um novo par de equações que descrevem o sistema.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Afirma-se que os autovalores de \mathbf{A} e de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ são os mesmos, ou seja, os pólos do sistema são preservados, assim como sua dinâmica. Com efeito,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| = |s\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}||s\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{P}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

Com isso, \mathbf{A} e $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ possuem o mesmo polinômio característico.

Repare que os sinais de entrada e de saída permanecem inalterados com a transformação. Portanto, a função de transferência não se modifica.

2.2.3 DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

Em eventos fisicamente realizáveis, a função de transferência é uma função racional própria, isto é, o grau do numerador é menor ou igual que o grau do denominador. Esta pode ser decomposta em frações parciais.

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} + D$$

onde R_i é o resíduo associado ao pólo λ_i , D é a matriz de transmissão direta e n é o número de pólos do sistema.

No caso da existência de pólos complexos, eles aparecerão em pares com seus respectivos conjugados λ_i e $\bar{\lambda}_i$ juntamente com seus respectivos resíduos R_i e \bar{R}_i .

No caso particular de interesse de um sistema estritamente próprio, isto é, com $D=0$, com n pólos reais, uma entrada e uma saída (SISO) e uma realização em espaço de estados com as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} , onde \mathbf{A} seja diagonalizável, pode-se aplicar uma transformação \mathbf{P} como descrita na subseção 2.2.2 e obter novas matrizes $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ de tal forma que

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$$

Por (2.3), tem-se que

$$G(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \dots & \tilde{c}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{b}_i \tilde{c}_i}{s - \lambda_i} \quad (2.4)$$

Se os pólos fossem complexos conjugados, a dedução seria a mesma com os pares de pólos λ_i e $\bar{\lambda}_i$, associados respectivamente aos elementos \tilde{b}_i e $\bar{\tilde{b}}_i$ assim como aos elementos \tilde{c}_i e $\bar{\tilde{c}}_i$.

Comparando (2.3) com (2.4), observa-se que o resíduo associado ao pólo λ_i pode ser expresso pelo produto $\tilde{b}_i \tilde{c}_i$. Esta forma de se calcular os resíduos é mais eficiente,

em termos computacionais. Além disso, essa forma em paralelo da realização de estados de $G(s)$ favorece a eliminação de modos do modelo, se necessário, bastando excluir os elementos \tilde{c}_i , $\frac{1}{s-\lambda_i}$ e \tilde{b}_i no caso de um pólo real λ_i , ou os elementos \tilde{c}_i , $\overline{\tilde{c}_i}$, $\frac{1}{s-\lambda_i}$, $\frac{1}{s-\overline{\lambda_i}}$, \tilde{b}_i e $\overline{\tilde{b}_i}$ no caso de pares de pólos complexos conjugados λ_i e $\overline{\lambda_i}$.

2.3 TRUNCAMENTO MODAL

Deseja-se formar um sistema $G_r(s)$, de ordem r com $r < n$, onde n é a ordem do sistema original $G(s)$ definido por (2.4) de tal forma que $G_r(s)$ represente aproximadamente a resposta de $G(s)$.

O sistema $G_r(s)$ é expresso por:

$$G_r(s) = \mathbf{C}_r(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_r)^{-1}\mathbf{B}_r$$

onde:

$\mathbf{A}_r = \text{diag}(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kr})$ de modo que os elementos $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kr}$ pertençam ao conjunto de autovalores do sistema original;

$\mathbf{B}_r = \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ \vdots \\ b_{kr} \end{pmatrix}$ de modo que os elementos $b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kr}$ pertençam à matriz original \mathbf{B}

$\mathbf{C}_r = \begin{pmatrix} c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kr} \end{pmatrix}$ de modo que os elementos $c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kr}$ pertençam à matriz original \mathbf{C} .

Neste caso, $G_r(s)$ é dito ser um truncamento modal de $G(s)$ de ordem r . Caso o sistema não esteja em uma realização diagonal, ele pode ser diagonalizado conforme a subseção 2.2.2. É importante notar que a escolha dos r elementos que compõe as matrizes \mathbf{A}_r , \mathbf{B}_r e \mathbf{C}_r são definidos por algum índice de dominância modal.

2.4 TRUNCAMENTO BALANCEADO

O truncamento balanceado é um método matematicamente rigoroso e bastante utilizado em redução de ordem de sistemas de médio porte (DA SILVA, 2005). Uma breve descrição deste algoritmo é feita a seguir, por meio de um importante teorema.

Teorema Considere um sistema $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ e suponha que

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

seja uma realização balanceada com Gramianos de controlabilidade e observabilidade iguais e diagonais denotados por $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, solução das equações de Lyapunov:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + BB^T = 0$$

$$A^T\Sigma + \Sigma A + C^TC = 0$$

de tal forma que

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_r I_{s_r})$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_N I_{s_N})$$

com $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_{r+1} > \sigma_{r+2} > \dots > \sigma_N$ onde σ_i tem multiplicidade s_i , $i = 1, 2, \dots, N$ e $s_1 + s_2 + \dots + s_N = n$. Então o sistema truncado

$$G_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$$

é balanceado e assintoticamente estável. Tem-se ainda que

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_N)$$

e este limite é atingido quando $r = N - 1$. Isto é

$$\|G(s) - G_{N-1}(s)\|_\infty = 2\sigma_N.$$

Mais em (ZHOU ET AL., 1996).

Note que este método garante um limitante superior para o erro da redução. Este limitante é, de fato, menor que os garantidos pelos métodos de truncamento modal.

Por fim, observe que o modelo $G_r(s)$ obtido possui uma relação mais complexa com o modelo original $G(s)$ do que quando comparado com os modelos obtidos pelos métodos modais, uma vez que estes truncam os modos e os resíduos do sistema original.

3 ESPAÇOS DE FUNÇÕES

Para se saber se a função de ordem reduzida aproxima de modo satisfatório a função original, necessita-se de um método formal para medir o quão próximo uma função está da outra. Para isso, faz-se necessário analisar conceitos fundamentais sobre espaços de funções.

3.1 NORMA DE FUNÇÕES

Considere um espaço de funções X que satisfaz as propriedades de um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos \mathbb{C} . Então, uma norma no espaço X , denotada por $\|\cdot\|$, é uma função que associa a um elemento $x \in X$ um número $\|x\| \in \mathbb{R}$, devendo satisfazer as seguintes propriedades (ALENCAR, 2003):

- i) $\|x\| \geq 0$
- ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \forall \alpha \in \mathbb{C}$
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

A definição de sequência de Cauchy também é importante para este estudo. A saber, uma sequência $\{x_k\}$ é de Cauchy se $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_j\| < \epsilon, \forall k, j > N$.

Um espaço onde todas as sequências de Cauchy convergem é denominado completo.

3.2 PRODUTO INTERNO

Um produto interno em X denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, é uma função que a cada par de vetores $(x, y) \in X$ associa um número complexo, satisfazendo as seguintes propriedades (ALENCAR, 2003):

- i) $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle x, x \rangle \geq 0$
- ii) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- iii)¹ $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- iv) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$

¹Usualmente em Matemática a linearidade do produto interno é colocada na primeira variável. No entanto, em Engenharia de Controle, esta linearidade é definida na segunda variável.

Considere então um espaço de funções X que possua um produto interno. Pode-se definir a norma de uma função f por $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Com efeito, basta verificar se esta satisfaz as propriedades previamente definidas para uma norma.

i)

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \geq 0$$

ii)

$$\|f\| = 0 \iff \sqrt{\langle f, f \rangle} = 0 \iff f = 0$$

iii)

$$\|\alpha f\| = \sqrt{\langle \alpha f, \alpha f \rangle} = \sqrt{\alpha \langle \alpha f, f \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle f, f \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2} \sqrt{\langle f, f \rangle} = |\alpha| \|f\|$$

Por fim, para provar a propriedade iv) da norma, o importante teorema de Cauchy-Schwarz se faz necessário.

Teorema (Cauchy-Schwarz) *Dado um espaço de funções com um produto interno definido, então para quaisquer funções f e g pertencentes a este espaço, tem-se que*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

Demonstração. Para verificá-lo, observe que se $f = 0$ ou $g = 0$, este é imediato. Com isso, considere um espaço de funções X que possua um produto interno com $f \in X$, $g \in X$ e $f, g \neq 0$. Seja $h = xf - yg$ com $x = \langle g, g \rangle$ e $y = \langle g, f \rangle$. Então,

$$\langle h, h \rangle = \langle xf - yg, xf - yg \rangle = x\bar{x}\langle f, f \rangle - x\bar{y}\langle g, f \rangle - \bar{x}y\langle f, g \rangle + y\bar{y}\langle g, g \rangle$$

Observe que $\bar{x} = \overline{\langle g, g \rangle} = \langle g, g \rangle = x$ e que $\bar{y} = \overline{\langle g, f \rangle} = \langle f, g \rangle$. Veja ainda que $\langle h, h \rangle \geq 0$. Desta forma,

$$\langle g, g \rangle^2 \langle f, f \rangle - \langle g, g \rangle \langle f, g \rangle \langle g, f \rangle - \langle g, g \rangle \langle g, f \rangle \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle \langle f, g \rangle \langle g, g \rangle \geq 0$$

$$\langle g, g \rangle^2 \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle \langle g, f \rangle \langle g, g \rangle \geq 0$$

Como $g \neq 0$, pode-se dividir por $\langle g, g \rangle$. Então,

$$\langle f, g \rangle \langle g, f \rangle \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$$

Repare que $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$, que $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$ e que $\langle g, g \rangle = \|g\|^2$. Portanto,

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$$

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|,$$

como desejado. □

Demonstração baseada em Apostol (1967).

Por fim, para se provar a propriedade iv) da norma, observe que

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle$$

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + |\langle f, g \rangle| + |\langle g, f \rangle| + \|g\|^2$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ e $|\langle g, f \rangle| \leq \|g\| \|f\|$. Com isso,

$$\|f + g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2$$

$$\|f + g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

o que demonstra a propriedade.

Portanto, a definição da norma de f por $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ é permitida.

3.3 ESPAÇOS DE HILBERT

Considere um sinal $f(t)$ no domínio do tempo pertencente ao conjunto $\mathcal{L}(-\infty, \infty)$, ou seja, que possua uma energia finita no intervalo de tempo do domínio. Matematicamente, tem-se

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t)dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Sejam $\mathcal{L}(-\infty, 0)$ e $\mathcal{L}(0, \infty)$ dois subespaços de $\mathcal{L}(-\infty, \infty)$ tais que $f(t) = 0$ para $t > 0$ se $f(t) \in \mathcal{L}(-\infty, 0)$ e $f(t) = 0$ para $t < 0$ se $f(t) \in \mathcal{L}(0, \infty)$. Note que todo sinal $f(t) \in \mathcal{L}(-\infty, \infty)$ pode ser escrito como $f_-(t) + f_+(t)$ onde $f_-(t) \in \mathcal{L}(-\infty, 0)$ e $f_+(t) \in \mathcal{L}(0, \infty)$ satisfazendo

$$f_-(t) = f(t), \text{ se } t < 0 \text{ e } f_-(0) = (1 - k)f(0)$$

$$f_+(t) = f(t), \text{ se } t > 0 \text{ e } f_+(0) = kf(0)$$

onde $k \in [0, 1]$.

Pela definição de $f_-(t)$ e $f_+(t)$, observa-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_+^*(t)f_-(t)dt = 0$$

Essa integral é definida como o produto interno de dois sinais no tempo, ou seja, dado dois sinais $f(t)$ e $g(t)$,

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)dt \quad (3.1)$$

No caso anterior, como $\langle f_+(t), f_-(t) \rangle = 0$, diz-se que estas funções são ortogonais. A norma \mathcal{H}_2 de um sinal é então definida como

$$\|f(t)\|_2 = [\langle f(t), f(t) \rangle]^{\frac{1}{2}}$$

Com isso, tem-se que

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t)dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_{-\infty}^0 f_-^*(t)f_-(t)dt + \int_0^{\infty} f_+^*(t)f_+(t)dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\|f_+(t)\|_2^2 + \|f_-(t)\|_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

que é o teorema de Pitágoras para sinais no tempo.

Pode-se definir então um importante espaço para este estudo. Um espaço vetorial X é um espaço de Hilbert se ele for completo e for dotado de um produto interno, sendo a norma induzida por este.

Os espaços $\mathcal{L}(-\infty, 0)$, $\mathcal{L}(0, \infty)$ e $\mathcal{L}(-\infty, \infty)$ são exemplos de espaços de Hilbert com o produto interno definido por (3.1). Pela discussão acima, a seguinte relação entre estes espaços pode ser obtida:

$$\mathcal{L}(-\infty, \infty) = \mathcal{L}(-\infty, 0) \oplus \mathcal{L}(0, \infty)$$

o que de fato ocorre uma vez que os subespaços $\mathcal{L}(-\infty, 0)$ e $\mathcal{L}(0, \infty)$ são disjuntos e todo sinal $f(t) \in \mathcal{L}(-\infty, \infty)$ poder ser representado de forma única como soma de um elemento de $\mathcal{L}(-\infty, 0)$ com outro de $\mathcal{L}(0, \infty)$.

Existem outros exemplos de espaços de Hilbert, onde dois deles se destacam, a saber:

- \mathcal{RL}_2 : Espaço das funções racionais estritamente próprias, sem pólos no eixo imaginário com produto interno $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)Y(\omega)d\omega$;
- \mathcal{RH}_2 : Espaço das funções racionais estritamente próprias e estáveis com produto interno $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)Y(\omega)d\omega$.

Neste momento, faz-se necessário relacionar um sinal representado no domínio do tempo com sua representação no domínio da frequência. Considere portanto um sinal $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, então o Teorema de Parseval afirma que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega)F(j\omega)d\omega$$

A conclusão deste teorema é de que o norma \mathcal{H}_2 de um sinal no domínio do tempo se iguala a uma norma \mathcal{H}_2 no domínio da frequência. Ou seja,

$$\|f(t)\|_2 = \|F(j\omega)\|_2$$

onde

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t)dt \right]^{\frac{1}{2}} \text{ e} \\ \|F(j\omega)\|_2 &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega)F(j\omega)d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Isso permite o uso indistinto de um sinal na sua representação temporal ou de sua transformada de Fourier no domínio da frequência. Mais em Fairman (1998).

3.4 NORMA \mathcal{H}_2

A norma \mathcal{H}_2 definida em (3.2) pode ser utilizada para comparar o quanto uma determinada função é bem aproximada por outra. Cabe ressaltar que, em geral, essa análise é feita para a função de transferência do sistema estudado, ou seja, no domínio da frequência.

Todavia, é mais intuitivo e, de certa forma, mais simples, analisar essa aproximação no domínio do tempo. Uma pergunta interessante seria se o erro no tempo para o sinal de saída, que é o de interesse, é minimizado se a norma \mathcal{H}_2 do erro da função de transferência for minimizada. O teorema a seguir responde justamente a esta questão (ANTOULAS ET AL., 2015).

Teorema *Considere um sistema SISO com $U(s)$ e $Y(s)$ sendo as transformadas de Laplace dos sinais de entrada $u(t)$ e de saída $y(t)$, respectivamente. A função de transferência deste sistema é $H(s)$. Seja $\tilde{H}(s)$ a aproximação de $H(s)$ o que resulta em $\tilde{Y}(s) = \tilde{H}(s)U(s)$ sendo $\tilde{y}(t)$ a aproximação para o sinal da saída no tempo. Tem-se ainda que $u(t) \in \mathcal{L}(0, \infty)$ e $U(j\omega) = 0$ para todo $\omega \notin I_\omega$. Desta forma,*

$$\max_{t>0} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{I_\omega} |H(j\omega) - \tilde{H}(j\omega)|^2 d\omega \int_{I_\omega} |U(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração.

$$\max_{t>0} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \max_{t>0} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (Y(j\omega) - \tilde{Y}(j\omega)) e^{j\omega t} d\omega \right|$$

pela transformada inversa de Fourier

$$\leq \max_{t>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Y(j\omega) - \tilde{Y}(j\omega)| |e^{j\omega t}| d\omega$$

$$= \max_{t>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Y(j\omega) - \tilde{Y}(j\omega)| d\omega$$

pois $|e^{j\omega t}| = 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |H(j\omega) - \tilde{H}(j\omega)| |U(j\omega)| d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{I_\omega} |H(j\omega) - \tilde{H}(j\omega)| |U(j\omega)| d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{I_\omega} |H(j\omega) - \tilde{H}(j\omega)|^2 d\omega \int_{I_\omega} |U(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. \square

Tem-se então que

$$\max_{t>0} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \left(\int_{I_\omega} \frac{1}{2\pi} |H(j\omega) - \tilde{H}(j\omega)|^2 d\omega \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} |U(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

Note que neste estudo a aproximação será feita em relação à função de transferência $H(s)$, ou seja, a preocupação é encontrar o $\tilde{H}(s)$. Com isso, definindo o sinal de erro como $E(s) = H(s) - \tilde{H}(s)$, tem-se, por (3.2), que a primeira integral de (3.3) nada mais é do que a norma \mathcal{H}_2 do erro. Observe ainda que a última integral em (3.3) é limitada, uma vez que $u(t) \in \mathcal{L}(0, \infty)$. Matematicamente,

$$\max_{t>0} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leq (\|E(j\omega)\|_2) (\|U(j\omega)\|_2)$$

Surge então uma nova motivação para se decrescer a norma \mathcal{H}_2 do erro da aproximação da função de transferência do sistema. Reduzindo-a, o erro para o sinal de saída no tempo também é minimizado.

3.5 NORMA \mathcal{H}_∞

Na seção 3.4, a norma \mathcal{H}_2 para uma função foi definida. Existe, ainda, outro tipo de norma importante para este estudo: a norma \mathcal{H}_∞ .

Considere os seguintes conjuntos:

- \mathcal{RL}_∞ : Espaço das funções racionais próprias, sem pólos no eixo imaginário com norma definida por $\|f\|_\infty = \max_{\omega} |f(j\omega)|$;
- \mathcal{RH}_∞ : Espaço das funções racionais próprias e estáveis com norma definida por $\|f\|_\infty = \max_{Re(s)>0} |f(s)| = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |f(j\omega)|$.

Repare que estes conjuntos são similares aos \mathcal{RL}_2 e \mathcal{RH}_2 . No entanto, para a definição da norma \mathcal{H}_∞ não se faz necessário definir o produto interno entre dois sinais, o que ocorre na norma \mathcal{H}_2 .

A norma \mathcal{H}_∞ pode ser calculada tanto analiticamente quanto numericamente. Analiticamente, deve-se resolver a equação $\frac{d}{d\omega}(|f(j\omega)|^2) = 0$. Numericamente, pode-se definir um vetor com diversos valores de frequência, calcular $|f(j\omega)|$ para cada elemento deste vetor e escolher o maior valor.

Em termos de gráficos, $\|f\|_\infty$ é o valor do maior raio no diagrama de Nyquist ou igual o valor de pico no diagrama de magnitude de Bode.

Na literatura, a norma \mathcal{H}_∞ é a utilizada para se comparar os modelos. Ou seja, dado dois métodos de redução de ordem, o melhor é escolhido de acordo com sua minimização da norma infinita.

Pode-se relacionar a norma \mathcal{H}_∞ com a norma \mathcal{H}_2 . Para isso, considere o seguinte teorema.

Teorema *Admita um sistema SISO com $G(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ e $U(s) \in \mathcal{RL}_2$. Então,*

$$Y(s) = G(s)U(s) \in \mathcal{RL}_2 \text{ e}$$

$$\|G\|_\infty = \max_{\|U\|_2 \neq 0} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|$$

4 ÍNDICES DE DOMINÂNCIA MODAL

Neste capítulo, são apresentados quatro índices de dominância modal presentes na literatura (AGUIRRE, 1993) (GREEN AND LIMEBEER, 1995) (MARTINS ET AL., 1996) (DA SILVA, 2005). Estes índices procuram quantificar a relevância de cada um dos modos conforme algum critério, permitindo uma ordenação e conseqüente utilização no sistema reduzido.

4.1 PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Estes algoritmos trabalham a partir da decomposição em frações parciais da função de transferência $G(s)$ do sistema. Neste desenvolvimento, pólos múltiplos são desconsiderados.

Suponha então um sistema com nr modos reais e nc modos complexos. Repare que a ordem deste é $n = nr + 2nc$, uma vez que cada modo real é formado pelo pólo real e cada modo complexo é formado pelo par de pólos complexos conjugados. Desta forma,

$$G(s) = \sum_{i=1}^{nr} G_i^r(s) + \sum_{i=1}^{nc} G_i^c(s)$$

em que $G_i^r(s)$ são frações correspondentes a modos reais e $G_i^c(s)$ a modos complexos e seus conjugados.

Analisando $G_i^c(s)$, tem-se

$$G_i^c(s) = \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \frac{\overline{R_i}}{s - \overline{\lambda_i}}$$

$$G_i^c(s) = \frac{(R_i + \overline{R_i})s + (-R_i\overline{\lambda_i} - \overline{R_i}\lambda_i)}{s^2 + (-\lambda_i - \overline{\lambda_i})s + \lambda_i\overline{\lambda_i}}$$

Escreva

$$R_i = a + bj \rightarrow \overline{R_i} = a - bj \text{ e}$$

$$\lambda_i = c + dj \rightarrow \overline{\lambda_i} = c - dj$$

Com isso,

$$G_i^c(s) = \frac{(2a)s + (-2ac - 2bd)}{s^2 + (-2c)s + (c^2 + d^2)}$$

Portanto,

$$G(s) = \sum_{i=1}^{nr} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \sum_{i=1}^{nc} \frac{\alpha_i s + \beta_i}{s^2 - 2Re(\lambda_i)s + |\lambda_i|^2}, \text{ onde} \quad (4.1)$$

$$\alpha_i = 2\text{Re}(R_i) \text{ e } \beta_i = -2(\text{Re}(R_i)\text{Re}(\lambda_i) + \text{Im}(R_i)\text{Im}(\lambda_i))$$

O modelo reduzido $G_r(s)$, de ordem r , com $r < n$, escolhe as parcelas referentes aos modos mais relevantes seguindo algum critério de relevância ou dominância. Desta forma, $E(s) = G(s) - G_r(s) = \sum_{i=1}^{n-r} \tilde{G}_i(s)$ contem as $n - r$ parcelas referentes aos modos considerados menos importantes. Com isso, como limitante superior do erro, estes métodos possuem

$$\|E(s)\|_\infty = \left\| \sum_{i=r+1}^n G_i(s) \right\|_\infty \leq \sum_{i=r+1}^n \|G_i(s)\|_\infty = \sum_{i=1}^{n-r} \|\tilde{G}_i(s)\|_\infty$$

pela desigualdade triangular.

4.2 MÉTODO DO VALOR INICIAL (IDMVI)

Conforme Aguirre (1993), este método consiste em aplicar uma entrada $\delta(t)$ do tipo impulso no sistema, calculando-se o valor inicial da resposta. Tem-se, pelo Teorema do Valor Inicial,

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sU(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)$$

Por (4.1), conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n sG_i(s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{nr} R_i, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Percebe-se que este algoritmo coloca em ordem decrescente os modos de acordo com a sua influência no valor inicial da resposta temporal.

Desta forma,

$$IDMVI_i = \begin{cases} R_i, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ 2\text{Re}(R_i), & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

4.3 MÉTODO DO VALOR FINAL (IDMVF)

Conforme Aguirre (1993), este método consiste em aplicar uma entrada $u(t)$ do tipo degrau no sistema, calculando-se o valor final da resposta. Tem-se, pelo Teorema do Valor Final,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$$

Por (4.1), conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n G_i(s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{nr} -\frac{R_i}{\lambda_i}, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^{nc} \frac{\beta_i}{|\lambda_i|^2}, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Portanto, este algoritmo coloca em ordem decrescente os modos de acordo com a sua influência no valor final da resposta ao degrau.

Desta forma,

$$IDMV F_i = \begin{cases} -\frac{R_i}{\lambda_i}, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \frac{\beta_i}{|\lambda_i|^2}, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

4.4 ÍNDICE DE GREEN (IDMG)

Este é o índice de dominância modal atualmente utilizado na literatura sobre truncamento modal (GREEN AND LIMEBEER, 1995) (MARTINS ET AL., 1996). Baseia-se na desigualdade triangular para as normas. Para modos reais, tem-se

$$\|E(s)\|_\infty = \|G(s) - G_r(s)\|_\infty = \left\| \sum_{i=r+1}^n G_i(s) \right\|_\infty \leq \sum_{i=r+1}^n \|G_i(s)\|_\infty = \sum_{i=r+1}^n \left\| \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right\|_\infty$$

Repare que, para modos reais,

$$\left\| \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{R_i}{j\omega - \lambda_i} \right| = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{|R_i|}{|j\omega - \lambda_i|} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{|R_i|}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_i^2}} = \frac{|R_i|}{|\lambda_i|}$$

Apesar desta igualdade não ser válida para modos complexos, ela é aplicada na literatura igualmente para estes, de modo que

$$IDG_i = \frac{|R_i|}{|Re(\lambda_i)|} \quad \forall \lambda_i$$

4.5 ÍNDICE DA NORMA INFINITA (IDMNI)

Este algoritmo foi proposto por da Silva (2005) como sendo um aperfeiçoamento do IDMG, sendo definido como:

$$IDMNI_i = \begin{cases} \left\| \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right\|_\infty, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \left\| \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \frac{\bar{R}_i}{s - \bar{\lambda}_i} \right\|_\infty, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Percebe-se que, para modo reais, este é idêntico ao IDMG. Já para os modos complexos, possui uma expressão consistente com a própria derivação da desigualdade triangular, sendo um índice menos conservador que o IDMG (DA SILVA, 2005).

4.6 ÍNDICE DA NORMA \mathcal{H}_2 (IDMN2)

Este índice, proposto neste estudo, baseia-se no IDMNI da seção 4.5. Possui a mesma definição com a exceção de que a norma utilizada é a norma \mathcal{H}_2 . Este índice foi utilizado para comparar os IDMs no caso de se estar calculando o erro utilizando a norma \mathcal{H}_2 .

Portanto,

$$IDMN2_i = \begin{cases} \left\| \frac{R_i}{s-\lambda_i} \right\|_2, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \left\| \frac{R_i}{s-\lambda_i} + \frac{\overline{R_i}}{s-\overline{\lambda_i}} \right\|_2, & \text{se } \lambda_i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

4.7 LIMITAÇÕES DOS IDM

É importante salientar que a redução por truncamento modal é um problema combinatório. Isso pode ser demonstrado da seguinte forma.

Considere um sistema com função de transferência $G(s)$ de ordem n supondo que este possua apenas pólos reais. Seja W o conjunto que contenha as n frações parciais de $G(s)$.

Sendo $G_r(s)$ um truncamento modal de ordem r com $r < n - 1$ de $G(s)$, existem $\binom{n}{r}$ possibilidades para $G_r(s)$, onde $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Dentre as escolhas possíveis para $G_r(s)$, existe uma que minimiza $\|G(s) - G_r(s)\|$ composta por um determinado conjunto de r frações parciais. Denote por W_r o conjunto formado por estas frações.

Considere agora um truncamento modal de $G(s)$ de ordem m com $m > r$. De modo análogo, existem $\binom{n}{m}$ possibilidades para $G_m(s)$ e dentre estas existe uma que minimiza $\|G(s) - G_m(s)\|$. Seja W_m o conjunto formado pelas m frações que minimizam esta norma.

Claramente, a afirmação $W_r \subset W_m$ para $r, m < n$ e $m > r$ não é necessariamente verdadeira. Ou seja, o truncamento modal ótimo de ordem m não necessariamente contém os r modos do truncamento modal ótimo de ordem r . Isto torna o problema combinatório para cada ordem de redução.

Uma importante aplicação desta afirmação é que ao estabelecer o ordenamento dos modos por um índice de dominância modal, o problema perde a otimização do erro, uma vez que todo ordenamento modal força que $W_r \subset W_m$.

Para ilustrar o problema, considere um sistema cujas matrizes de sua representação em espaço de estados são

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -12,3 & 0 & 0 \\ 0 & -3,19 & 0 \\ 0 & 0 & -2,9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,93 \\ 0,23 \\ -0,41 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -7,1 & 43,5 & 15,14 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = 0.$$

A função de transferência que representa este sistema pode ser calculada por 2.4, o que resulta em

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

onde

$$G_1(s) = \frac{-0,047}{s + 12,3}, G_2(s) = \frac{0,072}{s + 3,19} \text{ e } G_3(s) = \frac{-0,044}{s + 2,9}.$$

TAB. 4.1: Valores obtidos para todos os sistemas reduzidos possíveis

r	G_{REDi}^r	$\ G - G_{REDi}^r\ _2$	G_{RED}^r Ótimo	Índices Ótimos	$IDM_1 = \{1, 2, 3\}$	$IDM_2 = \{2, 3, 1\}$
1	$G_1(s)$	1,75	$G_1(s)$	$W_1 = \{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
	$G_2(s)$	3,66				
	$G_3(s)$	3,28				
2	$G_1(s) + G_2(s)$	2,49	$G_2(s) + G_3(s)$	$W_2 = \{2, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$
	$G_1(s) + G_3(s)$	4,23				
	$G_2(s) + G_3(s)$	1,34				
3	$G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$	0	$G(s)$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3, 1\}$

Foram então calculadas todas as reduções possíveis para cada ordem de aproximação. A Tabela 4.1 mostra os resultados obtidos. Os erros das normas foram calculados baseados na norma \mathcal{H}_2 . Veja que dois IDMs foram utilizados como exemplos. O primeiro utiliza a ordenação $\{1, 2, 3\}$ e o segundo a ordenação $\{2, 3, 1\}$.

Para $r = 1$, a redução que apresentou o menor erro foi a referente a $G_1(s)$. Note que o IDM_1 escolhe de fato o índice 1, que gera o erro mínimo de 1,75, enquanto que o IDM_2 escolhe o índice 2, que gera um erro de 3,66.

Já para $r = 2$, a escolha que gera a menor norma do erro é a referente a $G_2(s) + G_3(s)$. Note que o IDM_1 escolhe neste caso os índices $\{1, 2\}$, que gera um erro de 2,49. No entanto, este não é mais o erro mínimo. O IDM_2 que escolhe o menor erro de 1,34 por selecionar os índices $\{2, 3\}$.

Observe que, a partir da redução de primeira ordem, o IDM_1 escolhe obrigatoriamente o índice 1 nas reduções subsequentes. Isto evidencia a limitação dos IDMs, uma vez que neste caso $W_1 \not\subset W_2$.

Por fim, note que para $r = 3$ só existe a escolha das frações $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$. Com isso, $G_{RED}^3(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) = G(s)$ e o erro da redução é igual a zero para todos os IDMs.

5 IDM PROPOSTO

5.1 PREMISSAS DO PROBLEMA

Antes de apresentar de fato o IDM proposto, faz-se necessário enunciar as hipóteses simplificadoras do estudo, ou melhor, das limitações do problema e do algoritmo. São elas:

- Os pólos do sistema são estáveis;
- A matriz de transmissão direta do sistema é igual a zero ($D = 0$), o que caracteriza um sistema estritamente próprio;
- Trata-se de um sistema SISO.

Estas limitações podem ser contornadas. Caso o sistema possua pólos instáveis, basta retirá-los do sistema a ser reduzido e aplicar a redução no sistema estável. Ao final, adicionam-se ao modelo reduzido os pólos retirados, juntamente com seus resíduos.

Caso $D \neq 0$, basta considerá-lo igual a zero e aplicar o algoritmo. Ao final, adiciona-se D à aproximação da função de transferência.

Por fim, a terceira limitação está atrelada a sistemas que são representados por uma matriz de funções de transferência. A extensão multivariável do sistema não foi estudada, não fazendo parte do escopo deste trabalho.

5.2 FORWARD RECURSIVE MINIMUM ERROR (FRME)

Este algoritmo funciona da seguinte forma:

- A função de transferência do sistema é decomposta como soma de suas frações parciais, ou seja, $G(s) = G_1(s) + \dots + G_n(s)$;
- Na primeira iteração, calcula-se o erro da aproximação utilizando apenas uma das funções $G_i(s)$ para $1 \leq i \leq n$ e escolhe-se o índice i que minimiza $\|G(s) - G_i(s)\|_p$ em alguma norma p ;
- Na segunda iteração, dado o índice escolhido i da primeira iteração, calcula-se o erro da aproximação utilizando as funções $G_i(s) + G_q(s)$ para $1 \leq q \leq n$ e $q \neq i$ e escolhe-se o índice q que minimiza $\|(G(s) - G_i(s)) - G_q(s)\|_p$;

- Este processo iterativo se repete até serem escolhidas todas as frações parciais.

Observe que ao final deste método, é obtido uma ordenação dos índices, sendo que o modo mais relevante é aquele escolhido na primeira iteração e o modo menos relevante aquele escolhido na última. Este método é, portanto, um método de ordenação modal.

A Figura 5.1 exemplifica o algoritmo para um caso simples de o sistema possuir apenas três modos, ou seja, $G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$. Na realidade, para a simplificação da explicação, representaram-se vetores no espaço euclidiano de tal forma que $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3$, onde a norma do erro é definida pelo tamanho do vetor correspondente.

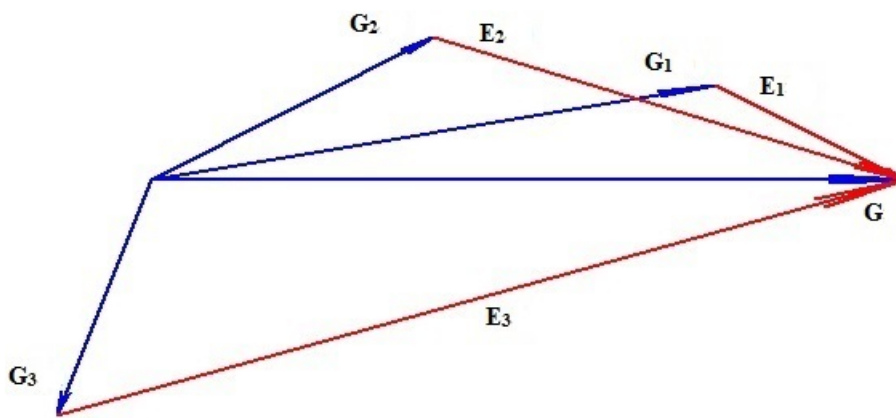


FIG. 5.1: Exemplo FRME - 1ª iteração

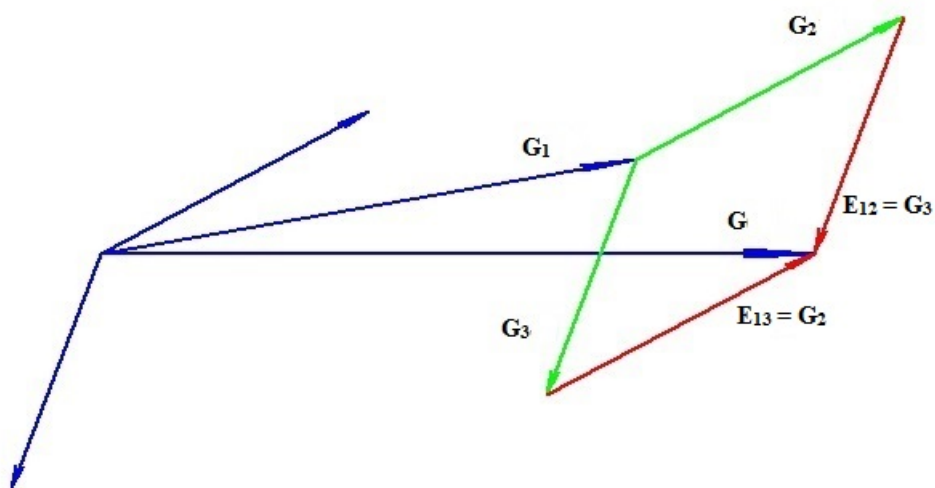


FIG. 5.2: Exemplo FRME - 2ª iteração

Repare que na primeira iteração os erros \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 e \mathbf{E}_3 são calculados, onde $\mathbf{E}_i = \mathbf{G} - \mathbf{G}_i$ para $i = 1, 2, 3$. Pela Figura 5.1, observa-se que o menor erro de redução é o do modo representado pelo vetor \mathbf{G}_1 , uma vez que o módulo do vetor \mathbf{E}_1 é a menor dentre os \mathbf{E}_i para $i = 1, 2, 3$. Este vetor, ou melhor, este índice, é o escolhido da primeira iteração.

Na segunda iteração, conforme a Figura 5.2, são calculados os erros referente à $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$, representado por \mathbf{E}_{12} , e à $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3$, representado por \mathbf{E}_{13} , e o segundo índice é escolhido baseado na minimização do erro para uma aproximação de segunda ordem.

Veja que dado uma condição inicial, este método escolhe dentre os modos possíveis o melhor em termos de redução de erro. Por exemplo, se fosse necessário manter um modo i qualquer do sistema e se quisesse escolher uma aproximação de segunda ordem, o segundo modo a ser obtido seria aquele que de fato resultasse no menor erro, o que não necessariamente o ocorre com os outros métodos de redução modal. Com efeito, de acordo com a maneira que este método foi definido, ele calcularia todos os erros da aproximação de segunda ordem com o modo i fixo e escolheria o menor.

No entanto, este algoritmo nem sempre faz a melhor escolha para a redução do erro para todas as possíveis ordens de redução. Para melhor entendimento, considere a Figura 5.3 e a Figura 5.4.

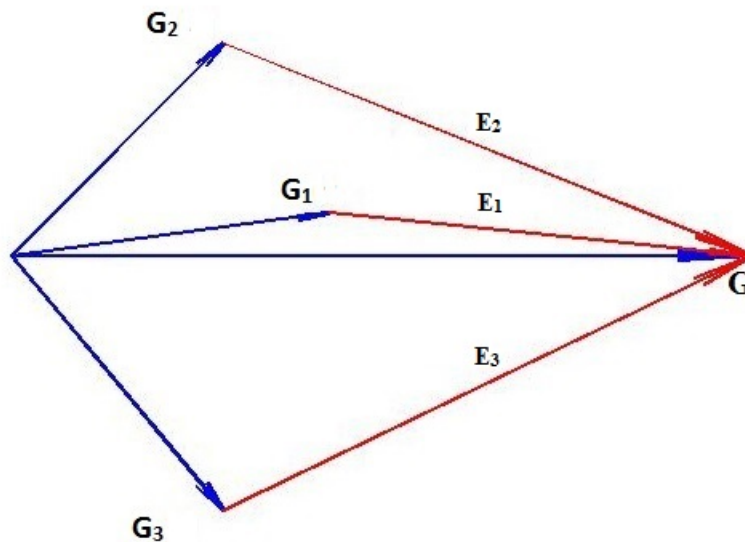


FIG. 5.3: Limitação - 1ª iteração

Neste caso, tem-se que $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3$. Na primeira iteração, o método proposto escolheria o índice 1, pois o erro \mathbf{E}_1 é o menor dentre os possíveis, o que pode ser verificado pela Figura 5.3.

Já na segunda iteração, o modo 1 já foi escolhido e o modo a ser selecionado é o modo 2 ou o modo 3. No entanto, a Figura 5.4 mostra que o erro referente à escolha de $\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3$ é menor que o erro referente às escolhas $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$ ou $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3$. Portanto, nesta iteração, apesar de o índice escolhido ser aquele que vai minimizar o erro dado a escolha do modo 1, a função de segunda ordem escolhida não é aquela que produz o menor erro dado todos os modos possíveis.

Todavia, esta não é uma limitação apenas deste algoritmo, mas inerente a todos os métodos de ordenação modal. A única maneira de contornar este problema seria calcular de fato todas as possibilidades em todas as iterações e escolher a menor. No entanto, repare que isto se tornaria um método combinatório, extremamente custoso computacionalmente e impraticável para sistemas de grandes porte, conforme abordado na seção 4.7. Por fim, observe que este algoritmo proposto possui um custo computacional maior que os outros métodos de ordenação modal presentes na literatura.

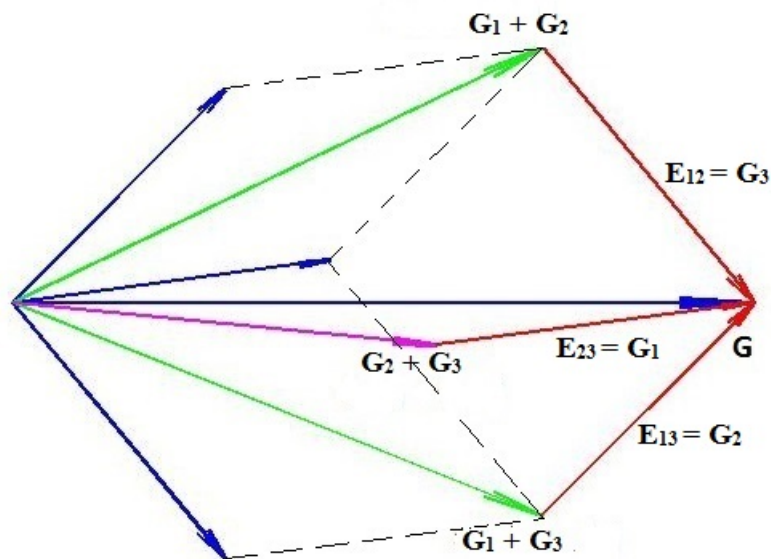


FIG. 5.4: Limitação - 2ª iteração

Em termos de um algoritmo formal, tem-se:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s);$$

$$Gred_1(s) = 0;$$

$$J = zeros(n);$$

Para i variando de 1 a n

Para k variando de 1 até n

Se $k \notin J$ calcular $\|G(s) - Gred_i(s) - G_k(s)\|_x$;

Escolher j que minimiza $\|G(s) - Gred_i(s) - Gred_j(s)\|_x$;

$$J(i) = j;$$

$$Gred_i(s) = Gred_i(s) + G_j(s);$$

Retornar J ;

5.3 BACKWARD RECURSIVE MINIMUM ERROR (BRME)

Este método funciona da mesma forma que o Forward Recursive Minimum Error, só que ele começa da função de transferência do sistema e, a cada iteração, retira a fração parcial menos relevante. A Figura 5.5 ajuda a entender o processo para o caso simples em que $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3$.

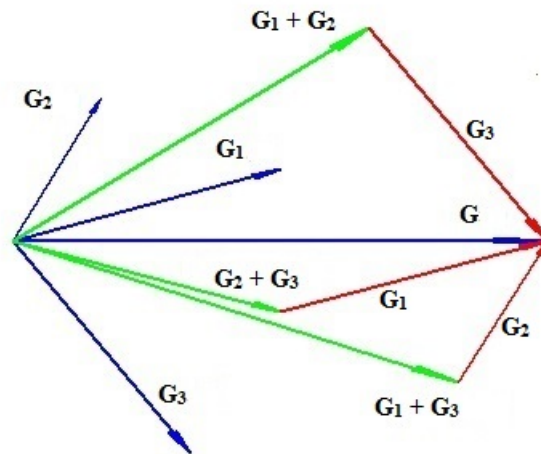


FIG. 5.5: Exemplo BRME - 1ª iteração

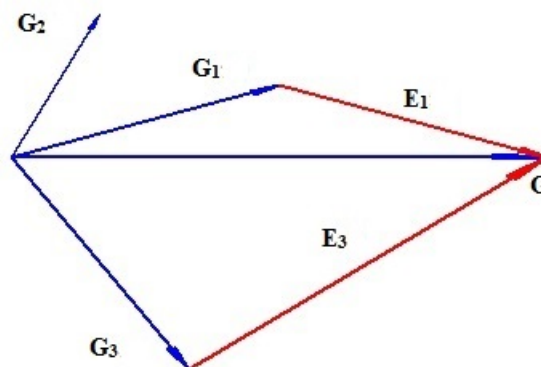


FIG. 5.6: Exemplo BRME - 2ª iteração

Veja que na primeira iteração, retiram-se as componentes \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 e \mathbf{G}_3 ficando com as funções $\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3$, $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3$ e $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$, respectivamente. Para cada uma dessas funções calcula-se o erro da aproximação, representados na Figura 5.5 pelo módulos das setas vermelhas, que neste caso equivalem a $\|\mathbf{G}_1\|$, $\|\mathbf{G}_2\|$ e $\|\mathbf{G}_3\|$. Observe que o que apresenta o menor erro é o referente à função $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3$. Portanto, na primeira iteração, retira-se o modo 2, ou seja, o índice 2 é o escolhido como o menos relevante.

Na segunda iteração, conforme a Figura 5.6, deve-se eliminar um dos modos referentes a \mathbf{G}_1 ou a \mathbf{G}_3 . Neste caso, $\|\mathbf{E}_1\| = \|\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2\|$ e $\|\mathbf{E}_3\| = \|\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3\|$. Pode-se perceber que a menor norma é a de \mathbf{E}_3 . Portanto, a ordenação dos índices resultantes da aplicação deste algoritmo para o caso exemplificado seria $\{1,3,2\}$.

Em termos de um algoritmo formal, tem-se:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s);$$

$$Gred_1(s) = G(s);$$

$$J = zeros(n);$$

Para i variando de 1 a n

Para k variando de 1 até n

Se $k \notin J$ calcular $\|G(s) - Gred_i(s) - G_k(s)\|_x$;

Escolher j que minimiza $\|G(s) - Gred_i(s) - Gred_j(s)\|_x$;

$$J(i) = j;$$

$$Gred_i(s) = Gred_i(s) - G_j(s);$$

Retornar J;

6 RESULTADOS

Para avaliar o algoritmo proposto quatro tipos de simulações foram realizadas. Todas utilizando o programa Matlab[®]. São estas:

- Sistema randômico com 30 estados e 20 modos;
- Média de 100 sistemas randômicos com 20 modos;
- Média de 10 sistemas gerados a partir do sistema New England;
- Sistema randômico com 300 estados e 230 modos.

As legendas utilizadas são intuitivas. No entanto, cabe ressaltar que *mninf* representa o IDMNI da seção 4.5 enquanto que *mn2* representa o IDMN2 da seção 4.6.

6.1 SISTEMA RANDÔMICO COM 30 ESTADOS E 20 MODOS

Nesta simulação, um sistema randômico com 30 estados e 20 modos foi gerado. Foram então calculados os resultados dos erros $\|G(s) - G_r(s)\|_2$ e $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty$ com r variando de 1 até 20, ou seja, utilizando todas as ordens de aproximação possíveis. Estes erros foram calculados para os principais índices de dominância modal da literatura. Além disso, no caso da norma \mathcal{H}_2 , este erro também foi calculado utilizando um índice combinatório, que calcula G_r ótimo para cada ordem de redução r .

Inicialmente, observa-se na Figura 6.1 que a norma \mathcal{H}_2 foi a utilizada para calcular o erro e este está em dB. Nota-se ainda que o índice combinatório é representado pela legenda *me2_p* de cor azul clara e que de fato ele apresenta o menor erro para cada uma das quantidades de modos do sistema reduzido. No entanto, a sua aplicabilidade foi possível devido à baixa ordem do sistema.

Observa-se o FRME apresentou os menores erros nas primeiras ordens de aproximação, o que é condizente com a sua definição, uma vez que nas iterações iniciais existe uma quantidade de pólos maiores para serem escolhidos, que vão se reduzindo a cada iteração. Este erro chega a ser o menor possível para uma ordem de aproximação de até seis, de acordo com o índice combinatório.

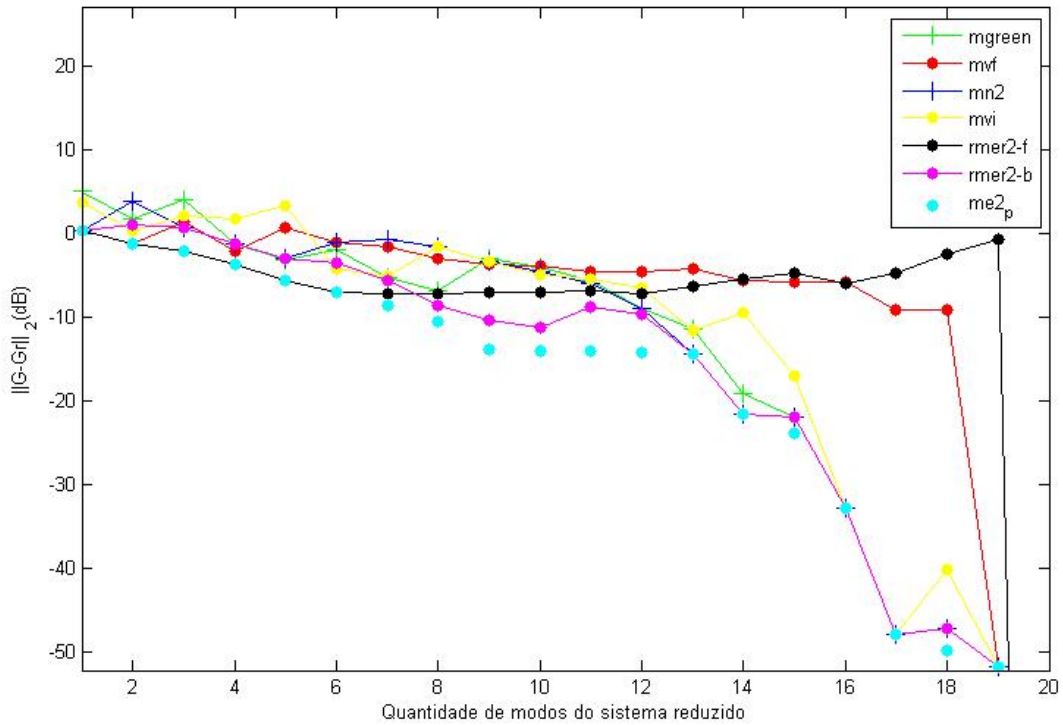


FIG. 6.1: Erros da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_2 para um sistema com 20 modos

Por outro lado, note que o BRME apresentou os menores erros para valores maiores de modo do sistema reduzido, o que também é de acordo com a sua definição, uma vez que ele parte da função de transferência inicial.

Nesta simulação, os erros apresentados para o FRME foram os menores dentre os índices de dominância modal para uma ordem de aproximação de até sete e o BRME apresentou os menores erros nas ordens restantes, ou seja, de oito a 20. No final, para um sistema reduzido de 20 modos, todos os algoritmos apresentam erro zero, uma vez que todos os pólos do sistema são escolhidos e a aproximação acaba sendo a própria função de transferência do sistema.

É interessante notar que a magnitude dos erros está em dB para estas aproximações. Para poder estudá-las melhor o erro foi normalizado, ou seja, a norma do erro foi dividida pela norma do sistema original e então calculado o seu equivalente em dB. A Figura 6.2 mostra os resultados obtidos. Note que como $20\log\left(\frac{\|G(s)-G_r(s)\|}{\|G(s)\|}\right) = 20\log(\|G(s) - G_r(s)\|) - 20\log(\|G(s)\|)$, este gráfico possui a forma do da Figura 6.1 só que deslocado para baixo de acordo com a norma do sistema em dB. Neste caso, $\|G(s)\|_2 = 5,4434$ dB.

Veja que para ordem de cinco, o FRME apresenta um erro normalizado de aproximadamente -10 dB, que corresponde a um erro de 32,62% em termos da norma do sistema

original.

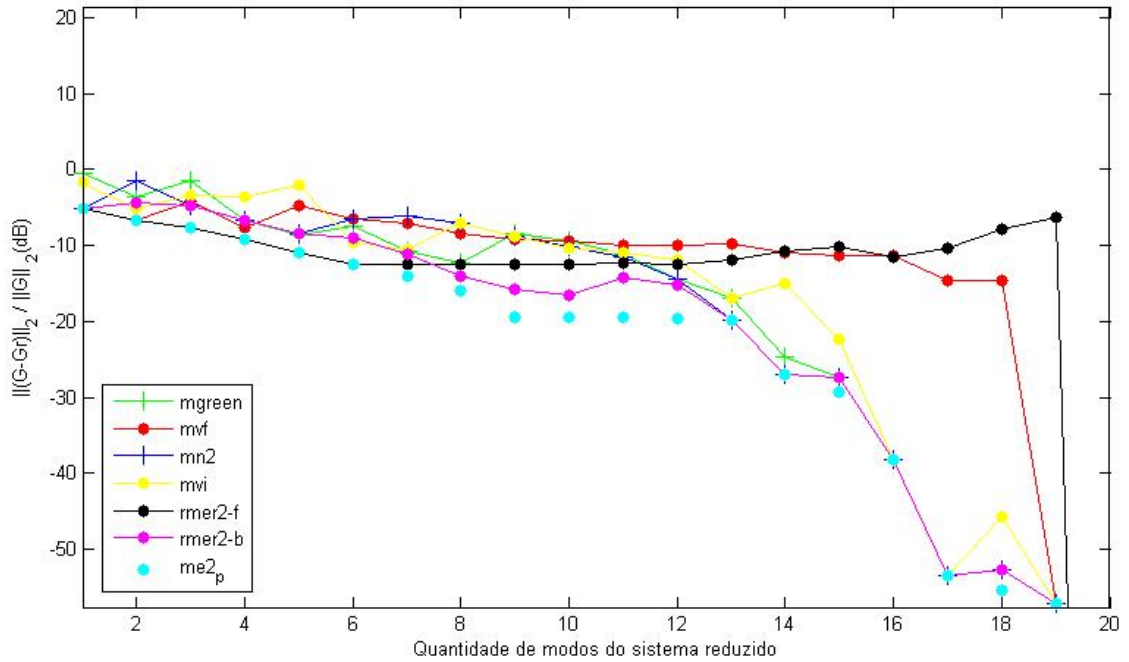


FIG. 6.2: Erros normalizados da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_2 para um sistema com 20 modos

Estes gráficos também foram gerados para o caso da norma \mathcal{H}_∞ . A Figura 6.3 e a Figura 6.4 mostram os resultados obtidos. Note que estes resultados são parecidos, com os erros da norma infinita sendo um pouco maiores que os da norma-2. Veja que neste caso o índice combinatório não foi gerado e que com a exceção da ordem de aproximação igual a sete os melhores resultados são referentes ao FRME ou ao BRME.

Observe ainda pela Figura 6.4 que $\|G(s)\|_\infty = 10,4486$ dB e que o BRME, para uma aproximação de ordem oito, apresenta um erro normalizado de aproximadamente -10 dB, que corresponde a um erro de 32,62% em termos da norma do sistema original.

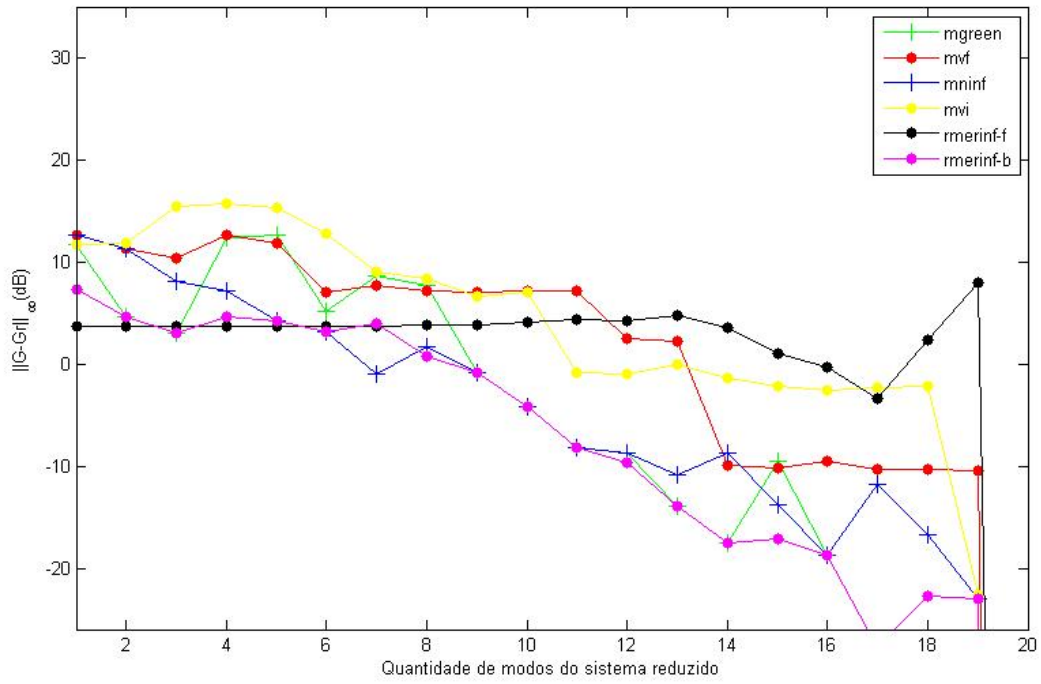


FIG. 6.3: Erros da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para um sistema com 20 modos

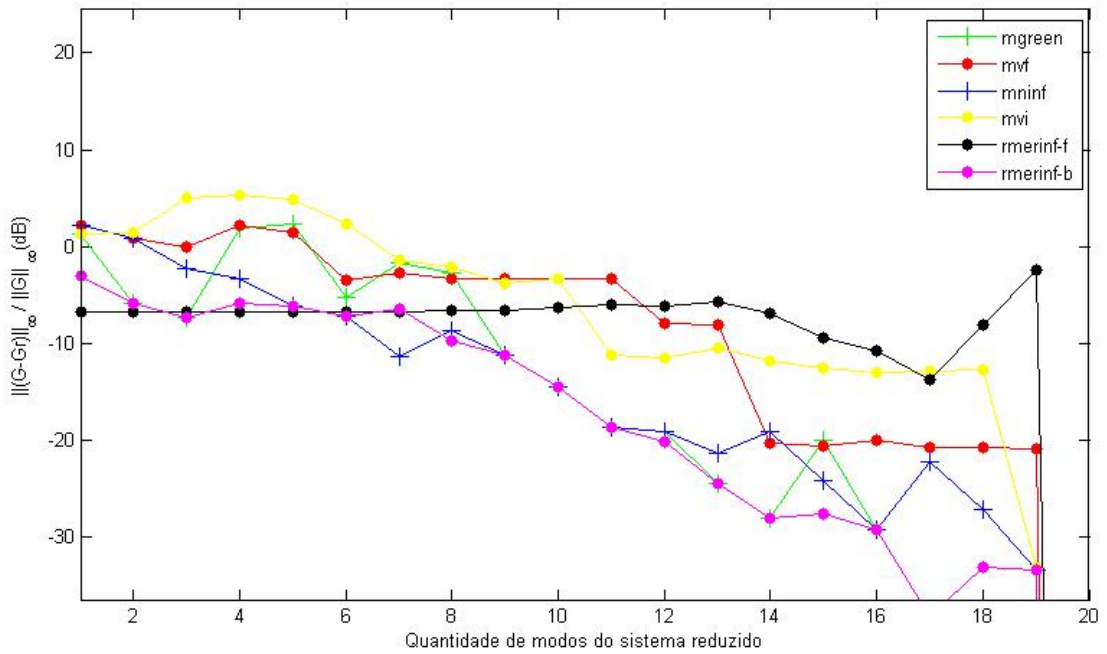


FIG. 6.4: Erros normalizados da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para um sistema com 20 modos

6.2 MÉDIA DE 100 SISTEMAS RANDÔMICOS COM 20 MODOS

Nestas simulação, 100 sistemas foram gerados randomicamente. Após, os erros da aproximação foram calculados para cada um destes. Esta metodologia de avaliação é comumente utilizada na literatura para testar a eficiência de métodos de redução. Por fim, a média destes erros foi contabilizada para cada método. A Figura 6.5 mostra a média da norma \mathcal{H}_2 dos erros para os métodos utilizados nesta simulação.

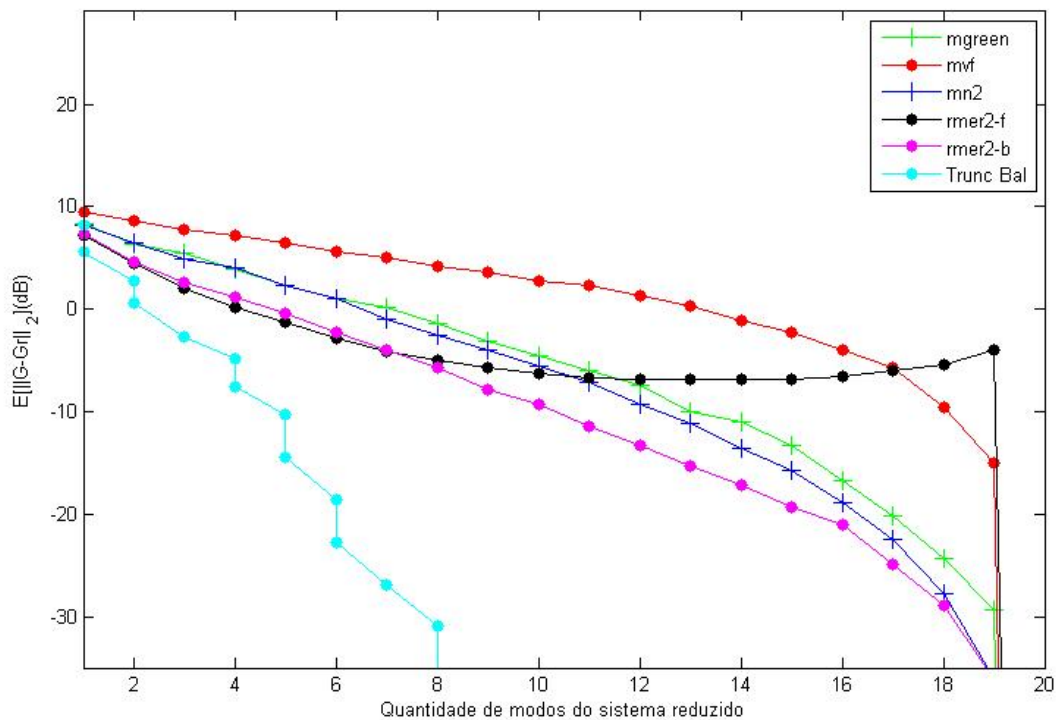


FIG. 6.5: Média dos erros da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_2 para a média de 100 sistemas com 20 modos

Repare que como a média foi tirada, o erro, à medida em que se aumenta o número de modos, tende a ser decrescente. Note ainda a presença da legenda Trunc Bal, referente ao método do truncamento balanceado. Observe ainda na Figura 6.5 que, dependendo da quantidade de modos, existe mais de um erro calculado. Isso ocorre porque este método foi aplicado utilizando a função do Matlab[®] *balancmr*, e nesta função não se controla o número de modos da redução, só o de estados. A cada iteração do estudo o número de estados pedidos foi aumentando de um em um, começando em um e terminando em 20. Por isso, algumas aproximações tiveram o mesmo número de modos. No entanto, pode-se observar ainda assim que os erros apresentados por este método tendem a ser menores que os métodos de dominância modal. Esta discrepância aumenta com o número de modos

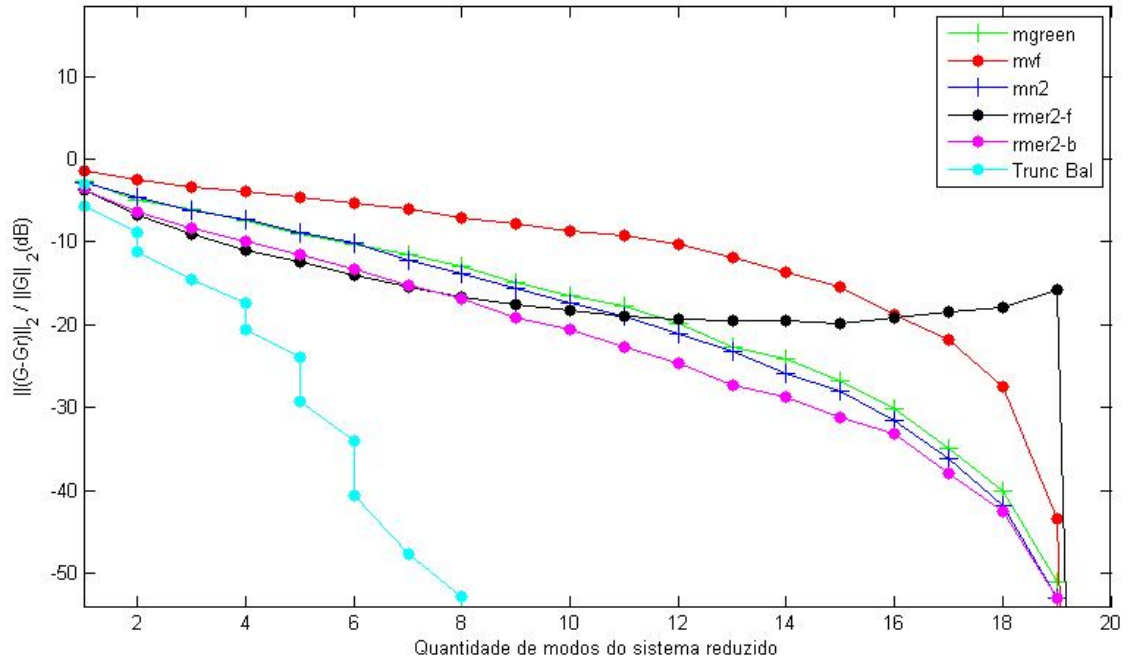


FIG. 6.6: Média dos erros normalizados da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_2 para a média de 100 sistemas com 20 modos

da aproximação.

Note pela Figura 6.6 que o FRME apresenta um erro normalizado de aproximadamente -15 dB para oito modos, que corresponde a um erro de 17,78%.

Este estudo também foi realizado analisando a norma \mathcal{H}_∞ . A Figura 6.7 e a Figura 6.8 mostram o que foi obtido. Note a semelhança com os resultados da norma \mathcal{H}_2 .

A Figura 6.7 evidencia que o BRME obteve aproximadamente o menor erro dentre todos os métodos modais para todos os modos possíveis. O FRME também apresentou bons resultados, atingindo rapidamente um baixo erro de redução, até menor que o BMRE, estabilizando em um patamar de erro. Por fim, de acordo com a Figura 6.8, conclui-se que o BRME apresenta um erro normalizado para 12 modos de aproximadamente de -30 dB, que corresponde a um erro de 3,16 %.

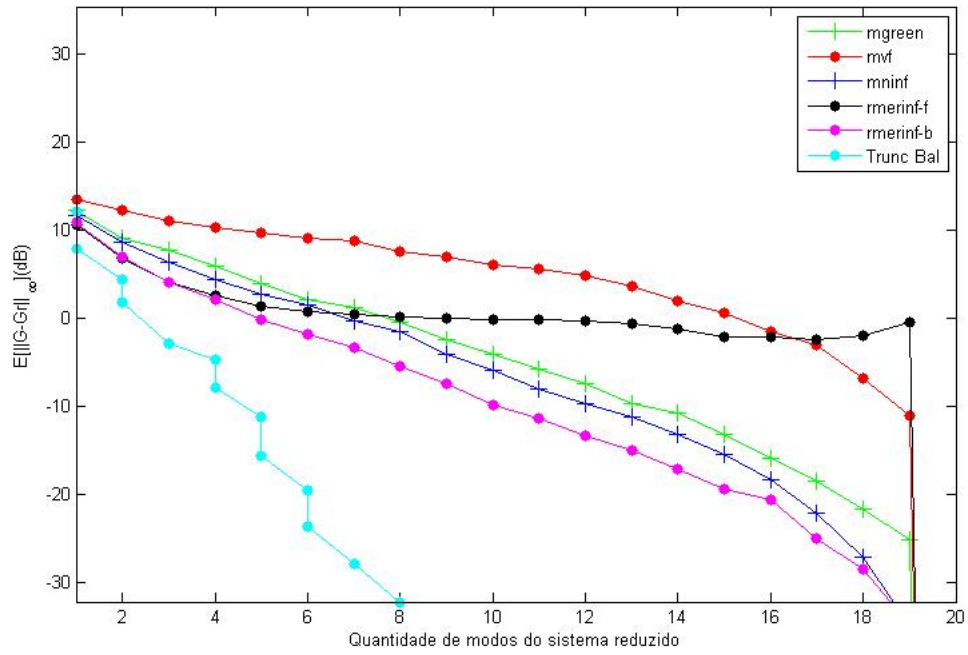


FIG. 6.7: Média dos erros da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para a média de 100 sistemas com 20 modos

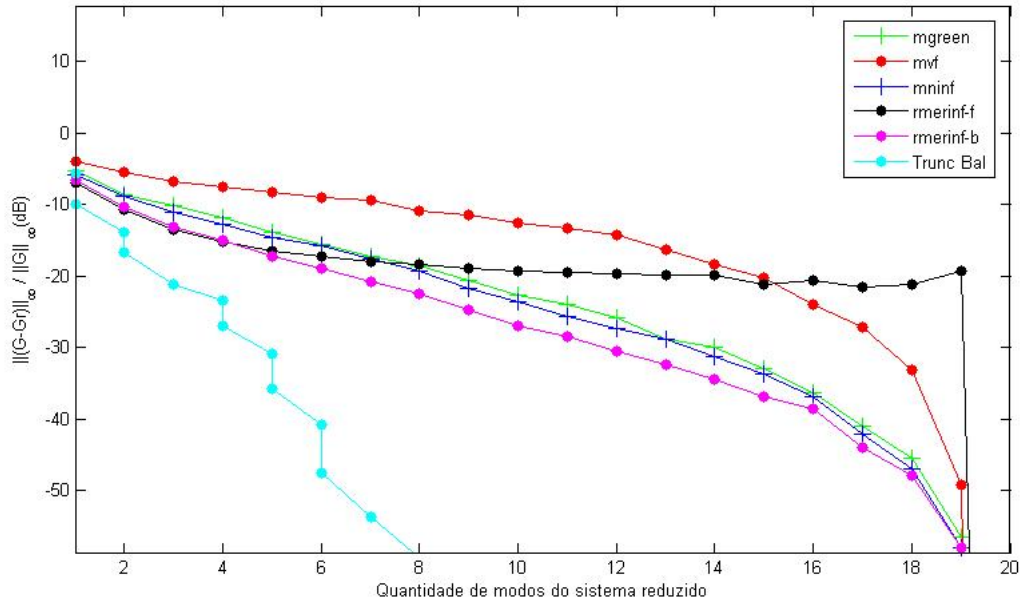


FIG. 6.8: Média dos erros normalizados da aproximação utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para a média de 100 sistemas com 20 modos

6.3 MÉDIA DE 10 SISTEMAS GERADOS A PARTIR DO SISTEMA NEW ENGLAND

O sistema New England é considerado um sistema *benchmark* por ser bastante utilizado na literatura para se estudar desempenhos de técnicas aplicadas a sistemas de potência, sendo aqui utilizado para prover sistemas teste para o IDM proposto. Este sistema possui as seguintes características:

- 10 geradores;
- 39 barramentos;
- 46 linhas de transmissão;
- 66 variáveis de estados;
- 47 modos.

A Figura 6.9 mostra o seu diagrama unifilar para melhor compreensão do sistema. O modelo linear invariante no tempo deste é dado por uma matriz de estados \mathbf{A} . Normalmente é implementado em *software* de análise a pequenas perturbações, onde o usuário, a partir de uma lista variáveis de saída $[y]$ e de uma lista de variáveis de entrada $[u]$, escolhe um conjunto $\{y, u\}$ de interesse e o *software* gera matrizes \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} que estabeleçam a relação $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$, onde $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$.

Uma vez que se desejava gerar um conjunto de sistemas SISO para que o desempenho da algoritmo proposto pudesse ser verificado por meio da média dos erros de redução ($\|G - G_r\|$), a relação entre a entrada e a saída escolhida foi a variação da potência mecânica dos geradores (ΔP_{imec}) e as suas respectivas variações de velocidade angular ($\Delta\omega_i$). Uma vez que a função de transferência $G_i(s) = \frac{\Delta\omega_i(s)}{\Delta P_{imec}}$, onde $i = 1, 2, \dots, 10$, contém parcela relevante da dinâmica eletromecânica, analisá-la é mais importante do ponto de vista de sistemas de potência. Como são 10 geradores, 10 funções de transferência foram geradas. Cada uma destas foi reduzida.

Cabe ressaltar o fato de que o New England possui um modo relacionado a um pólo real instável. Para aplicar o algoritmo, se fez necessário eliminá-lo do sistema. Para tal, a matriz de estados \mathbf{A} foi diagonalizada e os elementos respectivos das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} de sua representação em espaços de estados foram eliminados. Com isso, restaram 65 variáveis de estados e 46 modos. Portanto, permaneceram 19 pares de pólos complexos conjugados e 27 pólos reais. Ao final, o pólo retirado foi adicionado à função de aproximação e o erro foi então calculado.

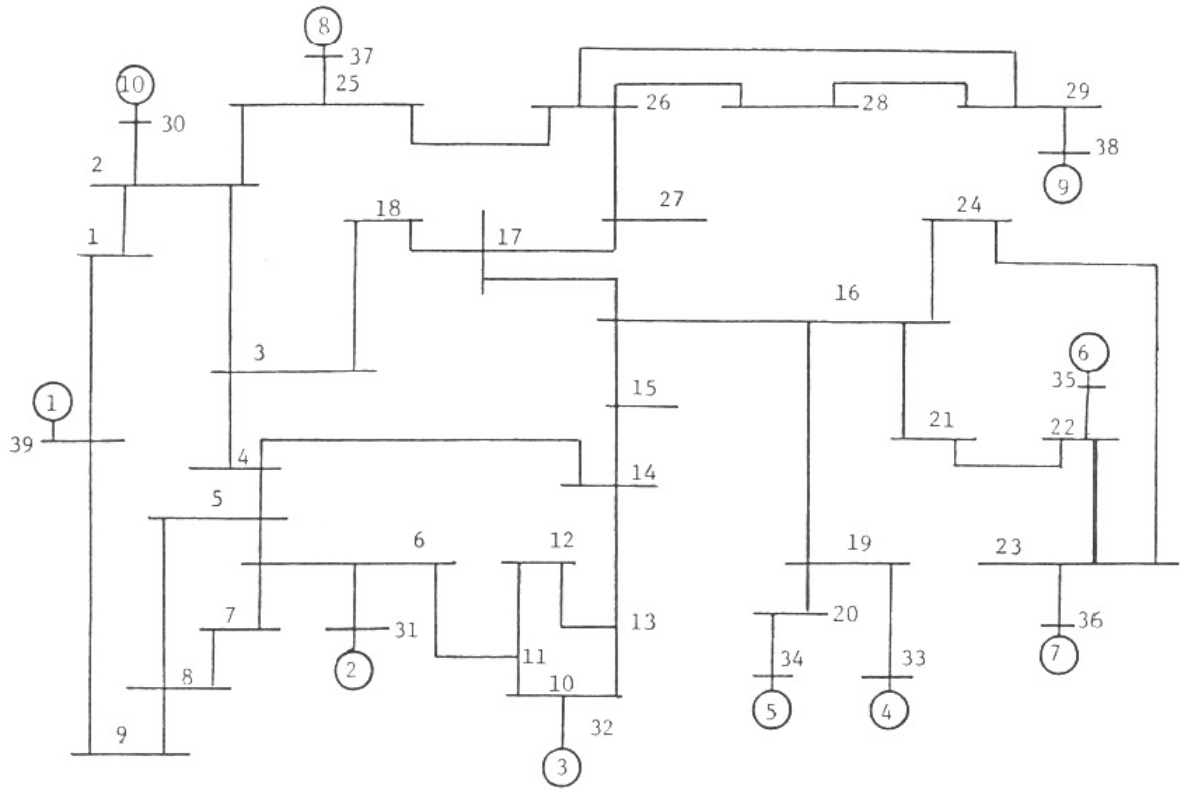


FIG. 6.9: Sistema New England (ATHAY ET AL., 1979)

Inicialmente, os cálculos foram realizados utilizando a norma \mathcal{H}_2 . A Figura 6.10 mostra os erros normalizados encontrados. Observe que o FRME inicia, dentre os métodos de redução modal, com o menor erro e, a partir de doze modos, o método que aproxima melhor passa a ser o BRME. Note que para uma aproximação de ordem 9 tanto o FRME e o BRME resultam em um erro normalizado de aproximadamente de -40 dB, que equivale a 1%.

Em seguida, aplicando a mesma metodologia, os valores foram computados segundo a norma \mathcal{H}_∞ . A Figura 6.11 mostra o valor da norma \mathcal{H}_∞ dos erros. Dentre os métodos de redução, o BRME apresentou o menor para todas as quantidades de modos de redução possíveis, com exceção da de oito modos, em que o FRME obteve o menor erro. Note que para uma ordem de redução igual a cinco, tanto o FRME quanto o BRME possuem um erro de aproximadamente -30 dB, que equivale a 3,16%.

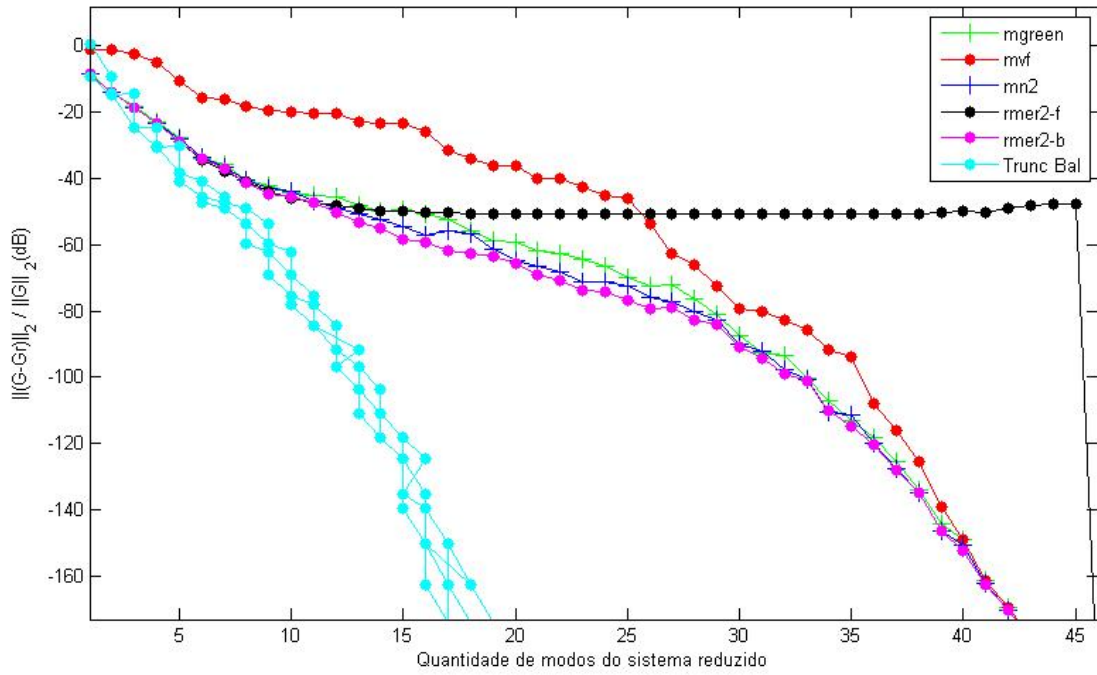


FIG. 6.10: Média dos erros normalizados utilizando a norma \mathcal{H}_2 para a média de 10 casos gerados a partir do sistema New England

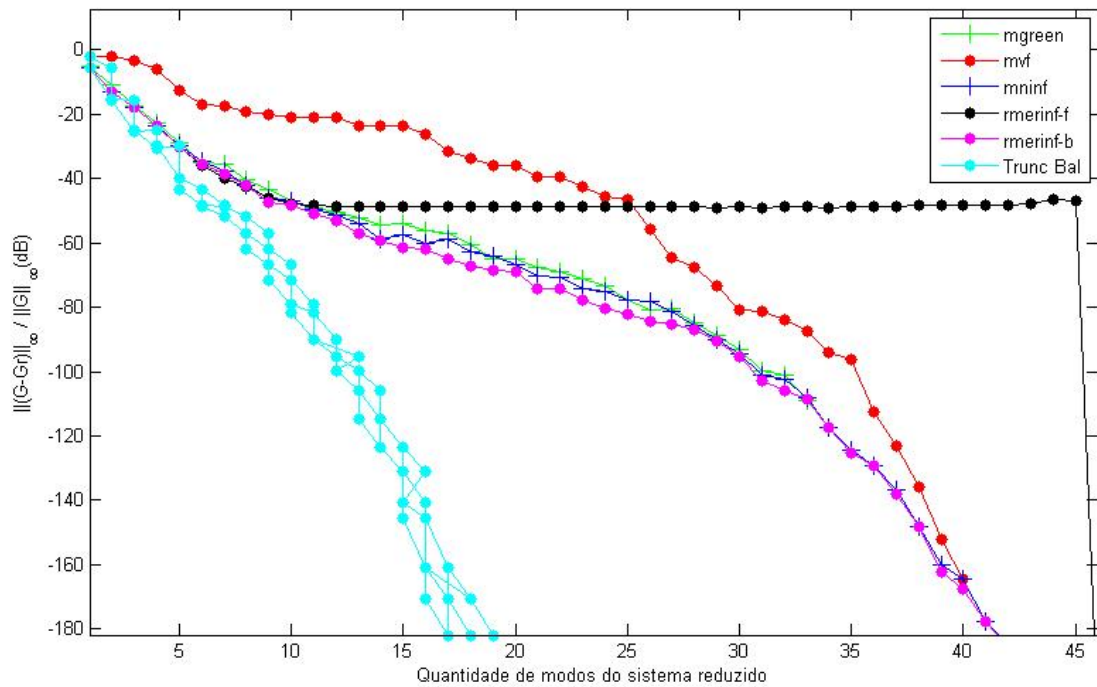


FIG. 6.11: Média dos erros normalizados utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para a média de 10 casos gerados a partir do sistema New England

6.4 SISTEMA RANDÔMICO COM 300 ESTADOS E 230 MODOS

A última simulação realizada neste estudo foi a análise de um sistema randômico com 300 estados e 230 modos. A Figura 6.12 exibe os erros normalizados calculados a partir da norma \mathcal{H}_2 .

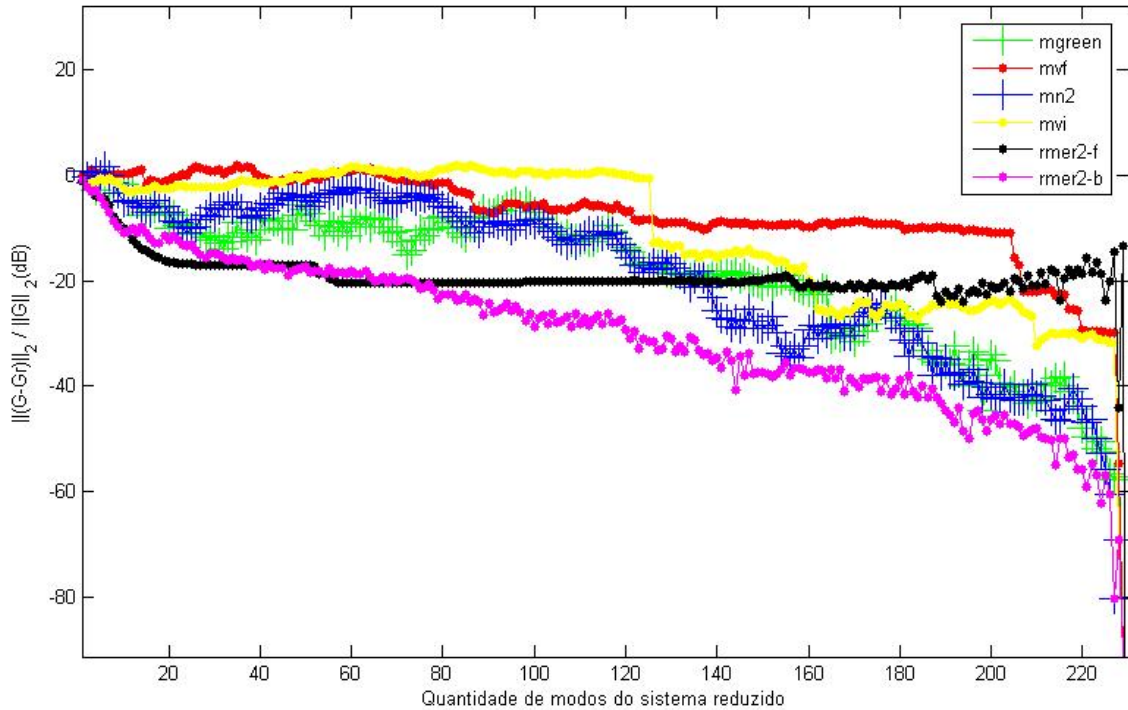


FIG. 6.12: Erros normalizados utilizando a norma \mathcal{H}_2 para a um sistema com 300 estados e 230 modos

Nota-se que o FRME apresentou os melhores resultados para as ordens de redução até 35, aproximadamente. A partir desta ordem, o BRME é o que possui o menor dos erros até a ordem de redução com 230 modos, com exceção do intervalo aproximado de 60 a 75 modos, onde o FRME exibe o melhor resultado.

A norma \mathcal{H}_2 do sistema gerado foi de $\|G(s)\|_2 = 18,4989$ dB e para uma ordem de redução igual a 20 o FRME apresentou um erro de aproximadamente -18 dB, que equivale a 12,59%.

Esta simulação também foi realizada utilizando a norma \mathcal{H}_∞ . A Figura 6.13 mostra o que foi obtido.

Os resultados utilizando a norma \mathcal{H}_∞ não foram tão bons quanto os utilizado a norma \mathcal{H}_2 para o FRME, que atingiu um patamar de erro logo nas primeiras ordens de redução. No entanto, o BRME apresentou os melhores resultados para todas as ordens

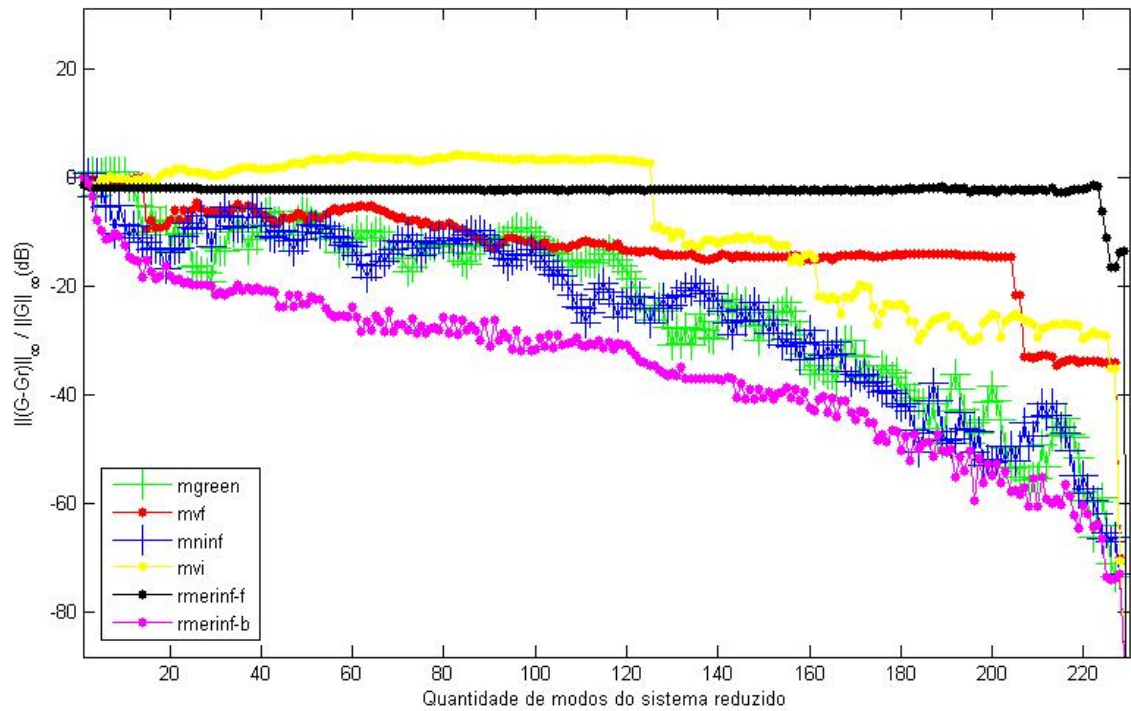


FIG. 6.13: Erros normalizados utilizando a norma \mathcal{H}_∞ para a um sistema com 300 estados e 230 modos

de aproximação. A norma \mathcal{H}_∞ do sistema gerado foi de $\|G(s)\|_\infty = 24,0573$ dB e para uma ordem de redução igual a 20 o BRME apresentou um erro de aproximadamente -20 dB, que equivale a 10%.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo principal a proposição de um novo índice de dominância modal para a redução de ordem de sistemas dinâmicos. Foram propostos dois índices modais, o Forward Recursive Minimum Error e Backward Recursive Minimum Error, que são índices gerados a partir de cálculos recursivos.

Quatro tipos de simulações realizadas: sistema randômico com 30 estados e 20 modos, média de 100 sistemas randômicos com 20 modos, média de 10 sistemas gerados a partir do sistema de potência New England e sistema randômico com 300 estados e 230 modos.

Pelos resultados, pode-se inferir que tanto o Forward Recursive Minimum Error quanto o Backward Recursive Minimum Error apresentaram um desempenho superior ao dos outros IDMs. Cabe ressaltar que tanto o FMRE quanto o BRME são IDMs ótimos dada uma condição inicial.

O índice referente ao FRME apresentou bons resultados, sendo o mais indicado quando se deseja uma baixa ordem de redução. Dependendo do tipo de aplicação e da ordem de aproximação desejada este IDM pode ser considerado o mais indicado para a redução. Por exemplo, para a simulação da seção 6.4, no caso da norma \mathcal{H}_2 , este algoritmo exibiu um erro de 12,59% para uma ordem de redução de 20, em um sistema com 230 modos. Resultado superior ao dos outros IDMs analisados.

O BRME, por sua vez, é o mais indicado quando se deseja um erro limite, ainda que tenha ordem de redução mais elevada. Ocorreram inclusive simulações nas quais este IDM obteve o menor erro para todas as ordens de aproximações dentre os outros IDMs. No caso, por exemplo, da simulação da seção 6.3, utilizando a norma \mathcal{H}_∞ , este algoritmo exibiu um erro de 3,16% para um ordem de redução igual a 5, em um sistema com 46 modos.

Como sugestão para trabalhos futuros, tem-se a análise da redução no domínio do tempo, utilizando como função de entrada, o degrau ou o impulso, mas estas podem variar de acordo com o objetivo do estudo. Sugere-se ainda o desenvolvimento de uma implementação otimizada em termos computacionais para o cálculo do norma \mathcal{H}_2 , utilizando o produto interno. Por fim, testar os IDMs propostos em grandes sistemas de potência, como o SEP brasileiro.

Portanto, os modelos calculados por meio dos novos IDMs propostos podem fornecer informações relevantes do sistema original e serem usados em um projeto de controle

eficiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguirre, L. A. (1993). Quantitative measure of modal dominance for continuous systems. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2405–2410.
- Alencar, J. (2003). Controle robusto \mathcal{H}_∞ aplicado em motores de indução. "Dissertação de Mestrado". Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Antoulas, A., Ionutiu, R., Martins, N., ter Maten, E., Mohaghegh, K., Pulch, R., Rommes, J., Saadvandi, M., and Striebel, M. (2015). Model order reduction – methods, concepts and properties. Eindhoven University of Technology. CASA Report 15-07.
- Apostol, T. (1967). *Calculus*, page 452. John Wiley & Sons.
- Athay, T., Podmore, R., and Virmani, S. (1979). A practical method for the direct analysis of transient stability. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-98(2):573–584.
- Boyce, W. and DiPrima, R. (2006). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC.
- da Silva, F. A. G. (2005). Equivalentes modais de modelos de sistemas elétricos de potência de grande porte para projeto de estabilizadores. "Dissertação de Mestrado". Instituto Militar de Engenharia.
- Fairman, F. W. (1998). *Linear Control Theory*. John Wiley & Sons.
- Green, M. and Limebeer, D. (1995). *Linear Robust Control*. Prentice-Hall.
- Kundur, P., Berube, G. R., Hajagos, L. M., and Beaulieu, R. E. (2003). Practical utility experience with and effective use of power system stabilizers. In *IEEE PES Meeting*, volume 3, pages 1777–1785.
- Martins, N., Lima, L. T. G., and Pinto, H. J. C. P. (1996). Computing dominant poles of power system transfer functions. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(1):162–170.
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Theory*. Prentice-Hall.
- Zhou, K., Doyle, J., and Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall.