

MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MAJ THIAGO MARTINS SARDINHA

ANÁLISE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM
ATRASO

Rio de Janeiro
2018

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

MAJ THIAGO MARTINS SARDINHA

ANÁLISE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM ATRASO

Dissertação de mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE

Rio de Janeiro
2018

c2018

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

612.3 Sardinha, Thiago Martins
S244a Análise de sistemas lineares incertos com atraso/
Thiago Martins Sardinha, orientado por Alberto Mota
Simões.– Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia,
2018.
106 p.: il.

Dissertação (Mestrado) – Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro, 2018.

1. Curso de Engenharia Elétrica – teses e dissertações. 2. Sistemas Lineares. 3. Incertezas. I. Simões, Alberto Mota. II. Instituto Militar de Engenharia.

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

MAJ THIAGO MARTINS SARDINHA

**ANÁLISE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM
ATRASO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE

Aprovada em 29 de janeiro de 2018 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Alberto Mota Simões - Dr. ISAE do IME - Presidente

Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE do IME

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha - Dr. UFRJ da UERJ

Rio de Janeiro
2018

À minha família, maior bem que possuo, que me fez superar mais este obstáculo.

AGRADECIMENTOS

Entre as pessoas que permitiram a concretização deste trabalho, agradeço particularmente ao meu orientador, pelos comentários, sugestões e serenidade transmitida, propiciando que o tema tenha se tornado agradável e interessante.

Agradeço especialmente também aos meus pais e esposa, que me mantiveram de ânimo elevado além de possibilitar minha dedicação aos estudos.

“Há três métodos para ganhar sabedoria:
primeiro, por reflexão, que é o mais nobre;
segundo, por imitação, que é o mais fácil; e
terceiro, por experiência, que é o mais amargo.”
Confúcio

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	11
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	12
1 INTRODUÇÃO	17
1.1 Contexto e Motivação.....	17
1.2 Objetivo do Trabalho	19
1.3 Organização do Trabalho	21
2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE VIA IQC	22
2.1 Análise de Estabilidade	22
2.1.1 Exemplo 1: Passividade	26
2.1.2 Exemplo 2: Ganho Pequeno	28
2.2 Operadores mistos.....	29
2.3 Desempenho Robusto	30
2.4 Incertezas	33
2.4.1 Incerteza paramétrica invariante no tempo.....	34
2.4.2 Dinâmica LTI incerta repetida diagonalmente	34
2.4.3 Dinâmica LTI incerta de bloco cheio	35
2.4.4 Dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente	36
2.4.5 Dinâmica LTV incerta de bloco cheio	37
2.5 Relação entre análise μ e IQC.....	38
2.6 Parametrização de IQC	41
2.6.1 Exemplo de aplicação do Lema KYP.....	43
3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO ..	45
3.1 Apresentação do problema.....	45
3.2 Representação do atraso	46
3.2.1 Caso 1: $\Delta = \mathcal{D}_\tau$	47
3.2.2 Caso 2: $\Delta = \mathcal{S}_\tau$	47
3.2.3 Caso 3: $\Delta = \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$	48

3.2.4	Caso 4: $\Delta = \text{diag}(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau)$	48
3.3	IQC satisfeitas pelo operador \mathcal{S}_τ	50
3.3.1	IQC 1	50
3.3.2	IQC 2	51
3.3.3	IQC 3	53
3.3.4	IQC 4	54
3.4	Análise via LMI	55
3.5	Tratando o atraso como incerteza	57
3.6	Aplicações Numéricas	61
3.6.1	Planta 1	61
3.6.2	Planta 2	65
3.6.3	Planta 3	67
3.6.4	Planta 4	68
3.6.5	Planta 5	69
3.6.6	Sistema com multiplos atrasos	70
3.6.7	Sistema com controle baseado em observador	74
4	SISTEMAS INCERTOS COM ATRASO	81
4.1	Análise IQC de sistemas incertos com atraso	81
4.2	Fatoração dos multiplicadores IQC	83
4.2.1	Incerteza paramétrica invariante no tempo	84
4.2.2	Dinâmica LTI incerta repetida diagonalmente	85
4.2.3	Dinâmica LTI incerta de bloco cheio	85
4.2.4	Dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente	86
4.2.5	Dinâmica LTV incerta de bloco cheio	86
4.2.6	Operador atraso \mathcal{S}_τ	87
4.3	Aplicação numérica	88
4.3.1	Síntese do controlador robusto	89
4.3.2	Análise de desempenho robusto via IQC	93
5	CONCLUSÃO	100
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Representação de sistema realimentado	24
FIG.2.2	Interconexão de malha fechada de subsistemas	28
FIG.2.3	Representação para análise de desempenho em sistema realimen- tado	30
FIG.2.4	Representação para análise de desempenho em sistema realimen- tado	33
FIG.2.5	Estrutura $M\Delta$ para análise de estabilidade robusta	38
FIG.3.1	Atraso máximo admitido pela planta (3.77) em função do limite sobre a taxa de variação do atraso	63
FIG.3.2	Contribuição das IQC Π_1 e Π_2 na análise de (3.77),	63
FIG.3.3	Contribuição das diversas IQC na análise de (3.77)	64
FIG.3.4	Atraso máximo admitido pela planta (3.77)	65
FIG.3.5	Atraso máximo admitido pela planta (3.78) para diferentes IQC	66
FIG.3.6	Atraso máximo admitido pela planta (3.78) obtidos por diferentes técnicas	67
FIG.3.7	Atraso máximo admitido pela planta (3.80) para diferentes IQC	68
FIG.3.8	Atraso máximo admitido pela planta (3.80) obtidos por diferentes técnicas	68
FIG.3.9	Atraso máximo admitido pela planta (3.81)	70
FIG.3.10	Atraso máximo admitido pela planta (3.82)	71
FIG.3.11	Atraso máximo do sistema (3.83) com múltiplos atrasos	74
FIG.3.12	Diagrama de blocos do sistema com realimentação e observador de estado	75
FIG.3.13	Atraso máximo para o sistema com controle baseado em observador ...	77
FIG.3.14	Diagrama de Nyquist do observador de estados para o sistema com atrasos distintos	78
FIG.3.15	Detalhe do diagrama de Nyquist do observador	79
FIG.3.16	Análise da estabilidade do sistema (3.96) de múltiplos atrasos	80
FIG.4.1	Sistema massa-amortecedor-mola	88

FIG.4.2	Variação da resposta em frequência do sistema (4.32) para diferentes valores da constante k_1 da mola.	90
FIG.4.3	Planta de síntese generalizada para o sistema (4.32)	91
FIG.4.4	Modelagem e comportamento do atraso para fins de síntese no sistema (4.32)	92
FIG.4.5	Estrutura de análise de desempenho robusto.	92
FIG.4.6	Estrutura de síntese do controlador robusto.	93
FIG.4.7	Região de desempenho robusto para o sistema massa-mola-amortecedor	99

LISTA DE TABELAS

TAB.3.1	Validade das IQC para o operador \mathcal{S}_τ	55
---------	---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

FDI	-	<i>Frequency Domain Inequality</i>
IQC	-	<i>Integral Quadratic Constraint</i>
LFT	-	<i>Linear Fractional Transformations</i>
LMI	-	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LTI	-	<i>Linear Time-Invariant</i>
LTV	-	<i>Linear Time-Variant</i>
SSV	-	<i>Structured Singular Value</i>
MMA	-	Massa Mola Amortecedor

SÍMBOLOS

\triangleq	-	igual, por definição
\forall	-	para todo
\Rightarrow	-	se, então
\Leftrightarrow	-	se, e somente se
\square	-	fim de demonstração
j	-	índice, ou $j = \sqrt{-1}$
\mathbb{N}	-	conjunto dos números naturais
\mathbb{Z}	-	conjunto dos números inteiros
\mathbb{R}	-	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^+	-	conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{R}^{n \times m}$	-	matriz real com n linhas e m colunas
\mathbb{R}^n	-	vetor coluna real com n elementos
\mathbb{C}	-	conjunto dos números complexos
$\mathbb{C}^{n \times m}$	-	dimensão de matriz complexa com n linhas e m colunas
\mathbb{C}^n	-	vetor coluna complexo com n elementos

\mathbb{C}^0	-	eixo dos números complexos
M^\top	-	transposta da matriz M
M^H	-	transposta conjugada da matriz M
M^{-1}	-	inversa da matriz M
M^*	-	conjugado complexo da matriz M
I_p	-	matriz identidade de ordem p
\det	-	determinante da matriz
$\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$	-	matriz bloco diagonal tendo M_i como i -ésimo bloco
$\lambda(M)$	-	autovalores de M
λ_i	-	i -ésimo autovalor
\mathbb{S}^n	-	conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas
\mathbb{H}^n	-	conjunto das matrizes $n \times n$ Hermitianas
\mathbf{L}_2^m	-	espaço das funções quadraticamente integráveis, com coeficientes em \mathbb{R}^m , definidas no intervalo $(-\infty, \infty)$
\mathbf{L}_{2e}^m	-	espaço \mathbf{L}_2^m estendido
\mathbf{RL}_∞	-	conjunto de funções racionais próprias com coeficientes reais sem polos no eixo imaginário
\mathbf{RH}_∞	-	subespaço de \mathbf{RL}_∞ , conjunto de funções racionais próprias com coeficientes reais sem polos no semiplano direito
$\mathbf{RL}_\infty^{m \times n},$ $\mathbf{RH}_\infty^{m \times n}$	-	conjunto das matrizes $m \times n$ com elementos em \mathbf{RL}_∞ e \mathbf{RH}_∞ respectivamente
$\min S,$ $\max S$	-	menor, maior elemento de um conjunto S não vazio, desde que tal elemento exista
$\min_{x \in E} f(x),$ $\max_{x \in E} f(x)$	-	valor mínimo, máximo de f sobre o conjunto E , desde que esse valor exista. Pode ser global ou local, dependendo do contexto
$\inf_{x \in E} f(x),$ $\sup_{x \in E} f(x)$	-	limite mínimo, máximo de f sobre o conjunto E
$ x , z $	-	valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$, módulo de $z \in \mathbb{C}$
norma H_∞	-	máximo valor singular no domínio da frequência
$\ T(s)\ _\infty$	-	norma H_∞ da matriz de transferência $T(s)$

$\ x\ _2$ ou $\ x\ $	-	Norma euclidiana (hermitiana) do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{C}^n$)
$\ H\ _{L_2}$	-	ganho L_2 , para um sistema H em $L_2 \mapsto L_2$, tal que $y = Hx$, a norma L_2 induzida ou ganho do sistema é $\sup_{x \neq 0} \frac{\ y\ _2}{\ x\ _2}$
μ	-	valor singular estruturado
ω	-	frequência em rad/s
$\hat{y}(jw)$	-	espectro harmônico do sinal y na frequência w
σ	-	valor singular
$\bar{\sigma}$	-	maior valor singular
ρ	-	raio espectral, maior valor absoluto dos autovalores
BΔ	-	Conjunto das matrizes de transferência $\Delta(s)$ com norma H_∞ limitada em 1
m_r, m_c e m_C	-	número de blocos escalares reais repetidos, escalares complexos repetidos e complexos cheios respectivamente
m	-	número total de blocos ($m = m_r + m_c + m_C$)
\mathcal{F}_u	-	LFT superior
\mathcal{F}_l	-	LFT inferior
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	-	representação em espaço de estados pelas matrizes A, B, C, D
$\langle y(t), x(t) \rangle$	-	$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)^* x(t) dt$
$\langle y(t), x(t) \rangle_T$	-	$\int_{-\infty}^{-\infty} y(t)^* x(t) dt$
\otimes	-	Produto Kronecker

RESUMO

Esta dissertação trata da análise de estabilidade em sistemas que possuem incertezas e atrasos variantes no tempo. São organizados os conhecimentos basilares para a estruturação e discussão da questão, assim como apresentação dos fundamentos, definições e teoremas necessários para a argumentação da estabilidade. A teoria busca não restringir os casos possíveis que podem ser abordados, tratando sistemas complexos que possuem diversos tipos de incertezas além da presença de atraso em uma forma de tratamento unificada. São propostos tratamentos específicos para determinadas modelagens assim como testes complementares. Além da estabilidade, há também a preocupação de como o desempenho pode ser arrumado na forma de análise de robustez e de como diversos elementos complexos podem ser organizados. A análise em si tem ênfase no domínio da frequência, se valendo principalmente de restrições quadráticas integrais como ferramenta matemática essencial, e da solução de problemas de otimização com desigualdade de matrizes lineares como ferramenta numérica. Aplicações numéricas são apresentadas para ilustrar o alcance e a força da teoria.

ABSTRACT

This dissertation deals with the analysis of stability in systems that have uncertainties and delays, which presented variation in time. The basic knowledge is organized for structuring and discussing the issue, such as the presentation of fundamentals, resources and forums necessary for a stability argument. The theory seeks not to restrict the cases in which they can be addressed by treating complex systems that have several types of uncertainties besides the presence of delay in a form of unified treatment. Specific treatments are proposed for certain models as well as complementary tests. In addition to stability, there is a concern about how performance can be arranged in the form of robustness analysis and how various disruptive elements can be organized. An analysis in itself, has an emphasis on the frequency domain, using mainly the integral quadratic constraints, as the main mathematical tool. Numerical applications are presented to illustrate the scope and strength of the theory, and use parametrized solutions to linear matrix inequalities.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata sobre análise de estabilidade de sistemas dinâmicos com incertezas e atrasos variantes no tempo, norteado por uma abordagem matemática baseada no largo uso de IQC, com a finalidade de apresentar uma metodologia sistematizada de estudo do tema através de otimizações de LMIs.

Neste capítulo será feita uma breve ambientação de qual ramo de estudo a dissertação está inserida, as circunstâncias envolvidas e o estímulo que justifica o assunto. Também será apresentado o propósito que se deseja alcançar, e por fim, uma descrição sumária da organização do trabalho.

1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

Sistemas de controle são estudados há muito tempo e de forma bem genérica é possível dizer que visam a necessidade de rapidez, segurança e eficácia de um outro sistema, independente de seu porte ou segmento de atuação.

Os estudos com ênfase na estabilidade de sistemas tiveram um crescimento considerável nas décadas 60 e 70, uma evolução que pode ser evidenciada nas pesquisas que conceituavam em particionar um único sistema em uma malha de realimentação de dois outros subsistemas. Dessa prática foram obtidos vários resultados relevantes, que podem ser considerados como a teoria fundamental para o estudo de sistemas não lineares, conforme [POPOV, 1962],[YAKUBOVICH, 1967],[ZAMES, 1966],[WILLEMS, 1972],[NARENDRA e TAYLOR, 1973],[DESOER e VIDYASAGAR, 1975] e [SAFONOV, 1982].

Entretanto, deste mesmo crescimento, foram evidenciadas lacunas entre a teoria clássica e os problemas do mundo real. De acordo com [KHARGONEKAR, PETERSEN e ZHOU, 1990], esta diferença entre a teoria e a prática promoveu um dos subcampos mais ativos da pesquisa na teoria do controle, a teoria do controle robusto, área que trata de vários problemas de controle onde a incerteza de um modelo de uma planta ou a incerteza de um sinal exógeno é a questão dominante.

Conforme [MEGRETSKI e RANTZER, 1997], na engenharia de forma geral é comum optar por trabalhar com modelos simples no projeto e análise de sistemas, para depois inserir elementos complexos, e para sistemas de controle permanece este padrão

de comportamento. São comuns os estudos em plantas invariantes no tempo, precisas e lineares, no entanto, essas simplificações podem levar a resultados críticos ou até mesmo estimativas falsas do modelo.

Com intuito de preencher essa lacuna entre as simplificações e as imperfeições surge o conceito de robustez. Uma vez que sistemas físicos estão sujeitos a presença de incertezas, deterioração de suas partes, variação conforme uso, erros de natureza diversa, essas diferenças oriundas da imprecisão da planta podem tornar o modelo teórico não confiável, assim, quando as conclusões são calcadas apenas em uma base sintética, a estabilidade e o desempenho podem se verter em condições não seguras.

Ainda sobre a presença de imprecisões e a imposição de representação de um modelo realístico, [CORLESS e LEITMANN, 1981] esclarece que quando há necessidade de um certo comportamento por parte do sistema, que tem como característica proeminente a presença de informações duvidosas, o conhecimento essencial sobre os elementos imprecisos deve se ater ao tamanho possível do erro, isto é, aos limites do conjunto em que os valores podem variar. De outra forma, deve haver o discernimento da coleção de elementos que guardam as mesmas características presumidas como sendo conhecidas assim como sua extensão.

Uma outra lacuna que se apresentava e começou a ser estudada foi a inclusão de sistemas com a presença de atrasos, enriquecendo ainda mais a área de controle robusto. Em muitos casos, a manifestação de atrasos de tempo em um sistema pode levar à degradação do desempenho e até mesmo ser uma fonte de instabilidade do sistema. Esta questão da estabilidade, associado ao desempenho de sistemas são, portanto, de importância teórica e prática [FRIDMAN e SHAKED, 2002].

Os estudos crescentes nas últimas décadas, conforme pode ser visto [WANG, CHEN e LIN, 1987], [KHARITONOV, 1998] e [MOON, PARK, KWON e LEE, 2001], além de mostrar o crescimento do interesse em uma representação mais realística de sistema com atrasos, reforçam que de fato, na maioria das vezes, a simples presença do atraso poder levar a uma indesejável resposta transitória, a um desempenho ruim ou mesmo sua instabilidade.

Muita das vezes, o atraso decorre de uma limitação física que a capacidade da informação tem em estar em várias partes do sistema ao mesmo tempo [GU, CHEN e KHARITONOV, 2003]. São muitos os sistemas que devido às suas características singulares apresentam estes fenômenos. É muito comum encontrá-los nas áreas técnicas,

tais como sistemas elétricos, mecânicos e químicos, tais como linhas de transmissão, redes pneumáticas e hidráulicas e processos químicos [DEBELJKOVIĆ e NESTOROVIĆ, 2011].

Existem casos usuais onde há atraso de transmissão do sinal entre sensores, compensadores e atuadores, mas em comparação com a necessidade geral do sistema, os efeitos no tempo não são significativos para causar sérios problemas. No entanto, para garantir o desempenho, no contexto de sistemas distribuídos em larga escala e em rede, onde os efeitos no tempo podem ser relevantes, a robustez do tempo de atraso deve ser explicitamente abordada [ZHANG, KNOPE e TSIOTRAS, 2005], [KAO e RANTZER, 2007].

O espaço de aplicação não se limita a área técnica. A mesma teoria desenvolvida para os casos da engenharia fornece ferramentas de estudo em outras áreas como matemática, biologia, ecologia e economia [GU, CHEN e KHARITONOV, 2003]. Estes sistemas também são muito comuns na área de administração, como demanda de consumidores, tempo de entrega de produtos e dinâmicas em linhas de produção, quando modelados como sistemas com atrasos e incertezas. [SIMON, 1952] , [FORRESTER, 1997], [RIDDALLS e BENNETT, 2002], [IGNACIUK e BARTOSZEWICZ, 2011], [WANG, DISNEY e WANG, 2012], [ABBOU, MOUSSAOUI e LOISEAU, 2015]

Desta maneira, é possível perceber que o desejo de aproximar os casos reais em formas tratáveis e mais simplificadas ganharam destaque, uma vez que a presença de incertezas e de atrasos é encontrada regularmente em sistemas de engenharia ou não, cabendo entender como a presença destes elementos interfere no comportamento dos processos, tornando relevante o interesse no tema.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Um dos motivos pelos quais a área de controle robusto ter avançado tanto ao longo dos anos foi a necessidade de suprir os hiatos existentes no controle clássico através da inclusão de não linearidades, incertezas e atrasos. Entretanto, essa deficiência não foi justificativa exclusiva para a ascensão desse ramo do controle, boa parte da responsabilidade deve-se aos métodos, técnicas e otimizações numéricas, presentes no controle robusto, que proporcionaram ferramentas de desenvolvimento.

Com o progresso de teorias, ferramentas matemáticas e computacionais, puderam ser supridas algumas questões intrínsecas da área de controle robusto. Um caso notório que por algum tempo ficou limitado por insuficiência computacional e que depois levou a di-

versos resultados relevantes são os algoritmos para o cálculo do valor singular estruturado (análise μ) de [DOYLE, 1982].

Consequentemente, com este avanço, a questão da estabilidade para esta classe de sistemas tem sido um dos principais interesses para muitos pesquisadores que se dedicam à estabilização robusta. [IVĂNESCU, NICULESCU, DUGARD, DION e VERRIEST, 2003], [CHIASSE e LOISEAU, 2007], [TARBOURIECH, GARCIA, DA SILVA JR e QUEINNEC, 2011].

Com o avanço computacional, análises de sistemas dinâmicos com parâmetros incertos tornaram-se mais precisas. O desenvolvimento de algoritmos polinomiais para otimização convexa com restrições possibilitaram a solução de LMIs, o que pode ser observado em [BOYD, EL GHAOUI, FERON e BALAKRISHNAN, 1994] e [NESTEROV e NEMIROVSKI, 1993].

Esta transformação contínua de métodos na verdade expressa que as técnicas existentes estão em um contínuo processo de melhora e aperfeiçoamento. Dependendo da consideração e abordagem que for dada ao sistema pode haver avanço de um procedimento, melhoramento de uma ferramenta ou ampliação de um critério.

Logo, a permanente tendência de aperfeiçoar o tratamento dado a problemas conhecidos, tanto para pesquisadores como para engenheiros, dá margem ao presente trabalho, no sentido que destina-se a aumentar o número de casos que podem ser modelados de forma semelhante, reduzir limitações e formatar os cálculos envolvidos em único algoritmo e assim refinando a teoria de controle.

Para tanto, a presente dissertação objetiva fundamentalmente analisar sistemas dinâmicos que contemplem em sua modelagem parâmetros incertos e atrasos variantes no tempo, através de métodos que permitam estudar um maior número de casos sob a mesma abordagem matemática, respaldada em pesquisas realizadas na área, como alternativa a métodos mais restritivos. Serão aplicadas teorias já consolidadas, como a análise frequencial por IQC, com base na otimização de LMIs, visando simplificação matemática e também largo uso de ferramentas computacionais. A validação do trabalho será através da comparação de casos, evidenciando a amplitude do estudo e aferindo resultados numéricos.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação é composta por quatro capítulos (incluindo esta introdução) e uma conclusão por derradeiro.

- O capítulo 2 consiste da apresentação dos fundamentos necessários para análise de estabilidade, das principais definições e conceitos relacionados à incertezas e das ferramentas matemáticas que serão empregadas.
- O capítulo 3 descreve a sistemática por qual vai se dar a análise de sistemas com atraso. Serão abordadas diversas formas de estruturação e modelagem de sistemas com atraso, além de demonstrar uma metodologia específica para o tratamento do problema. Ao final são discutidos problemas numéricos que tratam exclusivamente de sistemas com atrasos.
- O capítulo 4 apresenta o emprego da metodologia de análise do capítulo 3, aplicada em diversos tipos de incertezas, com ênfase na fatoração dos sistemas, assemelhando os modelos matemáticos aos problemas concretos. Ao final é realizada uma aplicação numérica que envolve a maior parte da teoria apresentada.

2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE VIA IQC

Neste capítulo, são apresentados alguns elementos fundamentais da matemática e da teoria de controle envolvidas no trabalho, com a finalidade de embasar e uniformizar o tema de estudo. São apresentados, inicialmente, conceitos, definições, representações e condições para obtenção de resultados parciais, para a então posterior discussão sobre o tema principal: a análise de estabilidade de sistemas em malha fechada. São apresentados, em cada seção do capítulo, resultados basilares, fundamentados em estudos progressos, e para uma explanação mais meticulosa recomenda-se a bibliografia referenciada nos tópicos.

2.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Restrições Quadráticas Integrais, ou IQC (do inglês *Integral Quadratic Constraints*) são desigualdades empregadas na análise de sistemas dinâmicos para descrever operadores sobre sinais. As IQC¹ são, na verdade, ferramentas poderosas para descrever sistemas dinâmicos complexos que eventualmente possuem elementos não-lineares, variantes no tempo e com parâmetros incertos, entre outros.

O propósito inicial de uso do ferramental IQC é a análise de estabilidade de um dado sistema realimentado. Conforme [MEGRETSKI e RANTZER, 1997], que primeiro introduziram essa abordagem, as IQC permitem explorar informações estruturais de perturbações, caracterizar propriedades de sinais externos, e analisar combinações de várias perturbações e sinais externos.

O uso de IQC ganhou força com consolidação das teorias de controle e o avanço computacional. Por meio delas é possível simplificar a matemática envolvida, como prova de teoremas e o uso de programas computacionais específicos.

Introduz-se na definição a seguir o conceito preciso de IQC. Uma abordagem mais completa e detalhada encontra-se em [MEGRETSKI e RANTZER, 1997].

Definição 2.1. *Diz-se que dois sinais $u \in \mathbf{L}_2^m[0, \infty)$ e $y \in \mathbf{L}_2^l[0, \infty)$ satisfazem a IQC*

¹A sigla "IQC" será usada tanto para a forma singular e plural no trabalho.

definida por $\Pi : j\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^{(l+m)(l+m)}$ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0. \quad (2.1)$$

Matematicamente, IQC são uma maneira de representar a relação entre processos que evoluem em um sistema dinâmico complexo, de uma forma conveniente para análise. Via de regra, o (denominado) multiplicador Π em (2.1) pode ser qualquer função Hermitiana mensurável. Na maioria dos casos, porém, é suficiente se utilizar de funções racionais limitadas no eixo imaginário. No presente trabalho, considera-se que o multiplicador $\Pi(j\omega)$ é racional, hermitiano, e que pode ser decomposto em blocos da forma

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_1(j\omega) & \Pi_o(j\omega) \\ \Pi_o^H(j\omega) & \Pi_2(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Considerando-se Π um operador limitado no espaço \mathbf{L}_2 , então o multiplicador define uma forma quadrática em \mathbf{L}_2 dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{\Pi}(y, u) &\triangleq \left\langle \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}, \Pi \left(\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \right) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \Pi \left(\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \right) dt, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Percebe-se, assim, pelo teorema de Parseval, que a IQC (2.1) descrevendo a distribuição de energia no espectro de frequências pode ser equivalentemente reescrita no domínio do tempo como $\sigma_{\Pi}(y, u) \geq 0$.

Considere, agora, o sistema em malha fechada representado na FIG. 2.1, descrito por

$$\begin{cases} y = Gu + f, \\ u = \Delta(y) + e, \end{cases} \quad (2.4)$$

com G e Δ operadores causais em $\mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ e $\mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty)$, respectivamente. Os sinais $f \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty)$ e $e \in \mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ desempenham o papel de ruídos da interconexão.

A interconexão da FIG. 2.1 representa uma abstração na qual se divide um sistema originalmente complexo em dois subsistemas realimentados mais simples. Assume-se que

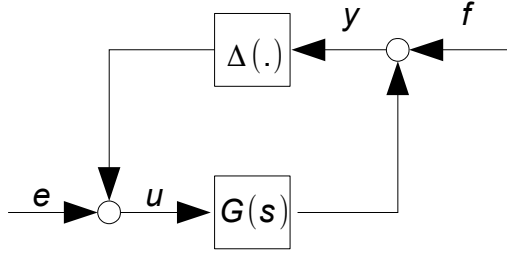


FIG. 2.1: Representação de sistema realimentado

G é um operador linear invariante no tempo, com função de transferência $G(s)$ em $\mathbf{RH}_\infty^{l \times m}$, e que o operador Δ possui ganho \mathbf{L}_2 limitado. Este último é o elemento do sistema que traduzirá um componente não linear, variante no tempo ou incerto.

Antes de se apresentar o resultado principal desta seção, algumas definições devem ser introduzidas, baseadas na configuração do sistema representado na EQ. (2.4). Considere, então, as definições a seguir.

Definição 2.2. *O sistema (2.4) resultado da interconexão $G - \Delta$ representado na FIG. 2.1 é dito bem posto se o mapeamento $(y, u) \mapsto (e, f)$ possuir uma função causal inversa em $\mathbf{L}_{2e}^{m+l}[0, \infty)$.*

Definição 2.3. *O sistema é dito estável se for bem posto e existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^T (|y|^2 + |u|^2) dt \leq C \int_0^T (|f|^2 + |e|^2) dt, \quad \forall T \geq 0. \quad (2.5)$$

O fato do sistema ser bem posto está relacionado, na maioria das aplicações, à existência, à unicidade e à continuidade das soluções das equações diferenciais. Quando G é linear, como será o caso considerado neste trabalho, o sistema é bem-posto quando $(I - G\Delta)$ for inversível. Dado que G e Δ são funções limitadas, decorre que a interconexão dos subsistemas será estável se somente se $(I - G\Delta)^{-1}$ for um operador causal limitado em $\mathbf{L}_2^l[0, \infty)$.

A definição de estabilidade apresentada diz respeito à estabilidade entrada-saída do sistema. No entanto, é desejável verificar algum tipo de estabilidade exponencial também. Como serão abordados casos de operações de sistemas lineares, mesmo que variantes no

tempo, a estabilidade de entrada-saída será equivalente à estabilidade exponencial, nos critérios do lema a seguir.

Lema 2.1. *Seja $\phi(x, t)$ tal que $\sup_{x,t} \frac{|\phi(x, t)|}{|x(t)|} < \infty$. Assuma que, para qualquer $g \in \mathbf{L}_2^n[0, \infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \geq 0$, o sistema*

$$\dot{x}(t) = \phi(x(t), t) + g(t), t \geq t_0 \quad (2.6)$$

tem uma solução x . Então, as duas condições a seguir são equivalentes:

1) *Para qualquer solução da equação (2.6), com $x(t_0) = 0$, existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq c \int_0^T |g(t)|^2 dt; \forall T > 0, \quad (2.7)$$

2) *Para qualquer solução da equação (2.6), existem $\epsilon, d > 0$ tais que*

$$|x(t_1)|^2 \leq de^{\epsilon(t_0-t_1)} |x(t_0)|^2 + d \int_{t_0}^{t_1} |g(t)|^2 dt. \quad (2.8)$$

Prova. Ver [MEGRETSKI e RANTZER, 1997]. □

O teorema a seguir representa a ferramenta de análise de estabilidade central no presente trabalho.

Teorema 2.1. *Seja $G(s) \in \mathbf{RH}_\infty^{l \times m}$, e seja Δ um operador causal limitado. Se:*

- a) *Para cada $\rho \in [0, 1]$, a interconexão de G e $\rho\Delta$ é bem posta;*
- b) *Para cada $\rho \in [0, 1]$, a IQC (2.1) definida por Π é satisfeita por $\rho\Delta$;*
- c) *Existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I, \quad \forall \omega \in [0, \infty); \quad (2.9)$$

então a interconexão de $G - \Delta$ em (2.4) é estável.

Prova. Ver [MEGRETSKI e RANTZER, 1997]. □

As condições do Teorema 2.1, em especial o item "b", não são a princípio triviais de serem obtidas. Na verdade, encontrar uma IQC que satisfaça esta última condição nem

sempre é uma tarefa simples. Para o êxito da teoria, diversos pesquisadores já conseguiram identificar famílias de IQC satisfeitas por operadores de interesse prático. Assim, o assunto será tratado de forma mais conveniente no Capítulo 3, onde serão apresentadas algumas IQC de interesse para a análise de sistemas com atraso.

Em consequência do Teorema 2.1, se forem satisfeitas as condições "a" e "b", o teste para saber se o sistema possui estabilidade se traduz em verificar a validade da condição (2.9). É oportuno destacar que a inequação (2.9) trata-se de uma desigualdade matricial no domínio da frequência, ou FDI (do inglês *Frequency Domain Inequality*), portanto, de dimensão infinita.

É importante notar que se $\rho\Delta$ satisfaz IQC definidas por Π_i , $i = 1, \dots, n$, então a combinação cônica $x_1\Pi_1 + \dots + x_n\Pi_n$, $x_i \geq 0$, também define uma IQC para $\rho\Delta$. Logo, uma condição suficiente para a estabilidade é a existência de escalares $x_1, \dots, x_n \geq 0$ tais que (2.9) valha para $\Pi \triangleq \Pi_1 + \dots + \Pi_n$.

A seguir, são apresentados dois exemplos ilustrando a aplicação do Teorema 2.1.

2.1.1 EXEMPLO 1: PASSIVIDADE

Inicialmente, considere as definições de passividade e de positividade a seguir.

Definição 2.4. Um operador $\Phi : \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty) \mapsto \mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ é dito passivo se e somente se $\exists \beta$ tal que

$$\langle \Phi(y(t)), y(t) \rangle_T \geq \beta, \quad \forall y \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty), \quad \forall T \geq 0. \quad (2.10)$$

Definição 2.5. Um operador $\Phi : \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty) \mapsto \mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ é dito estritamente passivo se e somente se $\exists \delta > 0$ e $\exists \beta$ tais que

$$\langle \Phi(y(t)), y(t) \rangle_T \geq \delta \|y\|_T + \beta, \quad \forall y \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty), \quad \forall T \geq 0. \quad (2.11)$$

Definição 2.6. Um operador $\Phi : \mathbf{L}_2^l[0, \infty) \mapsto \mathbf{L}_2^m[0, \infty)$ é dito positivo se e somente se

$$\langle \Phi(y(t)), y(t) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \mathbf{L}_2^l[0, \infty). \quad (2.12)$$

O lema a seguir revela que no caso considerado neste trabalho, de operadores causais, os dois conceitos de passividade e positividade se equivalem.

Lema 2.2. Seja $\Phi : \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty) \mapsto \mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ um operador causal. Então, Φ é passivo se e somente se é positivo.

Prova. Ver [DESOER e VIDYASAGAR, 1975]. \square

Suponha, então, que no sistema (2.4), Δ seja um operador passivo causal, e que a realimentação seja negativa. Logo, pelo Lema 2.2,

$$\langle \Delta(y(t)), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^T \Delta(y(t)) dt \geq 0. \quad (2.13)$$

Consequentemente,

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^T \Delta(y(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y(t)^T \Delta(y(t)) + \Delta(y(t))^T y(t) \right) dt \quad (2.14)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix} dt \geq 0. \quad (2.15)$$

Assim, conclui-se que um operador passivo satisfaz uma IQC para

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Note que nesse caso particular de um operador passivo causal, o teste (2.9) torna-se

$$\begin{bmatrix} -G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = -G(j\omega) - G(j\omega)^H \leq -\epsilon I, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (2.17)$$

Considere, agora, a caracterização frequencial de passividade no seguinte lema.

Lema 2.3. *Seja h um operador definido por $h(u) \triangleq H * u$, para todo $u \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty)$. De modo que, $h : \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty) \mapsto \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty)$. Então:*

i) h é passivo se e somente se

$$H(j\omega) + H(j\omega)^H \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

ii) h é estritamente passivo se e somente se, para algum $\delta > 0$,

$$\lambda(H(j\omega) + H(j\omega)^H) \geq \delta > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (2.19)$$

Prova. Ver [DESOER e VIDYASAGAR, 1975]. \square

Conclui-se, então, do Lema 2.3 que a condição (2.17) é garantida pela passividade estrita da transferência $G(s)$. Então, a aplicação da análise IQC nesse caso revela que a interconexão em realimentação negativa de um operador passivo causal com um operador estritamente passivo causal gera um sistema em malha fechada estável.

2.1.2 EXEMPLO 2: GANHO PEQUENO

Apresentado pela primeira vez por [ZAMES, 1966] e depois citado por muitos outros autores como [DESOER e VIDYASAGAR, 1975] , [ZHOU, DOYLE e GLOVER, 1996] e [CHEN e GU, 2000] , o Teorema do Ganho Pequeno descreve a situação de sistemas \mathbf{L}_2 estáveis, ou seja, de sistemas com norma $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_2}$ finita.

Lema 2.4. *Seja os subsistemas L_1 e L_2 , ambos \mathbf{L}_2 estáveis.*

O sistema realimentado de malha fechada é estável se

$$\|L_1 L_2\|_{\mathbf{L}_2} < 1 \quad (2.20)$$

Prova. Ver: [SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2007] □

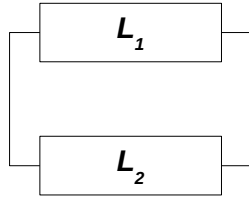


FIG. 2.2: Interconexão de malha fechada de subsistemas

O Lema 2.4 apresenta na EQ. (2.20) uma circunstância conservadora. Uma vez que $\|L_1\|_{\mathbf{L}_2}\|L_2\|_{\mathbf{L}_2} < 1$ por serem \mathbf{L}_2 estáveis, o conservadorismo ocorre pois $\|L_1 L_2\|_{\mathbf{L}_2} \leq \|L_1\|_{\mathbf{L}_2}\|L_2\|_{\mathbf{L}_2}$.

Para casos de sistemas LTI, a norma \mathbf{L}_2 coincide com a norma H_∞ , máximo valor singular no domínio da frequência de uma função de transferência $\hat{H}(s)$, desempenhando assim um papel central na teoria de controle robusto, o que o fez ganhar espaço algumas vezes dos critérios de estabilidade clássicos, como Nyquist e o método do *root-locus*.

Na análise de estabilidade robusta de sistemas LTI incertos, o teorema do ganho pequeno é aplicado após a modelagem das incertezas por perturbações limitadas, e por conveniência L_1 e L_2 são representados como um sistema nominal G e pelas incertezas Δ , conforme a figura 2.1.

Suponha, agora, que Δ é um operador com ganho \mathbf{L}_2 limitado, $\|\Delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma$. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(y(t))^\top \Delta(y(t)) dt \leq \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^\top y(t) dt, \quad (2.21)$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{-2} \Delta(y(t))^\top \Delta(y(t)) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^\top y(t) dt. \quad (2.22)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^\top y(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{-2} \Delta(y(t))^\top \Delta(y(t)) dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix} dt \geq 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Conclui-se, assim, que o operador Δ satisfaz uma IQC para

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Nesse caso, o teste (2.9) torna-se

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = G(j\omega)^H G(j\omega) - \gamma^{-2}I \leq -\epsilon I, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (2.25)$$

Note que a condição acima é satisfeita quando

$$G(j\omega)^H G(j\omega) < \gamma^{-2}I, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (2.26)$$

Assim, uma condição suficiente para a estabilidade do sistema em malha fechada é a condição de ganho pequeno

$$\|G(s)\|_\infty < \gamma^{-1}. \quad (2.27)$$

2.2 OPERADORES MISTOS

O formalismo matemático das IQC oferece uma forma simplificada para modelar sistemas complexos. Como exemplo, é possível representar sistemas que apresentam vários elementos incertos concomitantes, dividindo o sistema complexo em blocos elementares. Assim, é possível converter uma única IQC em um conjunto de IQC descrevendo os subsistemas menores. A obtenção das IQC para os subsistemas é uma parcela da análise.

Encontradas as IQC, a questão da estabilidade do sistema geral se resume na solução direta da EQ. (2.9) para a IQC geral.

Considere, então, o caso em que o bloco Δ é constituído por n sub-operadores Δ_i , $i = 1, \dots, n$, de modo que

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_n).$$

Seja o vetor de entrada y dividido de forma correspondente, $y = [y_1 \dots y_n]$, de modo que y_i representa a entrada do i -ésimo bloco Δ_i . Supõe-se que cada bloco Δ_i satisfaz uma IQC definida por um multiplicador Π_i correspondente, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y_i(t) \\ \Delta_i(y_i(t)) \end{bmatrix}^{\top} \Pi_i \left(\begin{bmatrix} y_i(t) \\ \Delta_i(y_i(t)) \end{bmatrix} \right) dt \geq 0, \quad (2.28)$$

e que o respectivo multiplicador $\Pi_i(j\omega)$ é particionado da forma

$$\Pi_i(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{i,1}(j\omega) & \Pi_{i,o}(j\omega) \\ \Pi_{i,o}^H(j\omega) & \Pi_{i,2}(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Então, nesse caso a incerteza total Δ satisfaz a IQC (2.1) com o multiplicador

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\Pi_{1,1}(j\omega), \dots, \Pi_{k,1}(j\omega)) & \text{diag}(\Pi_{1,o}(j\omega), \dots, \Pi_{k,o}(j\omega)) \\ \text{diag}(\Pi_{1,o}^H(j\omega), \dots, \Pi_{k,o}^H(j\omega)) & \text{diag}(\Pi_{1,2}(j\omega), \dots, \Pi_{k,2}(j\omega)) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Na literatura, é possível encontrar IQC para elementos não lineares, incertos, com atrasos, de parâmetros variantes no tempo, com modulações, saturações, periodicidade, etc.

2.3 DESEMPENHO ROBUSTO

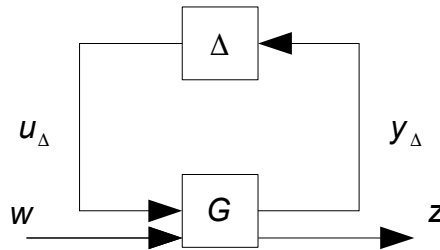


FIG. 2.3: Representação para análise de desempenho em sistema realimentado

Na análise de robustez em desempenho, inclui-se no sistema da FIG. 2.1 um canal de desempenho $w \rightarrow z$, conforme apresentado na FIG. 2.3, dando origem ao sistema em malha fechada descrito pela equação

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \\ u = \Delta(y). \end{cases} \quad (2.31)$$

No sistema da FIG. 2.3, G é linear, invariante no tempo e estável, o canal $y \rightarrow u$ representa o canal do operador "problemático", e a transferência $w \rightarrow z$ representa o canal de desempenho. Assume-se que a matriz de transferência da planta nominal é dividida da forma

$$G(j\omega) \triangleq \begin{bmatrix} G_{yu}(j\omega) & G_{yw}(j\omega) \\ G_{zu}(j\omega) & G_{zw}(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

A interconexão é dita bem posta se a transferência $(I - G_{yu}\Delta)$ possuir uma inversa causal.

Assume-se também que o critério de desempenho para o sistema em malha fechada (2.31) é caracterizado também por uma IQC dada por

$$\left\langle \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}, \Pi_p \left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right) \right\rangle \leq -\epsilon \|w\|^2, \quad \epsilon > 0, \quad (2.33)$$

onde o multiplicador admite a partição

$$\Pi_p(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{p,1}(j\omega) & \Pi_{p,o}(j\omega) \\ \Pi_{p,o}^H(j\omega) & \Pi_{p,2}(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Considere, agora, as definições a seguir.

Definição 2.7. Diz-se que o sistema (2.31) possui estabilidade robusta se a inversa de $(I - G_{yu}\Delta)$ for causal e limitada para todo operador Δ admissível.

Definição 2.8. Diz-se que o sistema (2.31) possui desempenho robusto se possuir robustez em estabilidade e se existem Π_p e $\epsilon > 0$ tal que a IQC de desempenho (2.33) é satisfeita para todas as suas trajetórias.

De forma análoga ao tratamento dado para o critério de estabilidade na Seção 2.1, um critério de desempenho robusto é enunciado no Teorema a seguir.

Teorema 2.2. *Seja $G(s) \in \mathbf{RH}_{\infty}^{l \times m}$ e Δ um operador causal limitado. Seja $\mathbf{\Delta}$ a classe de operadores admissíveis. Se:*

- a) *Para cada $\Delta \in \mathbf{\Delta}$, a interconexão de G e Δ é bem posta;*
- b) *Para cada $\Delta \in \mathbf{\Delta}$, a IQC definida por Π é satisfeita;*
- c) *É satisfeita a condição*

$$\begin{bmatrix} G_{yu} & G_{yw} \\ I & 0 \\ \hline G_{zu} & G_{zw} \\ 0 & I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Pi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{yu} & G_{yw} \\ I & 0 \\ \hline G_{zu} & G_{zw} \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.35)$$

então a interconexão de G e Δ possui estabilidade e desempenho robustos.

Prova. Ver [VEENMAN, SCHERER e KÖROĞLU, 2016]. □

Com relação ao resultado do Teorema 2.2, é interessante notar que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} G_{yu} & G_{yw} \\ I & 0 \\ \hline G_{zu} & G_{zw} \\ 0 & I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Pi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{yu} & G_{yw} \\ I & 0 \\ \hline G_{zu} & G_{zw} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} G_{yu} & G_{yw} \\ G_{zu} & G_{zw} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & \Pi_o & 0 \\ 0 & \Pi_{p,1} & 0 & \Pi_{p,o} \\ \Pi_o^H & 0 & \Pi_2 & 0 \\ 0 & \Pi_{p,o}^H & 0 & \Pi_{p,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{yu} & G_{yw} \\ G_{zu} & G_{zw} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.36) \end{aligned}$$

o que representa a condição IQC para um problema com operador misto como em (2.30).

Assim, o desempenho robusto do sistema (2.31) pode ser inferido de forma equivalente pela análise da estabilidade robusta da planta nominal $G(s)$ com relação a um operador aumentado $\hat{\Delta} \triangleq \text{diag}(\Delta, \Delta_f)$, onde Δ_f representa um operador fictício satisfazendo a IQC (2.33), conforme FIG. 2.4. Esse mesmo procedimento é utilizado em [ZHOU, DOYLE e GLOVER, 1996] na análise de desempenho robusto via o Teorema Principal de Malha e o valor singular estruturado.

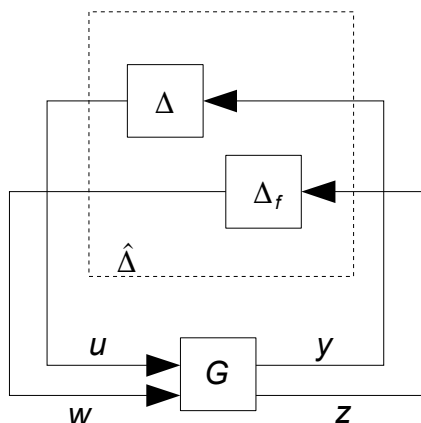


FIG. 2.4: Representação para análise de desempenho em sistema realimentado

2.4 INCERTEZAS

Incertezas são representações matemáticas que se destinam a refletir a realidade de sistemas físicos. Permitem que sistemas extremamente complexos sejam tratados computacionalmente, diminuindo a discrepância do modelo matemático e o sistema real [LOPES, 2014].

Neste intuito de representar os sistemas reais, existem algumas fontes de incertezas bem conhecidas que interferem na avaliação do parâmetro modelado como: sensores imprecisos, elemento a ser aproximado ou com margem de erro, variação de comportamento conforme o ponto de operação, estrutura desconhecida em alta frequência, etc.

Com o avanço da teoria de controle robusto, sistemas com essas particularidades, ganharam representações específicas e técnicas de controle também foram desenvolvidas. Assim, mesmo sistemas com elementos de valores não conhecidos de maneira precisa ou variantes no tempo puderam ter sua estabilidade e desempenho controlados [SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2007] e [ZHOU, DOYLE e GLOVER, 1996].

Na representação de sistemas físicos reais, os parâmetros não possuem valores exatos e dinâmicas não são fielmente modeladas ou são até negligenciadas em benefício da simplicidade, podendo ser descritos por um conjunto de números reais ou por um conjunto de números complexos.

A seguir, são discutidas condições IQC para algumas classes particulares de incertezas.

2.4.1 INCERTEZA PARAMÉTRICA INVARIANTE NO TEMPO

Seja $\delta \in \mathbb{R}$ um parâmetro real invariante no tempo, de modo que

$$u(t) = \delta y(t).$$

A classe de operadores admissíveis nesse caso é dada por

$$\mathbf{\Delta}_r \triangleq \{\delta I_l : \delta \in \mathbb{R}, |\delta| \leq \gamma\}. \quad (2.37)$$

Considere as seguintes classes de matrizes:

$$\mathbf{D} \triangleq \{D \in \mathbb{C}^{l \times l} : \det D \neq 0\}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{P} \triangleq \{P = D^H D : D \in \mathbf{D}\}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{S} \triangleq \{S \in \mathbb{C}^{l \times l} : S + S^H = 0\}. \quad (2.40)$$

Então, mostra-se que um operador $\Delta \in \mathbf{\Delta}_r$ satisfaz a IQC (2.1) para

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} P(j\omega) & S(j\omega) \\ S(j\omega)^H & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix}, \quad S(j\omega) \in \mathbf{S}, P(j\omega) \in \mathbf{P}. \quad (2.41)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \Delta \hat{y}(j\omega) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P(j\omega) & S(j\omega) \\ S(j\omega)^H & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \Delta \hat{y}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(j\omega)^H [(1 - \gamma^{-2}\delta^2)P + \delta(S + S^H)] \hat{y}(j\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(j\omega)^H [(1 - \gamma^{-2}\delta^2)P] \hat{y}(j\omega) d\omega \geq 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

A última desigualdade em (2.42) vem do fato de que $P(j\omega) > 0$ e de que $|\delta| \leq \gamma$.

2.4.2 DINÂMICA LTI INCERTA REPETIDA DIAGONALMENTE

Seja $\delta \in \mathbf{H}_\infty$ tal que

$$\hat{u}(j\omega) = \delta(j\omega)\hat{y}(j\omega).$$

A classe de operadores admissíveis associada é dada por

$$\mathbf{\Delta}_c \triangleq \{\delta I_l : \delta \in \mathbf{H}_\infty, \|\delta(s)\|_\infty \leq \gamma\}. \quad (2.43)$$

Mostra-se que um operador $\Delta \in \mathbf{\Delta}_c$ satisfaz a IQC (2.1) para

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} P(j\omega) & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix}, \quad P(j\omega) \in \mathbf{P}. \quad (2.44)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \Delta \hat{y}(j\omega) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P(j\omega) & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \Delta \hat{y}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(j\omega)^H [(1 - \gamma^{-2}|\delta(j\omega)|^2)P] \hat{y}(j\omega) d\omega \geq 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

A última desigualdade em (2.45) vem novamente do fato de que $P(j\omega) > 0$ e de que $|\delta(j\omega)| \leq \gamma$.

2.4.3 DINÂMICA LTI INCERTA DE BLOCO CHEIO

Seja $\Delta \in \mathbf{H}_\infty^{l \times l}$ tal que

$$\hat{u}(j\omega) = \Delta(j\omega)\hat{y}(j\omega).$$

A classe de operadores admissíveis nesse caso é dada por

$$\mathbf{\Delta}_c \triangleq \{\Delta \in \mathbf{H}_\infty^{l \times l}, \|\Delta(s)\|_\infty \leq \gamma\}. \quad (2.46)$$

Considere, agora, a seguinte classe de matrizes:

$$\mathbf{D}_d \triangleq \{D = dI_l : d \in \mathbb{C}, d \neq 0\}, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{P}_d \triangleq \{P = D^H D : D \in \mathbf{D}_d\}. \quad (2.48)$$

Mostra-se que um operador $\Delta \in \mathbf{\Delta}_c$ satisfaz a IQC (2.1) para

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} P(j\omega) & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix}, \quad P(j\omega) \in \mathbf{P}_d. \quad (2.49)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} dw &= \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \Delta(j\omega)\hat{y}(j\omega) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P(j\omega) & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \Delta(j\omega)\hat{y}(j\omega) \end{bmatrix} dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(j\omega)^H \left[p(j\omega)I - p(j\omega)\gamma^{-2}\Delta(j\omega)^H\Delta(j\omega) \right] \hat{y}(j\omega) dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(j\omega)^H \left[p(j\omega)(I - \gamma^{-2}\Delta(j\omega)^H\Delta(j\omega)) \right] \hat{y}(j\omega) dw \geq 0. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

A última desigualdade em (2.50) vem do fato de que $p(j\omega) > 0$ e de que $\bar{\lambda}(\Delta(j\omega)^H\Delta(j\omega)) = \bar{\sigma}^2(\Delta(j\omega)) \leq \gamma^2$.

2.4.4 DINÂMICA LTV INCERTA REPETIDA DIAGONALMENTE

Seja $\delta \in \mathbf{L}_\infty$ tal que $\|\delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma$. Considere um operador Δ tal que

$$\Delta(y(t)) \triangleq \begin{bmatrix} \delta(y_1(t)) \\ \dots \\ \delta(y_l(t)) \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

A classe de operadores admissíveis nesse caso é dada por

$$\mathbf{\Delta}_t \triangleq \{ \Delta(y(t)) = [\delta(y_1(t)) \ \dots \ \delta(y_l(t))]^T : \delta \in \mathbf{L}_\infty, \|\delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma \}. \quad (2.52)$$

Considere as seguintes classes de matrizes:

$$\mathbf{D}_r \triangleq \{ D \in \mathbb{R}^{l \times l} : \det D \neq 0 \}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{P}_r \triangleq \{ P = D^T D : D \in \mathbf{D}_r \}. \quad (2.54)$$

Então, mostra-se que um operador $\Delta \in \mathbf{\Delta}_t$ satisfaz a IQC (2.1) para

$$\Pi = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P \end{bmatrix}, \quad P \in \mathbf{P}_r. \quad (2.55)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt &= \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D^T D & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2} D^T D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix} dt \\
&= \|D^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2^2 - \gamma^{-2} \|D^{\frac{1}{2}} \Delta(y(t))\|_2^2 \geq 0. \quad (2.56)
\end{aligned}$$

A última desigualdade em (2.56) vem do fato de que $\|\delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma$ e da linearidade de δ , de modo que

$$\|D^{\frac{1}{2}} \Delta(y(t))\|_2^2 = \|\Delta(D^{\frac{1}{2}} y(t))\|_2^2 = \sum_{i=1}^l \|\delta(D_i^{\frac{1}{2}} y(t))\|_2^2 \leq \gamma^{-2} \sum_{i=1}^l \|D_i^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2^2 = \gamma^{-2} \|D^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2^2. \quad (2.57)$$

2.4.5 DINÂMICA LTV INCERTA DE BLOCO CHEIO

Seja $\Delta \in \mathbf{L}_{\infty}^{l \times l}$, tal que $\|\Delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma$. A classe de operadores admissíveis nesse caso é dada por

$$\mathbf{\Delta}_T \triangleq \{\Delta \in \mathbf{L}_{\infty}^{l \times l}, \|\Delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma\}. \quad (2.58)$$

Considere as classes de matrizes

$$\mathbf{D}_{rd} \triangleq \{dI_l : d \in \mathbb{R}, d \neq 0\}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{P}_{rd} \triangleq \{P = D^H D : D \in \mathbf{D}_{rd}\}. \quad (2.60)$$

Então, mostra-se que um operador $\Delta \in \mathbf{\Delta}_T$ satisfaz a IQC (2.1) para

$$\Pi = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2} P \end{bmatrix}, \quad P \in \mathbf{P}_{rd}. \quad (2.61)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt &= \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D^T D & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2} D^T D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix} dt \\
&= |d| \left(\|y(t)\|_2^2 - \gamma^{-2} \|\Delta(y(t))\|_2^2 \right) \geq 0. \quad (2.62)
\end{aligned}$$

A última desigualdade em (2.62) vem do fato de que $\|\Delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma$.

2.5 RELAÇÃO ENTRE ANÁLISE μ E IQC

O valor singular estruturado μ é creditado a [DOYLE, 1982] e [SAFONOV, 1982]. É uma medida chave na teoria de controle robusto e na caracterização da estabilidade para sistemas LTI, que emprega as definições de incertezas. Trata-se de uma grandeza que mede a robustez de sistemas incertos.

Definição 2.9. A função real não-negativa $\mu_\Delta(M)$, com M e Δ matrizes complexas, é chamada de valor singular estruturado e definida como

$$\mu_\Delta(M) = \begin{cases} \left(\min_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0\} \right)^{-1}, & \text{caso geral} \\ 0 & \text{se } \nexists \Delta \in \mathbf{\Delta} \mid \det(I - M\Delta) = 0 \end{cases}$$

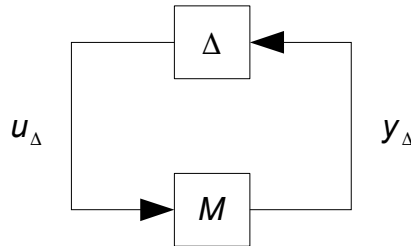


FIG. 2.5: Estrutura $M\Delta$ para análise de estabilidade robusta

A definição do valor singular estruturado na verdade expressa a menor perturbação Δ (na medida do maior valor singular) que leva à instabilidade o sistema $M - \Delta$ na FIG. 2.5. O valor singular estruturado é frequentemente representado por $\mu_\Delta(M)$, para enfatizar sua dependência com a estrutura de Δ .

A ligação do valor singular estruturado com a estabilidade de sistemas, que o transformou em um instrumento fundamental para a teoria de controle robusto, está expressa no teorema a seguir.

Teorema 2.3. Assuma que o sistema nominal M e a incerteza normalizada bloco diagonal Δ sejam estáveis. Então o sistema $M - \Delta$ da FIG. 2.5 é robustamente estável para toda incerteza admissível $\Delta \in \mathbf{B}\Delta$ se, e somente se

$$\mu_\Delta(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega. \quad (2.63)$$

Prova. Ver [SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2007]. □

O Teorema 2.3 representa uma condição necessária e suficiente. Pode ser interpretado como uma generalização do Teorema do Pequeno Ganho [ZHOU, DOYLE e GLOVER, 1996] no caso LTI incerto na medida em que a estabilidade robusta pode ser inferida pela condição

$$\mu(M(j\omega)) \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1, \forall \omega. \quad (2.64)$$

Embora possa proporcionar resultados conceituais úteis, o valor singular estruturado é difícil de ser calculado [PACKARD e DOYLE, 1993] e [FAN, TITS e DOYLE, 1991], culminando em um problema computacional inviável, por ser baseado em um conjunto de infinitas frequências $(M(j\omega), \Delta(j\omega))$. Em virtude dessa dificuldade, foram desenvolvidas na teoria de controle robusto um número de condições suficientes, de modo a tornar o problema calculável. Assim, através de manipulações algébricas, o conjunto de estruturas do modelo é representado por incertezas paramétricas, dinâmicas repetidas diagonalmente ou de bloco cheio. A partir daí, é possível se calcular limites inferior e superior para o valor singular estruturado [GU; KHARITONOV; CHEN, 2003].

No caso particular de a incerteza ser um bloco constituído de um escalar complexo repetido ($\Delta = \delta I, \delta \in \mathbb{C}$), mostra-se que o valor singular estruturado será igual ao raio espectral da matriz M . No outro extremo, se a incerteza for não estruturada, dada por um bloco complexo cheio $\Delta = \mathbb{C}^{n \times n}$, então mostra-se que o valor de μ será dado pelo maior valor singular de M . Conclui-se, assim, que

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M). \quad (2.65)$$

Os limites da EQ. (2.65) até poderiam fornecer uma aproximação do seu valor, entretanto o intervalo entre o valor inferior e o superior podem possuir uma variação muito grande, podendo não permitir aproximar de forma adequada o valor desejado. Existem algumas formas de se refinar a estimativa desses limites, vide [SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2007]. O próximo teorema trata dos limites do valor singular estruturado.

Teorema 2.4. *Assumindo que M é uma matriz complexa e Δ um conjunto arbitrário de matrizes complexas. Então:*

- $\mu_{\Delta}(M) \leq \gamma$ implica que $(I - M\Delta)$ é não singular para todo $\Delta \in \frac{1}{\gamma}\Delta$.

- $\mu_{\Delta}(M) > \gamma$ implica que existe um $\Delta \in \frac{1}{\gamma}\Delta$ para o qual $(I - M\Delta)$ é singular.

Prova. A prova do teorema é uma consequência direta de uma propriedade do valor singular estruturado.

$$\alpha\mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(\alpha M) = \mu_{\alpha\Delta}(M)$$

□

A relação de μ com as IQC se dá quando é observado o teste discutido em (2.9), conforme discutido a seguir.

Para o caso de incertezas paramétricas invariantes no tempo, o operador Δ em (2.37) satisfaz a IQC para o multiplicador em (2.41), e o teste (2.9) torna-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P(j\omega) & S(j\omega) \\ S(j\omega)^H & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} &= \\ &= G(j\omega)^H P(j\omega) G(j\omega) + S(j\omega)^H G(j\omega) + G(j\omega)^H S(j\omega) - \gamma^{-2} P(j\omega) \leq -\epsilon I, \\ &\quad \forall w \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (2.66)$$

A inequação (2.66) é satisfeita se

$$G(j\omega)^H P(j\omega) G(j\omega) + S(j\omega)^H G(j\omega) + G(j\omega)^H S(j\omega) - \gamma^{-2} P(j\omega) > 0, \quad \forall w \in [0, \infty). \quad (2.67)$$

A inequação (2.67) representa a conhecida relação para determinação do limite superior para o valor singular estruturado μ introduzida por [FAN, TITS e DOYLE, 1991].

Já no caso de incerteza dinâmica LTI, o teste (2.9) torna-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} D(j\omega)^H D(j\omega) & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2} D(j\omega)^H D(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \\ &= G(j\omega)^H D(j\omega)^H D(j\omega) G(j\omega) - \gamma^{-2} D(j\omega)^H D(j\omega) \leq -\epsilon I, \quad \forall w \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Analogamente, a inequação (2.68) é satisfeita se

$$G(j\omega)^H D(j\omega)^H D(j\omega) G(j\omega) - \gamma^{-2} D(j\omega)^H D(j\omega) < 0, \quad \forall w \in [0, \infty). \quad (2.69)$$

A partir de uma transformação de congruência com $D(j\omega)^{-1}$, descobre-se que a inequação acima é equivalente a

$$\left(D(j\omega)^{-H} G(j\omega)^H D(j\omega)^H \right) \left(D(j\omega) G(j\omega) D(j\omega)^{-1} \right) - \gamma^{-2} I < 0, \quad (2.70)$$

que por sua vez é equivalente a

$$\bar{\sigma}\left(D(j\omega)G(j\omega)D(j\omega)^{-1}\right) < \gamma^{-1}, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (2.71)$$

Conclui-se assim que, no caso de incerteza LTI de bloco cheio, uma condição suficiente para que o sistema em malha fechada seja estável é que

$$\left\|D(s)G(s)D(s)^{-1}\right\|_{\infty} < \gamma^{-1}, \quad D \in \mathbf{D}_d. \quad (2.72)$$

O mesmo raciocínio acima pode ser empregado para o caso de dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente. A condição suficiente para que o sistema em malha fechada seja estável encontra-se no lema a seguir, que será empregado no Capítulo 3.

Lema 2.5. *Seja $G(s) \in \mathbf{RH}_{\infty}^{l \times m}$, e seja Δ uma dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente pertencente à classe $\mathbf{\Delta}_t$. Então a interconexão da Fig. 2.1 é estável para toda incerteza admissível se*

$$\left\|DG(s)D^{-1}\right\|_{\infty} < \gamma^{-1}, \quad D \in \mathbf{D}_r. \quad (2.73)$$

Prova. Conforme discutido na Seção 2.4.4, $\Delta \in \mathbf{\Delta}_t$ satisfaz IQC para o multiplicador Π em (2.55). Neste caso, a condição suficiente para estabilidade dada pelo teste (2.9) torna-se

$$G(j\omega)^H D^H D G(j\omega) - \gamma^{-2} D^H D \leq -\epsilon I, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (2.74)$$

a qual é satisfeita se (2.73) é satisfeita. □

2.6 PARAMETRIZAÇÃO DE IQC

Um dos impulsionadores da análise de sistemas por IQC é o fato do problema poder ser tratado por meios computacionais de forma bastante eficiente. De acordo com [VEENMAN, SCHERER e KÖROĞLU, 2016], verificar a estabilidade e também a performance robusta de um sistema tem como problema inicial e central encontrar as IQC que satisfazem o Teorema 2.1. Conforme será discutido a seguir, o passo seguinte consiste em transformar o conjunto semi-infinito resultante de restrições no domínio da frequência, em uma condição computacional tratável.

O estabelecimento do lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) trouxe um grande avanço para a teoria de sistemas de controle, principalmente no que tange os problemas e aplicações de engenharia, pois permitiram o vínculo entre o conhecimento dos casos

do domínio da frequência e o uso de LMIs [IWASAKI e HARA, 2005]. A aplicação do teorema é ampla no presente trabalho. Conforme mostrado na Seção 2.1, a condição (2.9) trata-se uma inequação dependente da frequência, portanto de dimensão infinita. No caso em que $\Pi \in \mathbf{RL}_\infty$, a equação pode ser convertida em uma LMI, independente da frequência e de dimensão finita [WILLEMS, 1971] e [YAKUBOVICH, 1974]. Para tanto deve-se usar o lema de KYP, enunciado a seguir.

Lema 2.6. *Dadas as matrizes A , B e uma matriz Hermitiana Θ , a FDI*

$$\begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^H \Theta \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.75)$$

é válida para todo $w \in \mathbb{R}$ se e somente se a LMI

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0 \quad (2.76)$$

admitir uma solução Hermitiana P .

Prova. Ver [IWASAKI e HARA, 2005]. □

Desta forma, uma infinidade de desigualdades parametrizadas por w , representadas na FDI (2.75), podem ser avaliadas resolvendo o problema de realização convexa de dimensão finita representado na LMI (2.76).

No problema de análise via IQC discutido neste trabalho, através de simples operações algébricas é possível se reescrever o membro à esquerda no teste (2.9) na forma

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^H \sum_{q=1}^{q=q_0} x_q M_q \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Assim, a aplicação do Lema KYP indica que uma condição equivalente para a FDI (2.9) é a existência de uma matriz $P = P^\top$, $n \times n$, tal que:

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB \\ B^\top P & 0 \end{bmatrix} + \sum_{q=1}^{q=q_0} x_q M_q < 0. \quad (2.78)$$

A LMI (2.78) leva a FDI (2.9) a uma forma de um problema de otimização convexa, definido por uma LMI nas variáveis x_q e P . Esta categoria de problemas pode ser resolvida usando-se algoritmos numéricos bastante eficientes [NESTEROV e NEMIROVSKI, 1993], [BOYD, EL GHAOUI, FERON e BALAKRISHNAN, 1994].

No presente trabalho, assume-se que os multiplicadores podem ser fatorados na forma

$$\Pi(j\omega) = \Psi(j\omega)^H \mathcal{P} \Psi(j\omega), \quad (2.79)$$

com \mathcal{P} representando uma matriz real simétrica que pode ser representada por LMIs, e $\Psi(j\omega)$ uma matriz de transferência fixa. Para essa classe de multiplicadores, é conveniente a versão generalizada do Lema de KYP apresentada a seguir.

Lema 2.7. *Seja $\mathcal{P} \in \mathbb{S}^\bullet$ e $\mathcal{G} \in \mathbf{RL}^{\bullet \times \bullet}$ admitindo uma realização $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, com $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ e $\lambda(\mathcal{A}) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset$. Então, as duas condições a seguir são equivalentes:*

a) *É válida a FDI*

$$\mathcal{G}(j\omega)^H \mathcal{P} \mathcal{G}(j\omega) < 0. \quad (2.80)$$

b) *Existe uma matriz $\mathcal{X} \in \mathbb{S}^{n_g}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.81)$$

As equivalências correspondentes ainda persistem para:

- *desigualdades não estritas se, adicionalmente, o par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ for controlável,*
- *igualdades se, adicionalmente, \mathcal{A} é Hurwitz e o par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ for controlável.*

Prova. Ver [VEENMAN, SCHERER e KÖROĞLU, 2016 e RANTZER, 1996]. □

Da fatoração (2.79), percebe-se que a inequação (2.80) está associada à FDI original (2.9) através da relação

$$\mathcal{G}(j\omega) = \Psi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

A aplicação do Lema 2.7 será ilustrada no exemplo a seguir.

2.6.1 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO LEMA KYP

No caso discutido na Seção 2.4.3, em que o operador é uma dinâmica LTI incerta repetida diagonalmente, $\Delta \in \mathbf{\Delta}_C$, a FDI associado ao teste (2.9) torna-se

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} -\gamma^{-2}P(j\omega) & 0 \\ 0 & P(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (2.83)$$

O multiplicador $P(j\omega) \in \mathbf{P}$ pode ser fatorado na forma (2.79), de modo que

$$P(j\omega) = (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l)^H P_{11} (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l), \quad (2.84)$$

com $P_{11} \in \mathbb{S}^{l(\nu+1)}$ e Ψ_ν representado uma base fixa, que pode ser escolhida, por exemplo, como

$$\Psi_\nu(j\omega) \triangleq \left[1 \quad \frac{1}{(j\omega - \rho)} \quad \frac{1}{(j\omega - \rho)^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{(j\omega - \rho)^\nu} \right]^\top, \quad \rho < 0. \quad (2.85)$$

Assim, a FDI pode ser reescrita na forma do Lema 2.7, com

$$\mathcal{G}(j\omega) = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} \Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l & 0 \\ 0 & \Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

e

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -P_{11} & 0 \\ 0 & P_{11} \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO

Neste capítulo, será discutida a análise de sistemas lineares com atraso empregando a teoria de IQC.

3.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Entre os objetivos principais do trabalho, está a análise da estabilidade de sistemas com atrasos variante no tempo da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d(x(t - \tau(t))), \quad (3.1)$$

com A e $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes constantes, e $\tau(t)$ um parâmetro desconhecido variante no tempo satisfazendo

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_0, \quad |\dot{\tau}(t)| \leq d, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

Para a solução completa da equação diferencial (3.1), é necessário ter a informação sobre a condição inicial do sistema. Assim, é preciso se conhecer $x(\xi)$ e $x(\xi - \tau_0)$ no instante $t = \xi$, para $0 \leq \xi < \tau_0$. Assume-se que a solução para $x(\xi - \tau_0)$, desde que $-\tau_0 \leq \xi - \tau_0 < 0$, é definida pela função

$$x(t) = \theta(t), \quad t \in [-\tau_0, 0], \quad (3.3)$$

para a função contínua $\theta : [-\tau_0, 0] \mapsto \mathbb{R}$.

No caso de sistema com diversos atrasos, a equação de estado toma a forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_i A_i(x(t - \tau_i(t))). \quad (3.4)$$

Neste trabalho, será discutido majoritariamente o caso em (3.1) com um único atraso. A extensão dos resultados para diversos atrasos como em (3.4) não oferece nenhuma dificuldade adicional, apenas dificultaria a apresentação do assunto em virtude do aumento do peso da notação. Ao final deste capítulo, ficará claro que, graças à flexibilidade do formalismo IQC, a extensão para o caso com múltiplos atrasos pode ser considerada trivial.

Os dois operadores definidos a seguir são de particular interesse para o trabalho:

$$\mathcal{D}_\tau(y(t)) \triangleq y(t - \tau(t)), \quad (3.5)$$

$$\mathcal{S}_\tau(y(t)) \triangleq 1 - \mathcal{D}_\tau(y(t)) = y(t) - y(t - \tau(t)). \quad (3.6)$$

No lema a seguir são apresentados limites sobre o ganho \mathbf{L}_2 dos operadores \mathcal{D}_τ e $\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$.

Lema 3.1. *Suponha que $d < 1$, e considere o conjunto de funções diferenciáveis $\Upsilon \triangleq \{s(t) | s(t) \in [0, \tau_0], |\dot{s}(t)| \leq d, \forall t\}$. Então:*

$$\sup_{\tau(t) \in \Upsilon} \|\mathcal{D}_\tau\|_{\mathbf{L}_2} = \frac{1}{\sqrt{1-d}}, \quad (3.7)$$

$$\sup_{\tau(t) \in \Upsilon} \left\| \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \right\|_{\mathbf{L}_2} = \tau_0. \quad (3.8)$$

Prova. Ver (GU, CHEN e KHARITONOV, 2003) e (KAO e LINCOLN, 2004). \square

É interessante notar no Lema 3.1 que o limite sobre o ganho \mathbf{L}_2 de \mathcal{D}_τ depende do limite sobre a taxa de variação temporal de τ , mas não depende diretamente de τ_0 . Por outro lado, o limite sobre o ganho \mathbf{L}_2 de $\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ depende de τ_0 , mas não do limite d sobre a taxa de variação temporal.

3.2 REPRESENTAÇÃO DO ATRASO

Em um sistema com atraso variante no tempo, de forma diversa ao sistema com atraso invariante no tempo, uma das primeiras características que mudam na análise de estabilidade é o fato de que a energia não é preservada quando ocorre a dependência [KAO e RANTZER, 2007]. Também, pode-se dizer que se não existir restrição na variação de $\tau(t)$, ou seja, se $\dot{\tau}(t)$ não for limitado, então o operador no atraso também não será um operador limitado no espaço \mathbf{L}_2 , mesmo que o atraso seja muito pequeno. Por conseguinte, na análise de estabilidade proposta, que usa um critério no domínio da frequência por IQC, mesmo que o atraso do sistema seja variante no tempo, este parâmetro será considerado limitado, conforme a condição da equação (3.2).

Na análise de estabilidade, o primeiro passo consiste em rearranjar o sistema com atraso (3.1) na forma da interconexão de G e Δ apresentado na FIG. 2.1 e descrito pela equação (2.4). Conforme discutido a seguir, neste trabalho serão consideradas quatro representações $G - \Delta$ diferentes para o sistema com atraso.

3.2.1 CASO 1: $\Delta = \mathcal{D}_\tau$

Para se reescrever o sistema com atraso (3.1) na forma G - Δ em (2.4), basta definir a saída da planta nominal como

$$y(t) = x(t). \quad (3.9)$$

Nesse caso, a EQ. (3.1) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d(y(t - \tau(t))), \\ y(t) = x(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

Definindo-se $\Delta \triangleq \mathcal{D}_\tau$, tem-se então que o sistema com atraso (3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d(u(t)), \\ y(t) = x(t), \\ u(t) = \Delta(y(t)). \end{cases} \quad (3.11)$$

A descrição acima corresponde exatamente à configuração G - Δ em (2.4), com $\Delta = \mathcal{D}_\tau$ e

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & A_d \\ \hline I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.12)$$

3.2.2 CASO 2: $\Delta = \mathcal{S}_\tau$

Inicialmente, seja a equação de estado (3.1) reescrita como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d(x(t - \tau(t))) = (A + A_d)x(t) - A_d(x(t) - x(t - \tau(t))). \quad (3.13)$$

Novamente, seja a saída da planta nominal definida como

$$y(t) = x(t). \quad (3.14)$$

Desse modo, a EQ. (3.13) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d(y(t) - y(t - \tau(t))), \\ y(t) = x(t). \end{cases} \quad (3.15)$$

Definindo-se $\Delta \triangleq \mathcal{S}_\tau$, tem-se então que o sistema com atraso (3.1) pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d(u(t)), \\ y(t) = x(t), \\ u(t) = \Delta(y(t)). \end{cases} \quad (3.16)$$

A descrição acima corresponde exatamente à configuração G - Δ em (2.4), desta vez com $\Delta = \mathcal{S}_\tau$ e

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + A_d & -A_d \\ \hline I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.17)$$

3.2.3 CASO 3: $\Delta = \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$

Considere novamente a equação de estado com atraso reescrita como (3.13), e suponha agora que a saída da planta nominal é tomada como

$$y(t) = \dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d(x(t) - x(t - \tau(t))). \quad (3.18)$$

Além disso, seja a entrada da planta nominal tomada como

$$u(t) = x(t) - x(t - \tau(t)) = \int \dot{x}(t)dt - \mathcal{D}_\tau \left(\int \dot{x}(t)dt \right) = \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(\dot{x}(t)). \quad (3.19)$$

Em suma, a equação de estado admite a representação equivalente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d(u(t)), \\ y(t) &= \dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d(u(t)), \\ u(t) &= \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(\dot{x}(t)) = \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(y(t)). \end{cases} \quad (3.20)$$

Seja $\Delta \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$. Então, o sistema com atraso (3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d(u(t)), \\ y(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d(u(t)), \\ u(t) &= \Delta(y(t)). \end{cases} \quad (3.21)$$

A descrição acima corresponde à configuração G - Δ (2.4) com $\Delta = \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ e

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + A_d & -A_d \\ \hline A + A_d & -A_d \end{array} \right]. \quad (3.22)$$

3.2.4 CASO 4: $\Delta = \text{DIAG}(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau)$

A equação de estado em (3.20) pode ser expressa como

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(\dot{x}(t))). \quad (3.23)$$

Substituindo-se (3.1) na equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(Ax(t) + A_d(x(t - \tau(t)))) \\ &= (A + A_d)x(t) - A_d A \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(x(t)) - A_d^2 \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau(x(t)).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Sejam

$$y_1(t) = x(t), \quad (3.25)$$

$$y_2(t) = x(t), \quad (3.26)$$

e sejam

$$u_1(t) = \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(y_1(t)), \quad (3.27)$$

$$u_2(t) = \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau(y_2(t)). \quad (3.28)$$

Conclui-se, então, de (3.24) que o sistema com atraso (3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d A u_1(t) - A_d^2 u_2(t), \\ y_1(t) &= x(t), \\ y_2(t) &= x(t), \\ u_1(t) &= \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(y_1(t)), \\ u_2(t) &= \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau(y_2(t)). \end{cases} \quad (3.29)$$

A descrição acima corresponde à configuração $G\text{-}\Delta$ (2.4) com $\Delta = \text{diag}(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau)$ e

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A + A_d & -A_d A & -A_d^2 \\ \hline I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.30)$$

Conforme discutido em [GU e NICULESCU, 2000], na modelagem do Caso 4 o sistema final não é equivalente ao modelo com atraso inicial. Ocorre que neste caso, devido ao operador escolhido, há a introdução de dinâmicas adicionais, não existentes originariamente, tornando o modelo transformado mais conservativo. O conservadorismo da transformação de modelo é dimensionada em [GU e NICULESCU, 2000] de acordo com a posição dos autovalores do sistema. Mesmo com tal ressalva, a estabilidade dos sistemas modelados corresponde a uma condição suficiente para a estabilidade do sistema original. Assim, o critério de estabilidade para sistemas lineares com atraso variante no tempo pode ser avaliado segundo a condição de estabilidade do Teorema 2.1.

Por fim, cumpre destacar que da análise das plantas nominais (3.12), (3.17), (3.22) e (3.30) percebe-se que uma condição necessária para a estabilidade do sistema com atraso é que a matriz A , no Caso 1, e a matriz $(A + A_d)$ nos Casos 2, 3 e 4, devem ser Hurwitz.

3.3 IQC SATISFEITAS PELO OPERADOR \mathcal{S}_τ

Nesta seção, são apresentadas IQC satisfeitas pelo operador \mathcal{S}_τ , que será o operador utilizado no presente trabalho para a análise via IQC. Os resultados apresentados foram extraídos de [KAO e RANTZER, 2007].

3.3.1 IQC 1

Inicialmente, note que se $|\dot{\tau}| \leq d < 1$, então o operador \mathcal{D}_τ satisfaz a IQC

$$\Pi_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d}X_1 & 0 \\ 0 & -X_1 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

com $X_1 = X_1' \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^\top \Pi_{\mathcal{D}} \left(\begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} \right) dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d}X_1 & 0 \\ 0 & -X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{1-d} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^\top X_1 y(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_\tau(y(t))^\top X_1 \mathcal{D}_\tau(y(t)) dt \\ &= \frac{1}{1-d} \|X_1^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2 - \|X_1^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_\tau(y(t))\|_2 \\ &= \frac{1}{1-d} \|X_1^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2 - \|\mathcal{D}_\tau(X_1^{\frac{1}{2}} y(t))\|_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

A última desigualdade decorre do limite superior do Lema 3.1.

O resultado acima permite mostrar que, se $|\dot{\tau}| \leq d < 1$ para todo t , então o operador \mathcal{S}_τ satisfaz a IQC

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 & X_1 \\ X_1 & -X_1 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

com $X_1 = X_1' \geq 0$. Note que

$$\mathcal{S}_\tau(y(t)) = y(t) - y(t - \tau(t)) = y(t) - \mathcal{D}_\tau(y(t)), \quad (3.34)$$

de modo que

$$\mathcal{D}_\tau(y(t)) = y(t) - \mathcal{S}_\tau(y(t)). \quad (3.35)$$

Como o operador \mathcal{D}_τ satisfaz a IQC $\Pi_{\mathcal{D}}$, tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^T \Pi_{\mathcal{D}} \left(\begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} \right) dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) - \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d}X_1 & 0 \\ 0 & -X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) - \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d}X_1 & 0 \\ 0 & -X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 & X_1 \\ X_1 & -X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \geq 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ou seja, o operador \mathcal{S}_τ de fato satisfaz a IQC definida por Π_1 .

3.3.2 IQC 2

Se $\tau(t) \in [0, \tau_0]$ e $|\dot{\tau}| \leq d < 1$, para todo t , então o operador \mathcal{S}_τ satisfaz qualquer IQC definida por

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} |\phi(jw)|^2 X_2 & 0 \\ 0 & -X_2 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

onde $X_2 = X_2' \geq 0$, e $\phi(s)$ é qualquer função de transferência racional limitada satisfazendo

$$\begin{cases} |\phi(jw)| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} & , \text{ se } \tau_0|w| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \\ |\phi(jw)| > \tau_0|w| & , \text{ se } \tau_0|w| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \end{cases} \quad (3.38)$$

Para demonstrar tal fato, note inicialmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \mathcal{S}_\tau(\hat{y})(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi_2 \left(\begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \mathcal{S}_\tau(\hat{y})(j\omega) \end{bmatrix} \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left((\phi(j\omega)\hat{y}(j\omega))^H X_2(\phi(j\omega)\hat{y}(j\omega)) - (\mathcal{S}_\tau\hat{y})(j\omega))^H X_2\mathcal{S}_\tau\hat{y}(j\omega) \right) d\omega \\
&= \|X^{\frac{1}{2}}\phi(y(t))\|_{\mathbf{L}_2}^2 - \|X^{\frac{1}{2}}\mathcal{S}_\tau(y(t))\|_{\mathbf{L}_2}^2 \\
&= \|\phi(X^{\frac{1}{2}}y(t))\|_{\mathbf{L}_2}^2 - \|\mathcal{S}_\tau(X^{\frac{1}{2}}y(t))\|_{\mathbf{L}_2}^2 \\
&= \|\phi(X^{\frac{1}{2}}y(t))\|_{\mathbf{L}_2}^2 - \|\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1}(\phi(X^{\frac{1}{2}}y(t)))\|_{\mathbf{L}_2}^2. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Logo, conclui-se que Π_2 definirá uma IQC se $\|\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1}\|_{\mathbf{L}_2} \leq 1$.

Para mostrar que $\|\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1}\|_{\mathbf{L}_2} \leq 1$, seja v qualquer função em \mathbf{L}_2 . Além disso, seja v decomposta em $v_1 + v_2$ tais que

$$\text{Supp}(|\hat{v}_1(j\omega)|) = \Omega_1, \quad \text{Supp}(|\hat{v}_2(j\omega)|) = \Omega_2, \quad (3.40)$$

com

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &\triangleq \left\{ \omega : \tau_0|\omega| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \right\}, \\
\Omega_2 &\triangleq \left\{ \omega : \tau_0|\omega| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \right\}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1}$ é um operador linear, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1} \circ (v_1 + v_2) &= \mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1} \circ v_1 + \mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1} \circ v_2 \\
&= \mathcal{S}_\tau \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \right)^{-1} \circ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \right) \phi^{-1} \circ v_1 \\
&\quad + \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{\tau_0 s} \circ (\tau_0 s) \circ \phi^{-1} \circ v_2. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1} \circ v_1\|_{\mathbf{L}_2} &\leq \left\| \mathcal{S}_\tau \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \right)^{-1} \right\|_{\mathbf{L}_2} \left\| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \right) \phi^{-1} \circ v_1 \right\|_{\mathbf{L}_2} \\
&\leq \left\| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \right) \phi^{-1} \circ v_1 \right\|_{\mathbf{L}_2} \leq \|v_1\|_{\mathbf{L}_2}. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Na primeira inequação acima, foi utilizado o fato de que $\|\mathcal{S}_\tau\|_{\mathbf{L}_2} \leq 1 + \|\mathcal{D}_\tau\|_{\mathbf{L}_2}$, de acordo com o Lema 3.1. Na segunda inequação, foi utilizado o fato de que $\text{Supp}(|\hat{v}_1(j\omega)|) = \Omega_1$ e de que $|\phi(j\omega)| > 1 + 1/\sqrt{1-d}$ para todo $\omega \in \Omega_1$. Analogamente,

$$\left\| \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{\tau_0 s} \circ (\tau_0 s) \circ \phi^{-1} \circ v_2 \right\|_{\mathbf{L}_2} \leq \left\| \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{\tau_0 s} \right\|_{\mathbf{L}_2} \left\| (\tau_0 s) \circ \phi^{-1} \circ v_2 \right\|_{\mathbf{L}_2} \leq \|v_2\|_{\mathbf{L}_2}. \quad (3.43)$$

Logo, conclui-se que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1} \circ v\|_{\mathbf{L}_2} &\leq \|\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1} \circ v_1\|_{\mathbf{L}_2} + \|\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1} \circ v_2\|_{\mathbf{L}_2} \\ &\leq \|v_1\|_{\mathbf{L}_2} + \|v_2\|_{\mathbf{L}_2} = \|v_1 + v_2\|_{\mathbf{L}_2} = \|v\|_{\mathbf{L}_2}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

de modo que, de fato, $\|\mathcal{S}_\tau \circ \phi^{-1}\|_{\mathbf{L}_2} \leq 1$.

Um exemplo de $\phi(s)$ que satisfazendo (3.38) é

$$\phi(s) = k \frac{\tau_0^2 s^2 + c\tau_0 s}{\tau_0^2 s^2 + a\tau_0 s + kc}, \quad (3.45)$$

com $k = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}}$, $a = \sqrt{2kc}$ para $c \in \mathbb{R}^+$.

3.3.3 IQC 3

Se $\tau(t) \in [0, \tau_0]$ e $|\dot{\tau}| \leq d < 2$, para todo t , então o operador \mathcal{S}_τ satisfaz qualquer IQC definida por

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} |\beta(jw)|^2 X_3 & 0 \\ 0 & -X_3 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

com $X_3 = X_3' \geq 0$, e com qualquer função de transferência $\beta(s)$ satisfazendo

$$|\beta(jw)| \geq g(w) + \delta, \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad (3.47)$$

para $\delta \in \mathbb{R}^+$ e

$$g(\omega) \triangleq \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{2-d}} & , \text{ se } |\omega| > \frac{\pi}{\tau_0} \\ \sqrt{\frac{8}{2-d}} \left| \text{sen} \left(\frac{\pi}{\tau_0} \right) \right| & , \text{ se } |\omega| \leq \frac{\pi}{\tau_0}. \end{cases} \quad (3.48)$$

A demonstração desse resultado é idêntica àquela da Seção 3.3.2 para a IQC definido por Π_2 . A diferença é que, aqui, a condição chave é dada por $\|\mathcal{S}_\tau \circ \beta^{-1}\|_{\mathbf{L}_2} \leq 1$. O leitor é direcionado para [KAO e RANTZER, 2007] para a prova deste fato.

Um exemplo de transferência $\beta(s)$ que satisfaz a equação (3.47) é

$$\beta(s) = k \frac{\tau_0^2 s^2 + c\tau_0 s}{\tau_0^2 s^2 + a\tau_0 s + b} + \delta, \quad (3.49)$$

com $k = \sqrt{8/(2-d)}$, $a = \sqrt{6,5 + 2b}$, $b = \sqrt{50}$, $c = \sqrt{12,5}$ e δ é um número positivo arbitrariamente pequeno.

3.3.4 IQC 4

Considere o multiplicador

$$\Pi_4(j\omega) = \begin{bmatrix} \tau_0^2 \omega^2 X_4 & 0 \\ 0 & -X_4 \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

com $X_4 = X_4' \geq 0$, e o sinal

$$v(t) \triangleq \frac{d}{dt} y(t). \quad (3.51)$$

Do Lema 3.1, tem-se que

$$\tau_0^2 \|X_4^{\frac{1}{2}} v(t)\|_{\mathbf{L}_2} - \|\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(X_4^{\frac{1}{2}} v(t))\|_{\mathbf{L}_2} \geq 0. \quad (3.52)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau_0^2 \|X_4^{\frac{1}{2}} v(t)\|_{\mathbf{L}_2} - \|\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}(X_4^{\frac{1}{2}} v(t))\|_{\mathbf{L}_2} &= \\ &= \tau_0^2 \|X_4^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}(y(t))\|_{\mathbf{L}_2} - \|\mathcal{S}_\tau(X_4^{\frac{1}{2}} y(t))\|_{\mathbf{L}_2} \\ &= \tau_0^2 \|X_4^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}(y(t))\|_{\mathbf{L}_2} - \|X_4^{\frac{1}{2}} \mathcal{S}_\tau(y(t))\|_{\mathbf{L}_2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} (j\omega) \hat{y}(j\omega) \\ \hat{\mathcal{S}}_\tau(y)(j\omega) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \tau_0^2 X_4 & 0 \\ 0 & -X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega) \hat{y}(j\omega) \\ \hat{\mathcal{S}}_\tau(y)(j\omega) \end{bmatrix} dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{\mathcal{S}}_\tau(y)(j\omega) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \tau_0^2 \omega^2 X_4 & 0 \\ 0 & -X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{\mathcal{S}}_\tau(y)(j\omega) \end{bmatrix} dw \geq 0. \end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que o operador $\mathcal{S}_\tau(t)$ satisfaz a IQC definida por Π_4 .

Cabe destacar que como Π_4 não é um operador limitado em \mathbf{L}_2 , a forma quadrática definida por Π_4 não é definida em todo aquele espaço. Assim, o operador \mathcal{S}_τ satisfaz a IQC apenas quando existe derivada em \mathbf{L}_2 do sinal de entrada. Portanto, se o termo $j\omega$ puder ser absorvido no sistema nominal G , então Π_4 define uma IQC. Isto acontece quando a função G é estritamente própria.

Observando que a função G deve ser estritamente própria, para permitir usar a IQC Π_4 , e também conforme a restrição enunciada na equação (3.2), onde atenta que $\dot{\tau}$ deve ser limitado, de acordo com o valor máximo d , a lista de IQC válidas para o operador \mathcal{S}_τ está sumarizada na Tabela 3.1.

TAB. 3.1: Validade das IQC para o operador \mathcal{S}_τ

	IQC válidas
$d < 1$	Π_1, Π_2, Π_3 e Π_4
$1 \leq d < 2$	Π_3 e Π_4
$d \geq 2$	Π_4

3.4 ANÁLISE VIA LMI

Suponha que o sistema com atraso (3.1) tenha sido representado na forma LFT da Fig. 2.1 de acordo com a forma discutida no Caso 2 da Seção 3.2.2. Ou seja, $\Delta = \mathcal{S}_\tau$ e a planta nominal é dada por

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + A_d & -A_d \\ \hline I & 0 \end{array} \right],$$

como em (3.17). Conforme discutido na Seção 3.3, para $d < 1$, o operador $\Delta = \mathcal{S}_\tau$ satisfaz uma IQC para

$$\Pi(j\omega) = \sum_{i=1}^4 x_i \Pi_i, \quad x_i \geq 0. \quad (3.53)$$

O objetivo aqui é se obter a LMI de análise associada ao multiplicador $\Pi(j\omega)$ acima. Por uma questão de simplicidade da apresentação, o multiplicador associado a Π_2 não será levado em conta, de modo que

$$\begin{aligned} \Pi(j\omega) &= x_1 \Pi_1 + x_3 \Pi_3(j\omega) + x_4 \Pi_4(j\omega) = \\ &= \left[\begin{array}{cc} \frac{d}{1-d} X_1 + |\beta(j\omega)|^2 X_3 + \tau_0^2 w^2 X_4 & X_1 \\ X_1 & -X_1 - X_3 - X_4 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (3.54)$$

com $X_1 = X_1^\top \geq 0$, $X_3 = X_3^\top \geq 0$ e $X_4 = X_4^\top \geq 0$. Neste caso, o teste (2.9) do Teorema 2.1 torna-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d} X_1 + |\beta(j\omega)|^2 X_3 + \tau_0^2 w^2 X_4 & X_1 \\ X_1 & -X_1 - X_3 - X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = \\ &= G(j\omega)^H \frac{d}{1-d} X_1 G(j\omega) + G(j\omega)^H \beta(j\omega)^H X_3 \beta(j\omega) G(j\omega) \\ &\quad + G(j\omega)^H (j\omega)^H \tau_0^2 X_4 (j\omega) G(j\omega) \\ &\quad + G(j\omega)^H X_1 + X_1 G(j\omega) - X_1 - X_3 - X_4 \leq -\epsilon I, \forall w \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Seja (A_G, B_G, C_G, D_G) uma realização em espaço de estado mínima para $G(s)$, $(A_\beta, B_\beta, C_\beta, D_\beta)$ uma realização em espaço de estado mínima para $\beta(s)$, e (A_s, B_s, C_s, D_s) uma realização em espaço de estado mínima para a transferência $sG(s)$. Então, mostra-se que

$$\begin{bmatrix} \beta(s)G(s) \\ sG(s) \\ G(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} A_G & 0 & 0 & B_G \\ B_\beta C_G & A_\beta & 0 & B_\beta D_G \\ 0 & 0 & A_s & B_s \\ \hline D_\beta C_G & C_\beta & 0 & D_\beta D_G \\ 0 & 0 & C_s & D_s \\ C_G & 0 & 0 & D_G \end{array} \right]. \quad (3.56)$$

Seja, agora,

$$\mathcal{A} \triangleq \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 \\ B_\beta C_G & A_\beta & 0 \\ 0 & 0 & A_s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} \triangleq \begin{bmatrix} B_G \\ B_\beta D_G \\ B_s \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\mathcal{C}_\beta \triangleq [D_\beta C_G \quad C_\beta \quad 0], \quad \mathcal{D}_\beta \triangleq D_\beta D_G, \quad (3.58)$$

$$\mathcal{C}_s \triangleq [0 \quad 0 \quad C_s], \quad \mathcal{D}_s \triangleq D_s, \quad (3.59)$$

$$\mathcal{C}_G \triangleq [C_G \quad 0 \quad 0], \quad \mathcal{D}_G \triangleq D_G. \quad (3.60)$$

Por fim, seja

$$\Phi(s) \triangleq (sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B}. \quad (3.61)$$

Então, com as definições acima tem-se que

$$\begin{bmatrix} \beta(s)G(s) \\ sG(s) \\ G(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C}_\beta & \mathcal{D}_\beta \\ \mathcal{C}_s & \mathcal{D}_s \\ \mathcal{C}_G & \mathcal{D}_G \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_\beta \Phi(s) + \mathcal{D}_\beta \\ \mathcal{C}_s \Phi(s) + \mathcal{D}_s \\ \mathcal{C}_G \Phi(s) + \mathcal{D}_G \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Substituindo-se (3.62) em (3.55), obtém-se

$$\begin{aligned} & (\Phi(j\omega)^H \mathcal{C}_G^T + \mathcal{D}_G^T) \frac{d}{1-d} X_1 (\mathcal{C}_G \Phi(j\omega) + \mathcal{D}_G) + (\Phi(j\omega)^H \mathcal{C}_\beta^T + \mathcal{D}_\beta^T) X_3 (\mathcal{C}_\beta \Phi(j\omega) + \mathcal{D}_\beta) \\ & + (\Phi(j\omega)^H \mathcal{C}_s^T + \mathcal{D}_s^T) \tau_0^2 X_4 (\mathcal{C}_s \Phi(j\omega) + \mathcal{D}_s) \\ & + (\Phi(j\omega)^H \mathcal{C}_G^T + \mathcal{D}_G^T) X_1 + X_1 (\mathcal{C}_G \Phi(j\omega) + \mathcal{D}_G) \end{aligned}$$

$$-X_1 - X_3 - X_4 \leq -\epsilon I. \quad (3.63)$$

Seja

$$\Theta \triangleq \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^T & \Theta_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

com

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &\triangleq \mathcal{C}_G^T \frac{d}{1-d} X_1 \mathcal{C}_G + \mathcal{C}_\beta^T X_3 \mathcal{C}_\beta + \mathcal{C}_s^T \tau_0^2 X_4 \mathcal{C}_s, \\ \Theta_{12} &\triangleq \mathcal{C}_G^T \frac{d}{1-d} X_1 \mathcal{D}_G + \mathcal{C}_\beta^T X_3 \mathcal{D}_\beta + \mathcal{C}_s^T \tau_0^2 X_4 \mathcal{D}_s + \mathcal{C}_G^T X_1, \\ \Theta_{22} &\triangleq \mathcal{D}_G^T \frac{d}{1-d} X_1 \mathcal{D}_G + \mathcal{D}_\beta^T X_3 \mathcal{D}_\beta + \mathcal{D}_s^T \tau_0^2 X_4 \mathcal{D}_s + \mathcal{D}_G^T X_1 + X_1 \mathcal{D}_G - X_1 - X_3 - X_4. \end{aligned}$$

Então, reorganizando-se a inequação (3.63) a partir da definição de Θ em (3.64), conclui-se finalmente que o teste (2.9) do Teorema 2.1 para o multiplicador (3.54) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} G(jw) \\ I \end{bmatrix}^H \Pi(jw) \begin{bmatrix} G(jw) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(jw) \\ I \end{bmatrix}^H \Theta \begin{bmatrix} \Phi(jw) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I, \forall w \in [0, \infty). \quad (3.65)$$

Assim, pela aplicação do Lema KYP, tem-se que uma condição suficiente para estabilidade do sistema 3.1 é a existência de uma matriz $P = P^T > 0$, e matrizes $X_1 = X_1^T \geq 0$, $X_3 = X_3^T \geq 0$ e $X_4 = X_4^T \geq 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \Theta(X_1, X_3, X_4) < 0, \quad (3.66)$$

com Θ definido em (3.64).

3.5 TRATANDO O ATRASO COMO INCERTEZA

Nesta seção, são obtidas condições de estabilidades baseadas no fato de que os operadores introduzidos na Seção 3.2 podem ser interpretados como pertencentes à classe Δ_t de dinâmicas LTV incertas repetidas diagonalmente da Seção 2.4.4. Os resultados estão compilados nos teoremas a seguir, extraídos de [ZHU, QI e CHEN, 2015].

Teorema 3.1. *Suponha que a matriz A_0 é Hurwitz. Então, a dinâmica com atraso (3.1) sujeito às condições (3.2) é estável se qualquer uma das condições abaixo for verdadeira:*

$$a) \|(sI - A_0)^{-1} A_1\|_\infty < \sqrt{1-d}$$

$$b) \inf_{D \in \mathbf{D}_{rd}} \|D^{-1}(sI - A_0)^{-1}A_1D\|_\infty < \sqrt{1 - \bar{d}}$$

$$c) \inf_{D \in \mathbf{D}_r} \|D^{-1}(sI - A_0)^{-1}A_1D\|_\infty < \sqrt{1 - \bar{d}}$$

Prova. Será provado inicialmente o item (c). Conforme discutido na Seção 3.2.1, o sistema com atraso (3.1) pode ser representado na forma G - Δ em (2.4) com $\Delta \triangleq \mathcal{D}_\tau$ e com planta nominal $G(s)$ dada por

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & A_d \\ \hline I & 0 \end{array} \right] = (sI - A)^{-1}A_d. \quad (3.67)$$

De acordo com o Lema 3.1, $\mathcal{D}_\tau \in \mathbf{\Delta}_t$ para $\gamma = 1/\sqrt{1 - \bar{d}}$. Então, a condição do item (c) pode ser obtida a partir da aplicação do Lema 2.5 considerando-se a planta $G(s)$ em (3.67). As condições nos itens (a) e (b) decorrem do fato de que $\{I\} \subset \mathbf{D}_{rd} \subset \mathbf{D}_r$. \square

É importante ressaltar que da prova do Teorema 3.1 percebe-se que as condições apresentadas naquele teorema estão em ordem decrescente de conservadorismo. O resultado a seguir é obtido analogamente considerando-se o operador $\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ como uma dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente.

Teorema 3.2. *Suponha que a matriz $A_0 + A_1$ é Hurwitz, e seja*

$$\hat{M}(s) \triangleq -(A_0 + A_1)(sI - (A_0 + A_1))^{-1}A_1 - A_1. \quad (3.68)$$

Então, a dinâmica com atraso (3.1) sujeito às condições (3.2) é estável se qualquer uma das condições abaixo for verdadeira:

$$a) \|\hat{M}(s)\|_\infty < \tau_0^{-1}$$

$$b) \inf_{D \in \mathbf{D}_{rd}} \|D^{-1}\hat{M}(s)D\|_\infty < \tau_0^{-1}$$

$$c) \inf_{D \in \mathbf{D}_r} \|D^{-1}\hat{M}(s)D\|_\infty < \tau_0^{-1}$$

Prova. A prova é análoga à do Teorema 3.1. Conforme discutido na Seção 3.2.3, o sistema com atraso (3.1) pode ser representado na forma G - Δ em (2.4) com $\Delta \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ e com planta nominal $G(s)$ dada por

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + A_d & -A_d \\ \hline A + A_d & -A_d \end{array} \right] = -(A_0 + A_1)(sI - (A_0 + A_1))^{-1}A_1 - A_1,$$

correspondendo a $\hat{M}(s)$ em (3.68). De acordo com o Lema 3.1, $\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \in \mathbf{\Delta}_t$ para $\gamma = \tau_0$. Então, a condição do item (c) pode ser obtida a partir da aplicação do Lema 2.5 considerando-se a planta nominal em (3.68). As condições nos itens (a) e (b) decorrem novamente do fato de que $\{I\} \subset \mathbf{D}_{rd} \subset \mathbf{D}_r$. \square

Cabe destacar que a prova do Teorema 3.2 é baseada no fato de que o ganho \mathbf{L}_2 do operador $\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ é limitado por τ_0 . Ora, esse mesmo fato é utilizado em (3.52) para mostrar que o operador \mathcal{S}_τ satisfaz a IQC para Π_4 . Conclui-se, assim, que o resultado contido no Teorema 3.2 é equivalente à análise IQC para o operador \mathcal{S}_τ com a IQC para Π_4 apenas.

O último resultado a ser apresentado no teorema a seguir corresponde à consideração do operador $\text{diag}(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau)$ como constituído por duas dinâmicas LTV incertas repetidas diagonalmente.

Teorema 3.3. *Suponha que a matriz $A_0 + A_1$ é Hurwitz, e sejam*

$$\hat{M}(s) = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} (sI - (A_0 + A_1))^{-1} \begin{bmatrix} A_1 A_0 & A_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{I}{\sqrt{1-d}} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Então, a dinâmica com atraso (3.1) sujeito às condições (3.2) é estável se qualquer uma das condições abaixo for verdadeira:

$$a) \|\hat{M}(s)P\|_\infty < \tau_0^{-1}$$

$$b) \inf_{d>0} \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & d^{-1}I \end{bmatrix} \hat{M}(s)P \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & dI \end{bmatrix} \right\|_\infty < \tau_0^{-1}$$

$$c) \inf_{D \in \mathbf{D}_{rd}} \|D^{-1}\hat{M}(s)PD\|_\infty < \tau_0^{-1}$$

$$d) \inf_{D_1, D_2 \in \mathbf{D}_r} \left\| \begin{bmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & D_2^{-1} \end{bmatrix} \hat{M}(s)P \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \tau_0^{-1}$$

Prova. Inicialmente, note que, de acordo com o Lema 3.1,

$$\|\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau\|_{\mathbf{L}_2} \leq \|\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}\|_{\mathbf{L}_2} \|\mathcal{D}_\tau\|_{\mathbf{L}_2} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-d}}. \quad (3.71)$$

Conforme discutido na Seção 3.2.4, o sistema com atraso (3.1) pode ser representado na forma $G\text{-}\Delta$ em (2.4) com $\Delta \triangleq \text{diag}(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau)$ e com planta nominal $G(s)$ dada

por

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A + A_d & -A_d A & -A_d^2 \\ \hline I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} (sI - (A_0 + A_1))^{-1} \begin{bmatrix} A_1 A_0 & A_1^2 \end{bmatrix},$$

correspondendo a $\hat{M}(s)$ em (3.69). Trata-se aqui do caso discutido na Seção 2.2 de um operador misto com $\Delta_1 \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ e $\Delta_2 \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau$, onde os sub-operadores são tratados como uma dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente com limite sobre o ganho \mathbf{L}_2 de τ_0 e $\tau_0/\sqrt{1-d}$, respectivamente. Neste caso, a condição suficiente para estabilidade dada pelo teste (2.9) é satisfeita se

$$\begin{bmatrix} \hat{M}(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^H D_1 & 0 \\ 0 & D_2^H D_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\tau_0^{-2} D_1^H D_1 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\tau_0}{\sqrt{1-d}}\right)^{-2} D_2^H D_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.72)$$

para $D_1, D_2 \in \mathbf{D}_r$.

Seja

$$\hat{D} \triangleq \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

e considere a matriz P em (3.70). Então, a inequação (3.72) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{M}(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \hat{D}^H \hat{D} & 0 \\ 0 & -\tau_0^{-2} P^{-1} \hat{D}^H \hat{D} P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M}(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P \hat{M}(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P^{-1} \hat{D}^H \hat{D} P^{-1} & 0 \\ 0 & -\tau_0^{-2} P^{-1} \hat{D}^H \hat{D} P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \hat{M}(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

que por sua vez é equivalente a

$$\left\| \hat{D} P^{-1} P \hat{M}(s) P \hat{D}^{-1} \right\|_\infty = \left\| \hat{D} (\hat{M}(s) P) \hat{D}^{-1} \right\|_\infty < \tau_0, \quad (3.75)$$

que corresponde à condição no item (d). As condições nos itens (a) a (c) decorrem do fato de que

$$\{I\} \subset \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & dI \end{bmatrix}, d \neq 0 \right\} \subset \mathbf{D}_{rd} \subset \left\{ \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, D_1, D_2 \in \mathbf{D}_r \right\}. \quad (3.76)$$

□

3.6 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, serão expostos alguns exemplos ilustrando como a metodologia apresentada pode ser aplicada para analisar de sistemas com atrasos.

3.6.1 PLANTA 1

Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)). \quad (3.77)$$

Nesse problema, retirado de [KAO e RANTZER, 2007], deseja-se analisar quais os valores máximo de atraso e de taxa de variação do atraso para o qual o sistema (3.77) permanece estável.

Será realizada a análise IQC da Seção 3.3, na qual a planta é representada na forma $G - \Delta$ com o operador Δ dado por \mathcal{S}_τ . Note que a equação de estado do sistema em malha fechada já se encontra na forma padrão (3.1).

O resultado da análise de estabilidade via IQC para esse problema está sintetizado na FIG. 3.1, na qual consta a curva do valor máximo de atraso τ_0 que a planta suporta antes da instabilidade em função da taxa de variação máxima d para o atraso.

Para a formulação dos resultados numéricos, posto que a estrutura $G - \Delta$ e a representação do atraso já estão definidas, as equações envolvidas se apresentam nos moldes da Seção 3.2.2, obtendo

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + A_d & -A_d \\ \hline I & 0 \end{array} \right], \quad \Delta = \mathcal{S}_\tau.$$

A aferição da estabilidade é realizada pontualmente, através da factibilidade das LMIs que traduzem na verdade a FDI associada à análise IQC. Em suma, para cada valor da taxa de variação elencada é apreciado o valor máximo de atraso que o sistema comporta.

O primeiro passo é construir, para uma determinada taxa de variação do atraso, as funções auxiliares $\phi(s)$ e $\beta(s)$ de acordo com (3.45) e (3.49) respectivamente.

Por fim, aplica-se finalmente o Lema KYP para se determinar a LMI de estabilidade (3.66). Nesse momento é iniciado o procedimento de otimização, que resumidamente equivale em verificar se existe uma solução factível para a LMI dentro de um intervalo de tolerância.

A análise em si baseia-se em um algoritmo que implementa o método da bisseção. Neste método, é suposto um intervalo qualquer onde hipoteticamente o valor desejado, que é o atraso máximo, se encontra, lembrando que a taxa é considerada como fixa. O aperfeiçoamento dos limites desse intervalo é incrementado a cada passo, na medida que o intervalo vai se reduzindo até estar dentro de uma margem aceitável. Para cada teste é resolvida a LMI correspondente, tomando o valor da taxa constante e obtendo assim como resposta o valor do atraso. Em seguida, é feita a devida alteração no limite superior ou inferior do intervalo de teste, dependendo se foi encontrada ou não uma solução possível para a LMI. O processo se encerra quando o intervalo converge para um valor dentro da precisão exigida. Alcançado o valor, o processo é retomado para o próximo valor de interesse de taxa de variação.

Embora não seja um algoritmo muito rápido, possui muitos pontos positivos pois permite a convergência para um valor médio, uma boa precisão, não é difícil de ser programado além de ser estável.

No trabalho, o algoritmo foi implementado no MATLAB e os cálculos das LMIs foram efetuados pelas ferramentas YALMIP e SEDUMI, que são, respectivamente, uma plataforma para construção de problemas de desigualdade de matrizes e um solucionador de desigualdades.

Também é mostrado na FIG. 3.1 o resultado obtido em [KAO e RANTZER, 2007] para esse mesmo problema, utilizando essencialmente a mesma técnica IQC. Na figura é possível perceber o fato de que os valores encontrados nos dois trabalhos são compatíveis, evidenciando a validade do algoritmo implementados para a análise IQC.

A fim de se estudar a contribuição das IQC no intervalo referente a uma taxa de variação do atraso menor que 1, foram levantadas as curvas do valor máximo de atraso τ_0 que a planta suporta antes da instabilidade em função da taxa de variação máxima d para duas situações diferentes: uma na qual a IQC Π_1 não é levada em conta mas Π_2 é, e outra sem a IQC Π_2 mas com Π_1 , mantendo-se em ambos os casos as IQC Π_3 e Π_4 . Tais curvas são mostradas na FIG. 3.2, na qual é sobreposto o resultado mais geral obtido com todas as IQC. Conforme pode ser observado, o resultado torna-se muito mais conservador no intervalo quando a IQC Π_1 não é levada em conta. Outra observação interessante é que a retirada de Π_2 não acarretou uma alteração substancial do resultado.

Na FIG. 3.3 é mostrado novamente as curvas do valor máximo de atraso τ_0 que a planta suporta antes da instabilidade em função da taxa de variação máxima d , obtidas pela

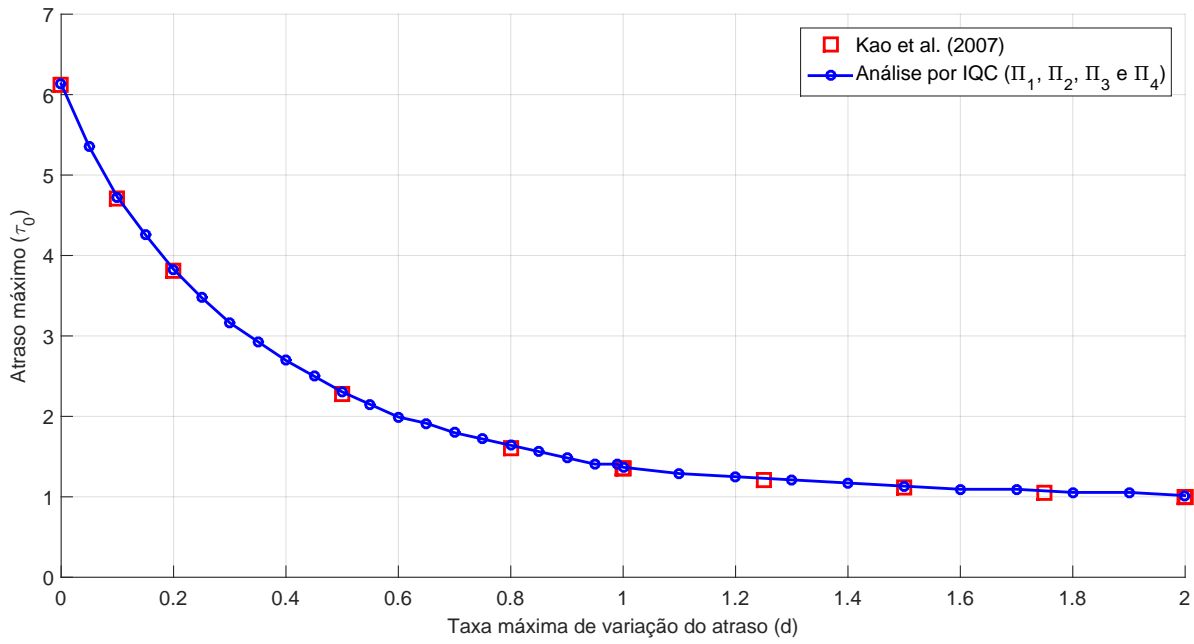


FIG. 3.1: Atraso máximo admitido pela planta (3.77) em função do limite sobre a taxa de variação do atraso

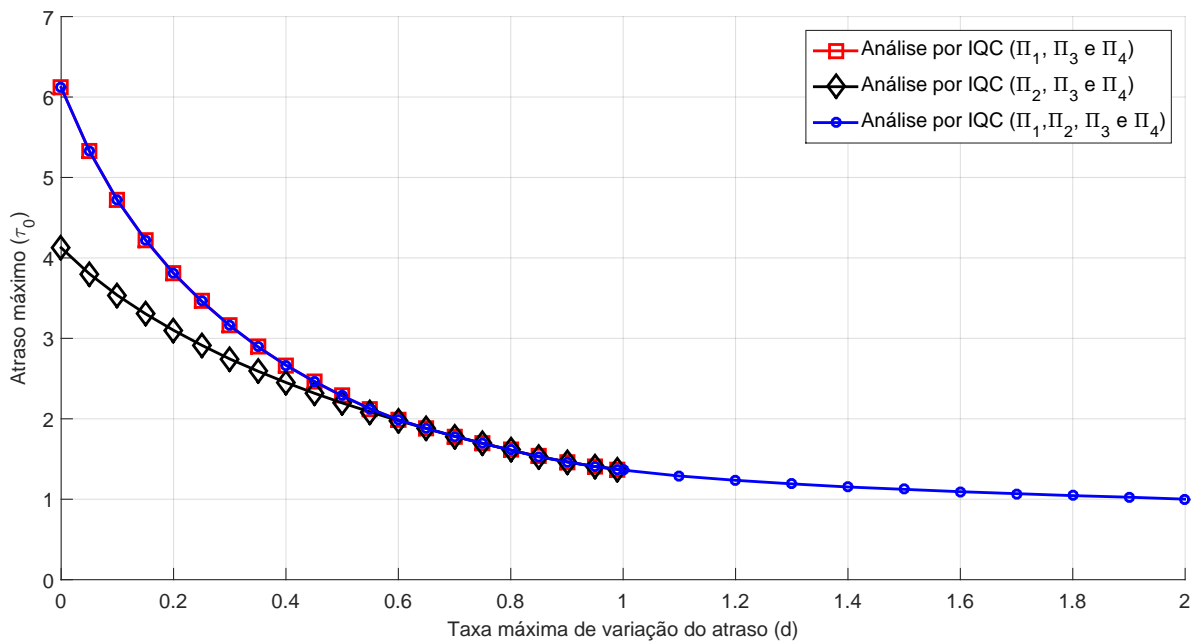


FIG. 3.2: Contribuição das IQC Π_1 e Π_2 na análise de (3.77),

análise IQC dentro do intervalo $d < 1$ mas considerando-se apenas duas das quatro IQC disponíveis. Observa-se que a simplificação dada pela consideração de apenas duas IQC leva a um resultado bastante conservador. Este breve exemplo sugere que uma combinação que produz um resultado confiável e que permite reduzir o custo computacional é dada pelo uso conjunto das IQC Π_1 , Π_3 e Π_4 .

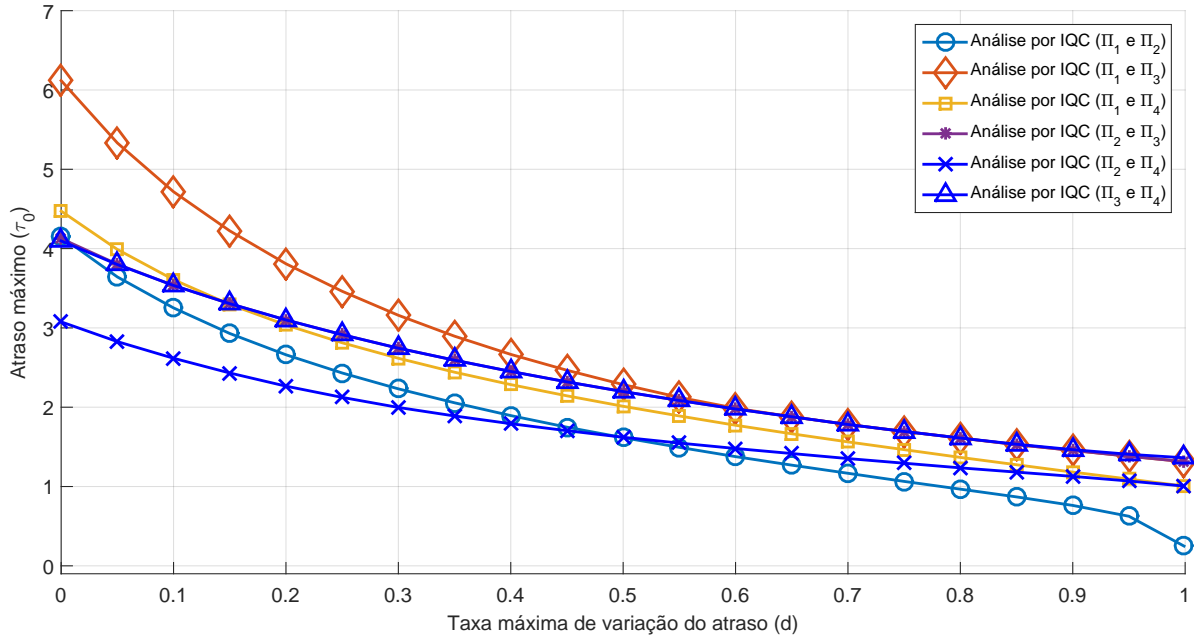


FIG. 3.3: Contribuição das diversas IQC na análise de (3.77)

Análises complementares são realizadas de acordo com o proposto na Seção 3.5, sendo os resultados exibidos na FIG. 3.4, onde são colocadas juntas as condições de estabilidade dos Teoremas 3.2 e 3.3, que são baseado nas premissas do Teorema do Pequeno Ganho. Dado que, para $d = 0$,

$$\|D^{-1}(sI - A)^{-1}A_dD\|_\infty = 1.1112$$

o Teorema 3.1 não pode ser empregado. Já o Teorema 3.2 reflete uma situação independente da taxa de variação do sinal, assim, percebe-se que o valor da análise por IQC para um valor superior a 2 coincide assintoticamente com o resultado do teorema. Por fim, o Teorema 3.3, mostra o comportamento do sistema com atraso. Cabe lembrar que nesses casos as incertezas foram modeladas pela classe Δ_t de dinâmicas LTV incertas repetidas diagonalmente e por isso o ultimo resultado é tão pessimista frente a análise por IQC.

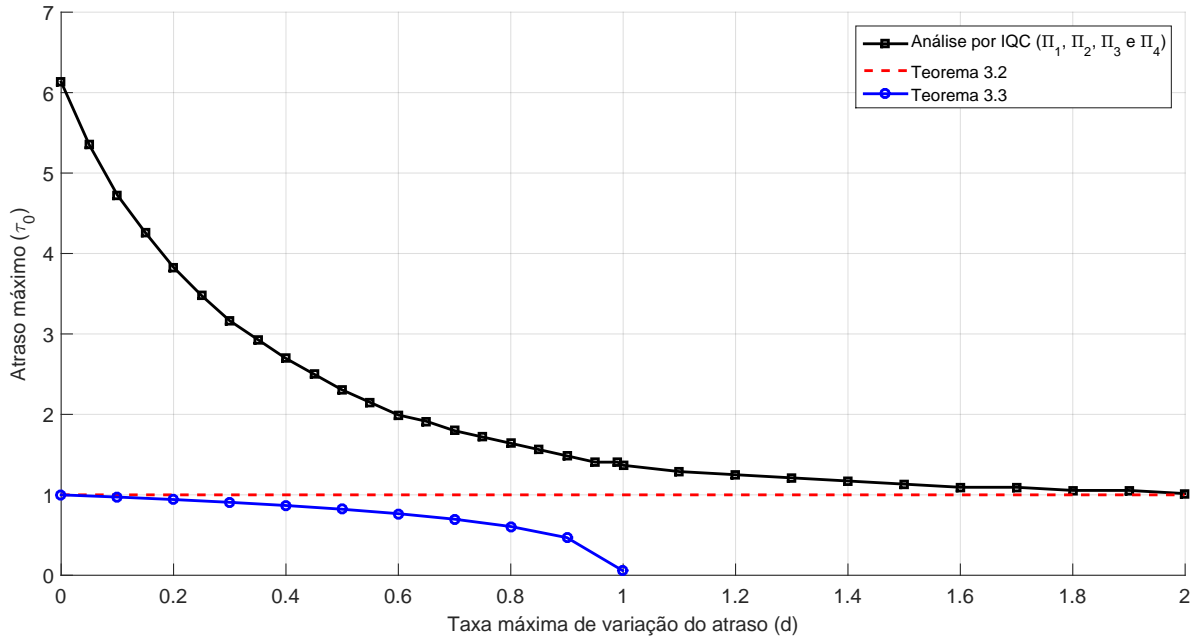


FIG. 3.4: Atraso máximo admitido pela planta (3.77)

3.6.2 PLANTA 2

Serão apresentados dois exemplos citados em [ZHU, QI e CHEN, 2015] com intuito de reforçar os pontos principais apontados anteriormente. Considere o sistema da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)), \quad (3.78)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & -1 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.22 & -0.3 \\ 0.2 & 0.72 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

De forma semelhante ao exemplo anterior, o objetivo do exemplo é verificar o atraso máximo admitido pelo sistema em função do limite sobre sua taxa de variação. Os procedimentos realizados seguem os passos mostrados para a análise por IQC.

O primeiro ponto que será mostrado é o comportamento geral do sistema quando empregado em conjunto as quatro IQC de interesse da seção 3.3. O protocolo é o mesmo, inicialmente são definidas as funções de apoio das IQC e a IQC geral oriunda da composição das mesmas. É feito um trabalho algébrico para organizar as equações nas condições de aplicação do Lema 2.6. Organizada as equações, é aplicado o Lema KYP obtendo a LMI de estabilidade. É iniciado o processo de otimização, que fornecerá o resultado

numérico do atraso máximo para a estabilidade para uma determinada taxa de interesse e assim reiniciando o ciclo. O resultado desta análise se encontra na FIG. 3.5. Como o autor do exemplo não fez suas análise utilizando IQC não será feita uma segunda validação do algoritmo. Isto posto, na FIG. 3.5, além do resultado principal, são sobrepostas as análises suprimindo ou incluindo Π_1 e Π_2 de cada vez, com o objetivo de perceber a contribuição das mesmas.

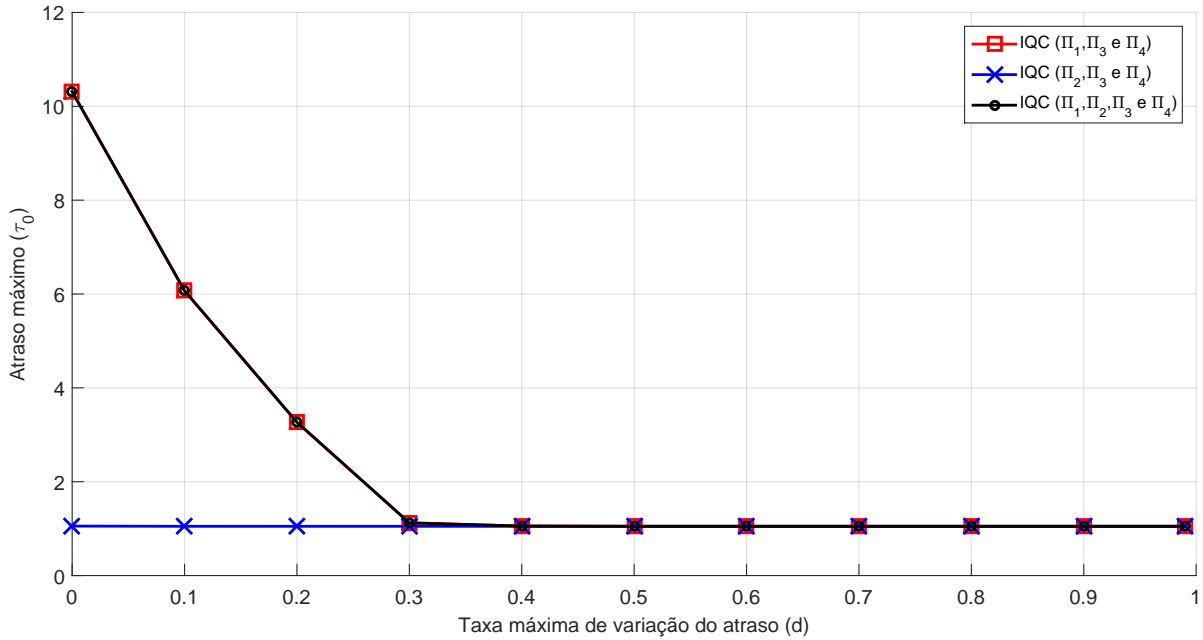


FIG. 3.5: Atraso máximo admitido pela planta (3.78) para diferentes IQC

No que tange o Teorema 3.1, em princípio este poderia ser aplicado, pois A é estável. Entretanto, para $d = 0$, obtém-se

$$\|D^{-1}(sI - A)^{-1}A_dD\|_{\infty} = 1.0030,$$

de modo que nenhuma das condições daquele teorema podem ser aplicadas. Não é possível, assim, concluir se o sistema é estável independente do atraso. Já os requisitos para emprego dos Teoremas 3.2 e 3.3 são satisfeitos.

Os resultados encontrados para as análise são apresentados na FIG.3.6 e estão sobrepostos juntamente com a análise por IQC empregando Π_1 , Π_3 e Π_4 .

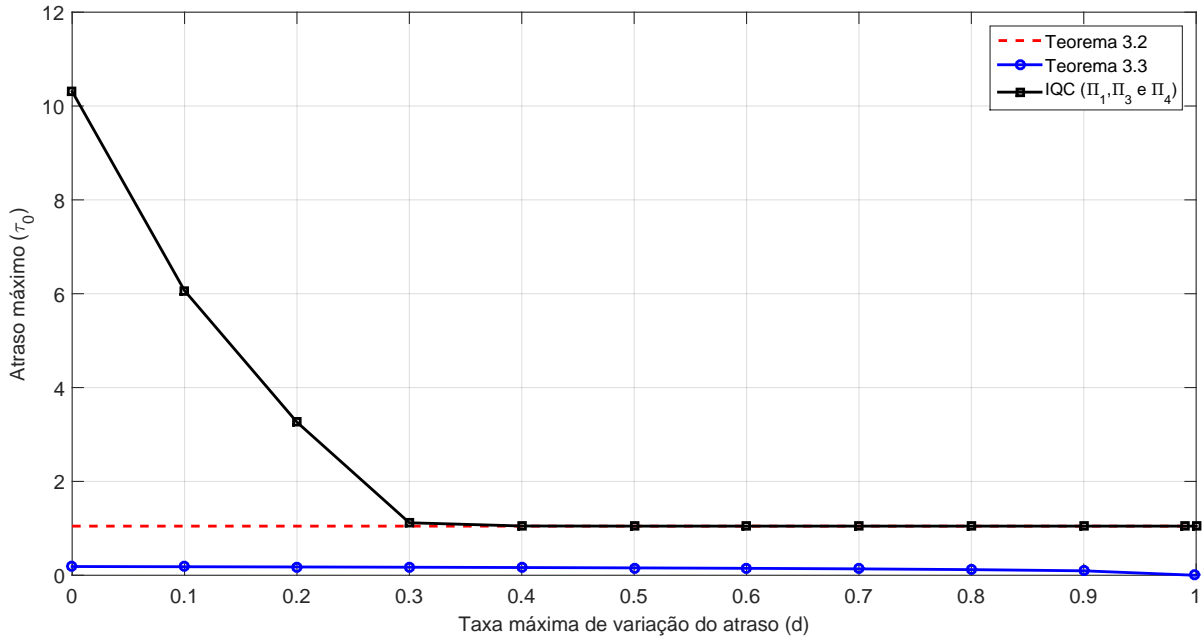


FIG. 3.6: Atraso máximo admitido pela planta (3.78) obtidos por diferentes técnicas

3.6.3 PLANTA 3

O segundo exemplo citado em [ZHU, QI e CHEN, 2015] traz o sistema no mesmo formato da EQ. (3.78), mas desta vez

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & -1 \\ -0.2 & -0.4 \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.4 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

De forma análoga, foi realizada a análise de estabilidade do sistema com atraso por IQC. Os procedimentos para este cálculo já foram apresentados e o resultado se encontra na FIG. 3.7.

A percepção dos pesos do emprego ou não das IQC Π_1 e Π_2 no intervalo $d < 1$ também pode ser vista na FIG. 3.7, e mais uma vez corroboram o fato do baixo impacto de Π_2 na solução numérica e importância de Π_1 .

É possível perceber neste caso, que A é instável uma vez que $\lambda(A) = (0.0472, -0.8472)$. Isto implica o não atendimento as condições fundamentais do Teorema 3.1, impedindo seu uso. O mesmo não acontece para os Teoremas 3.2 e 3.3 fornecendo informações adicionais.

Os resultados encontrados pelos teorema e pela análise IQC são sobrepostos nas FIG. 3.8.

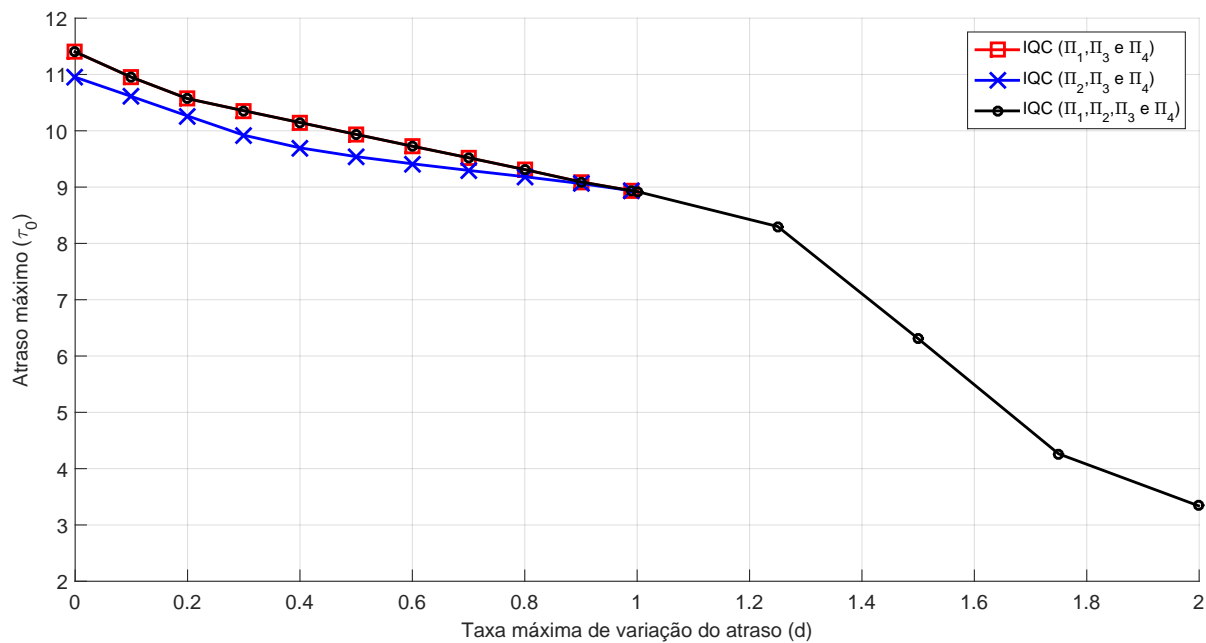


FIG. 3.7: Atraso máximo admitido pela planta (3.80) para diferentes IQC

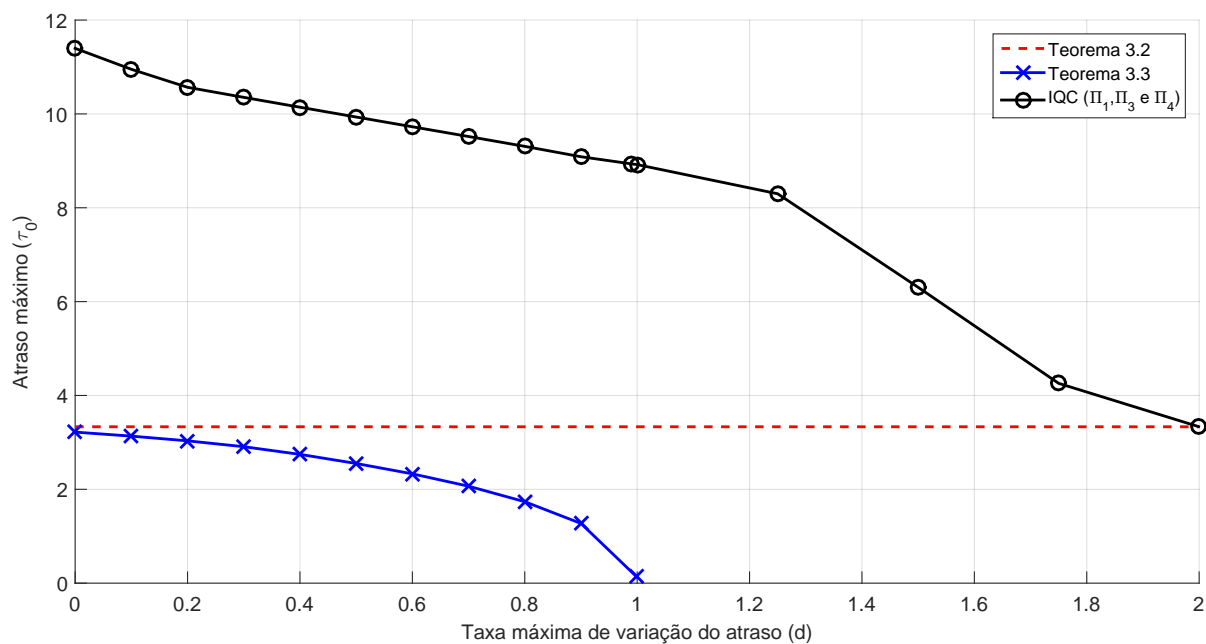


FIG. 3.8: Atraso máximo admitido pela planta (3.80) obtidos por diferentes técnicas

3.6.4 PLANTA 4

Considere o sistema apresentado por [GU e NICULESCU, 2000]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0.2 & -5.8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)). \quad (3.81)$$

O resultado final para a análise via IQC do maior atraso tolerado pelo sistema é mostrado na FIG. 3.9. No caso, é mostrado o resultado da análise com as IQC Π_1 , Π_3 e Π_4 , pois já foi evidenciada a pouca contribuição de Π_2 .

O ponto que se diferencia nesta análise é que não foi encontrado na análise um valor para o atraso máximo quando o atraso é dado como constante. Isto fica claro na FIG. 3.9, pois a tendência da curva é seguir assintoticamente o eixo vertical. O fato de não haver um valor máximo de tempo indica que para um atraso constante o sistema é sempre estável.

No entanto, o sistema não é estável independente do atraso. A análise IQC mostra o comportamento da estabilidade à medida que uma maior taxa de variação é admitida para o atraso. Corrobora essa análise o resultado da aplicação do Teorema 3.1. Para $d = 0$, tem-se

$$\|D^{-1}(sI - A_0)^{-1}A_1D\|_\infty = 0,9590,$$

portanto estável independente do atraso. Já para $d > 0.0803$, a condição para a estabilidade independente do atraso fornecida pelo Teorema 3.1 não é mais observada.

Os resultados dos Teoremas 3.2 e 3.3 também foram calculados. Todas as análises realizadas estão agrupadas na FIG.3.9.

3.6.5 PLANTA 5

Seja o sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1.5 & 2.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) \quad (3.82)$$

Este exemplo, retirado de [GU e NICULESCU, 2000], não traz muitas surpresas. É mais bem comportado que o anterior e fica de base numérica para futuras pesquisas que porventura se orientem por este trabalho.

A análise IQC utilizou Π_1 , Π_3 e Π_4 e o resultado final é encontrado na FIG.3.10, juntamente com os resultados dos Teoremas 3.2 e 3.3.

Como o sistema não é estável independente do atraso, não pode ser empregado o Teorema 3.1. Isto fica claro pois mesmo com A estável nenhuma das condições é satisfeita.

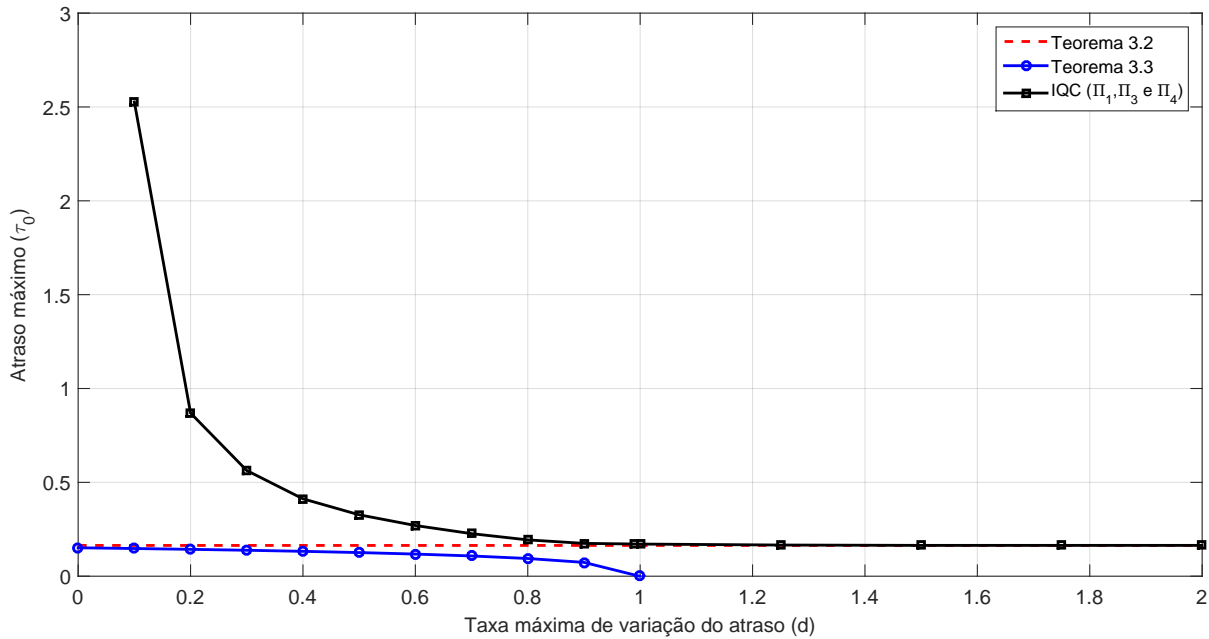


FIG. 3.9: Atraso máximo admitido pela planta (3.81)

Mais uma vez foi satisfeita a condição assintótica entre o Teorema 3.2 e o valor da análise IQC para valores superiores a 2 na taxa de variação. E o Teorema 3.2 permaneceu com um resultado pessimista, assim como nos outros exemplos.

3.6.6 SISTEMA COM MULTIPLOS ATRASOS

Neste exemplo será explorado um pouco da capacidade matemática que a estrutura das IQC oferecem. A proposta é abordar um problema complexo, que no caso será um sistema com múltiplos atrasos, como a composição de problemas mais simples, de atraso único.

Considere agora o sistema apresentado por [GU, CHEN e KHARITONOV, 2003] da forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1(t)) + A_2x(t - \tau_2(t)) + A_3x(t - \tau_3(t)) \quad (3.83)$$

com

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

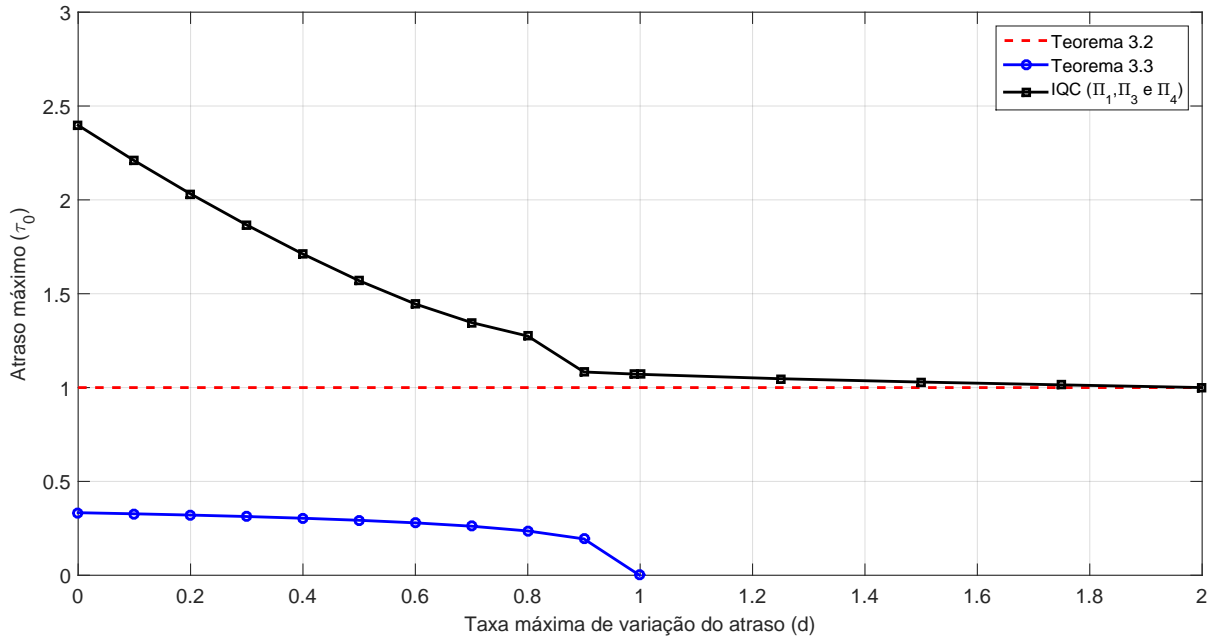


FIG. 3.10: Atraso máximo admitido pela planta (3.82)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Será realizada uma análise de estabilidade por IQC para conhecer qual é o atraso máximo que o sistema suporta para uma determinada taxa de variação do sinal de atraso. Neste caso, como as funções de atraso $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ e $\tau_3(t)$ são independentes, é considerado como atraso máximo (τ_0) que o sistema suporta ainda dentro da estabilidade, o atraso máximo comum (τ_i) em todas as parcelas.

$$\tau_0 = \bar{\tau} = \min \bar{\tau}_i \quad (3.84)$$

Dentro desse escopo, realizando o procedimento congênere ao que foi feito nos exemplos anteriores, o sistema também pode ser rearranjado em uma estrutura $G - \Delta$, mas desta

vez o operador (misto) será da forma de uma matriz diagonal

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_\tau & & \\ & \mathcal{S}_\tau & \\ & & \mathcal{S}_\tau \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

e o sistema nominal pode ser expandido para uma representação mais completa

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ \hline I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.86)$$

Como existe no sistema a presença de vários atrasos concomitantes, a análise IQC consistirá de se explorar as características de cada atraso para aferir a estabilidade. Para tanto serão consideradas as IQC Π_1 , Π_3 e Π_4 na solução por simplificação, uma vez que foi visto nos outros exemplos a pouca contribuição de Π_2 , que satisfazem o operador de atraso \mathcal{S}_τ e também o disposto na Seção 2.2.

O presente problema envolve um operador misto constituído por 3 sub-operadores idênticos dados por \mathcal{S}_τ , de modo que cada sub-operador satisfaz IQC para o multiplicador

$$\begin{aligned} \Pi_\tau(j\omega) &\triangleq x_1\Pi_1 + x_3\Pi_3(j\omega) + x_4\Pi_4(j\omega) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 + |\beta(j\omega)|^2X_3 + \tau_0^2\omega^2X_4 & X_1 \\ X_1 & -X_1 - X_3 - X_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Note que o multiplicador $\Pi_\tau(j\omega)$ acima associado ao sub-operador \mathcal{S}_τ pode ser fatorado na forma

$$\Pi_\tau(j\omega) = \Psi_\tau^H(j\omega)P_\tau\Psi_\tau(j\omega), \quad (3.88)$$

para

$$\Psi_\tau(j\omega) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} |\beta(j\omega)|^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tau_0^2\omega^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

e

$$P_\tau = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 & X_1 \\ X_1 & -X_1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} X_3 & 0 \\ 0 & -X_3 \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} X_4 & 0 \\ 0 & -X_4 \end{bmatrix} & \\ & & & \end{bmatrix}. \quad (3.90)$$

Considere, agora, a matriz de permutação de colunas

$$\Lambda = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

tal que

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\Pi_{\tau,1}, \Pi_{\tau,1}, \Pi_{\tau,1}) & \text{diag}(\Pi_{\tau,o}, \Pi_{\tau,o}, \Pi_{\tau,o}) \\ \text{diag}(\Pi_{\tau,o}^H, \Pi_{\tau,o}^H, \Pi_{\tau,o}^H) & \text{diag}(\Pi_{\tau,2}, \Pi_{\tau,2}, \Pi_{\tau,2}) \end{bmatrix} = \Lambda^T \text{diag}(\Pi_\tau, \Pi_\tau, \Pi_\tau) \Lambda. \quad (3.91)$$

Seja $\Pi(j\omega)$ o multiplicador global associado ao operador misto em (3.85). Com o intuito de se usar o lema KYP na sua forma generalizada no Lema 2.7, conclui-se então que o multiplicador $\Pi(j\omega)$ admite a fatoração discutida na Seção 2.6 dada por

$$\Pi(j\omega) = \Psi^H(j\omega) \mathcal{P} \Psi(j\omega), \quad (3.92)$$

com

$$\Psi(j\omega) \triangleq \begin{bmatrix} \Psi_\tau(j\omega) & & \\ & \Psi_\tau(j\omega) & \\ & & \Psi_\tau(j\omega) \end{bmatrix} \Lambda, \quad (3.93)$$

$$\mathcal{P} \triangleq \begin{bmatrix} P_\tau & & \\ & P_\tau & \\ & & P_\tau \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

A partir deste ponto, o expediente para a obtenção da solução numérica é o mesmo dos exemplos anteriores. Inicialmente, a função $\Psi(j\omega)$ é calculada individualmente para cada

parcela do atraso e introduzida na EQ. (3.88). Da mesma forma a taxa d é considerada constante e P pode ser calculado na EQ. (3.90). O que foi ligeiramente modificado foi a forma de apresentação da LMI, passando para uma mais ampla, que de qualquer modo, deve ser solucionada a cada passo do processo de otimização. Assim ao final do processo é possível traçar o gráfico do atraso máximo que o sistema suporta quando é variada a taxa do sinal com atraso em todas as parcelas do sistema (3.83), estando este resultado final representado na FIG. 3.11.

O estudo realizado em [GU, CHEN e KHARITONOV, 2003] tem foco para um sistema de atraso constante, que nesse caso teve como resposta o atraso máximo de 0,3783 s. Para fins de comparação, o resultado que deve ser confrontado é o valor da FIG. 3.11 onde a curva encontra o eixo das ordenadas ($d = 0$), uma vez que a análise por IQC traz mais informações.

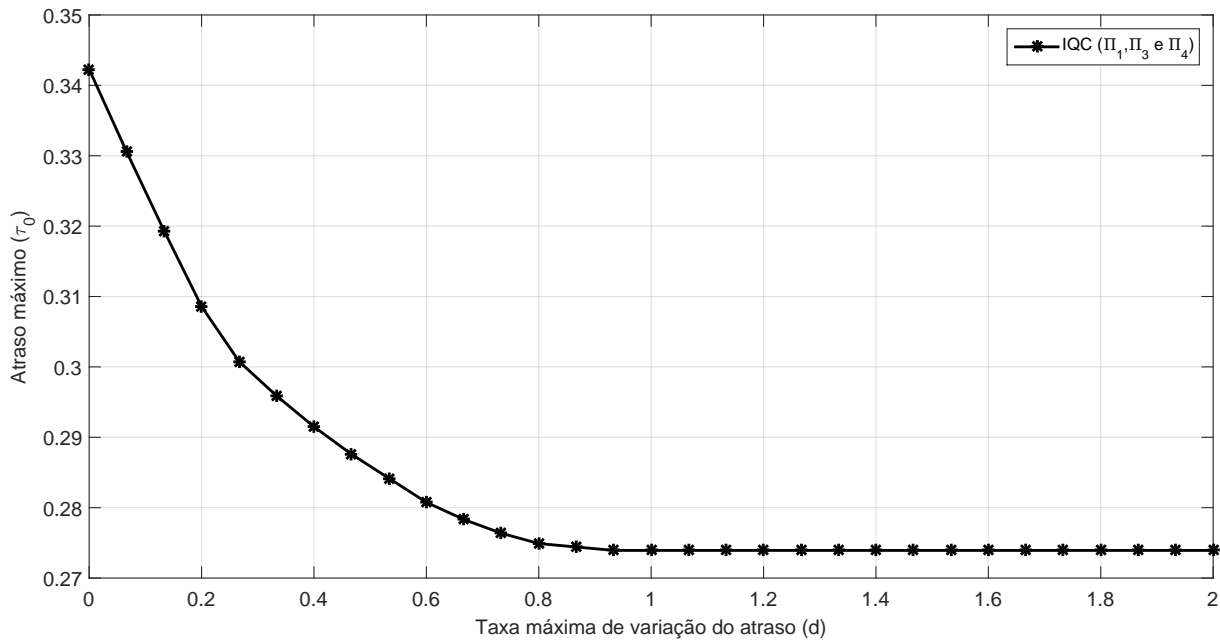


FIG. 3.11: Atraso máximo do sistema (3.83) com múltiplos atrasos

3.6.7 SISTEMA COM CONTROLE BASEADO EM OBSERVADOR

Considere a seguinte planta com atraso arbitrário na saída:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t - \tau) \end{cases}, \quad (3.95)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para esse sistema, foi projetado em [MARQUES, 2016] um controlador baseado em observador de estados, cuja dinâmica é descrita por

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t - \tau)) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) \end{cases}, \quad (3.96)$$

com

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

O diagrama em blocos do sistema em malha fechada é representado na FIG. 3.12.

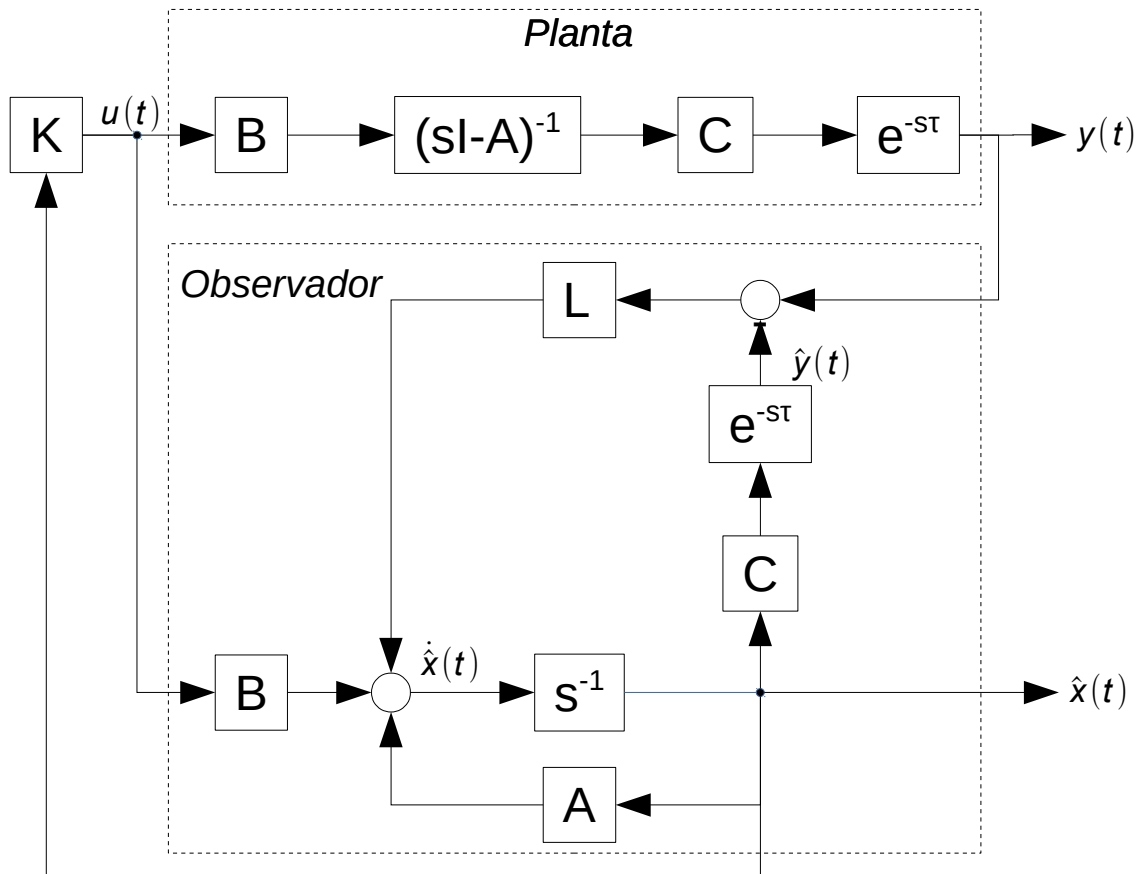


FIG. 3.12: Diagrama de blocos do sistema com realimentação e observador de estado

Utilizando-se a metodologia proposta neste capítulo, será feita uma análise sobre a estabilidade do sistema controlado para saber qual é atraso máximo possível que o sistema em malha fechada suporta antes da instabilidade.

A partir das EQ. (3.95) e (3.96), conclui-se que a dinâmica do sistema em malha fechada é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ 0 & A - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ LC & -LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \tau) \\ \hat{x}(t - \tau) \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

A equação de estado do sistema em malha fechada (3.97) já se encontra na forma padrão (3.1), com

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & -BK \\ 0 & A - BK \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ LC & -LC \end{bmatrix}. \quad (3.98)$$

A partir desse ponto, pode ser realizada a análise IQC da Seção 3.3, para uma representação $G - \Delta$ onde o operador Δ é dado por \mathcal{S}_τ .

Uma vez reformulado o problema na estrutura $G - \Delta$ para o operador \mathcal{S}_τ , a estabilidade do sistema é apreciada através da verificação da factibilidade das LMI que traduzem a FDI associada à análise IQC. As funções auxiliares são construídas a partir da EQ. (3.49) para uma determinada taxa de variação do atraso. São feitos os ajustes nas equações para se encontrar a matriz Θ que atende os requisitos do Teorema 2.6. Através da aplicação do Lema KYP para determina-se a LMI associada. É estimado um valor inicial máximo para o atraso e através de sucessivas interações do algoritmo com o método da bissecção que foi implementado resulta o valor do atraso que convergiu para dentro da tolerância desejada. Se a solução for factível para a LMI, é retomado o processo iterativo do método da bissecção para um valor maior de atraso, caso contrário para um valor menor. O resultado desse algoritmo pode ser visto no gráfico exposto na FIG. 3.13.

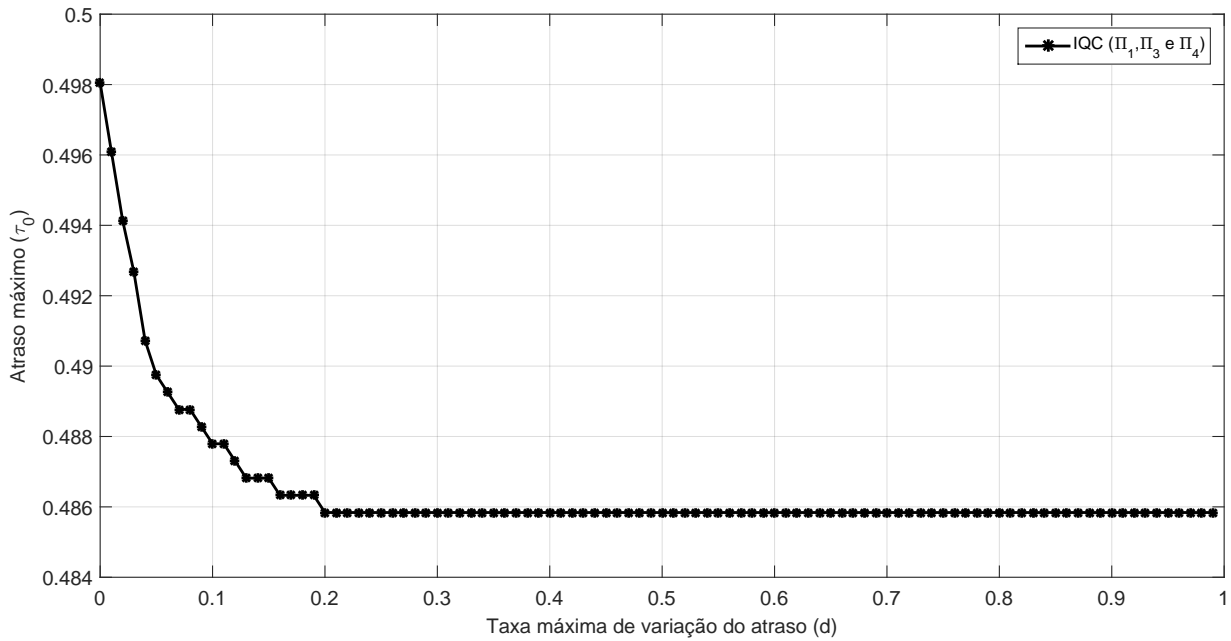


FIG. 3.13: Atraso máximo para o sistema com controle baseado em observador

É interessante notar que a matriz A possui como autovalores 1.2361 e -3.2361, portanto um autovalor instável. Desta forma, empregando o critério de Nyquist na função de transferência do observador, o ponto -1 deve ser envolvido uma vez no sentido anti-horário para que o sistema seja estável. A FIG. 3.14 traz as curvas de Nyquist para três valores de atrasos constantes. No caso, foram traçados os atrasos $\tau_1 = 0,48s$, $\tau_2 = 0,50s$ e $\tau_3 = 0,52s$.

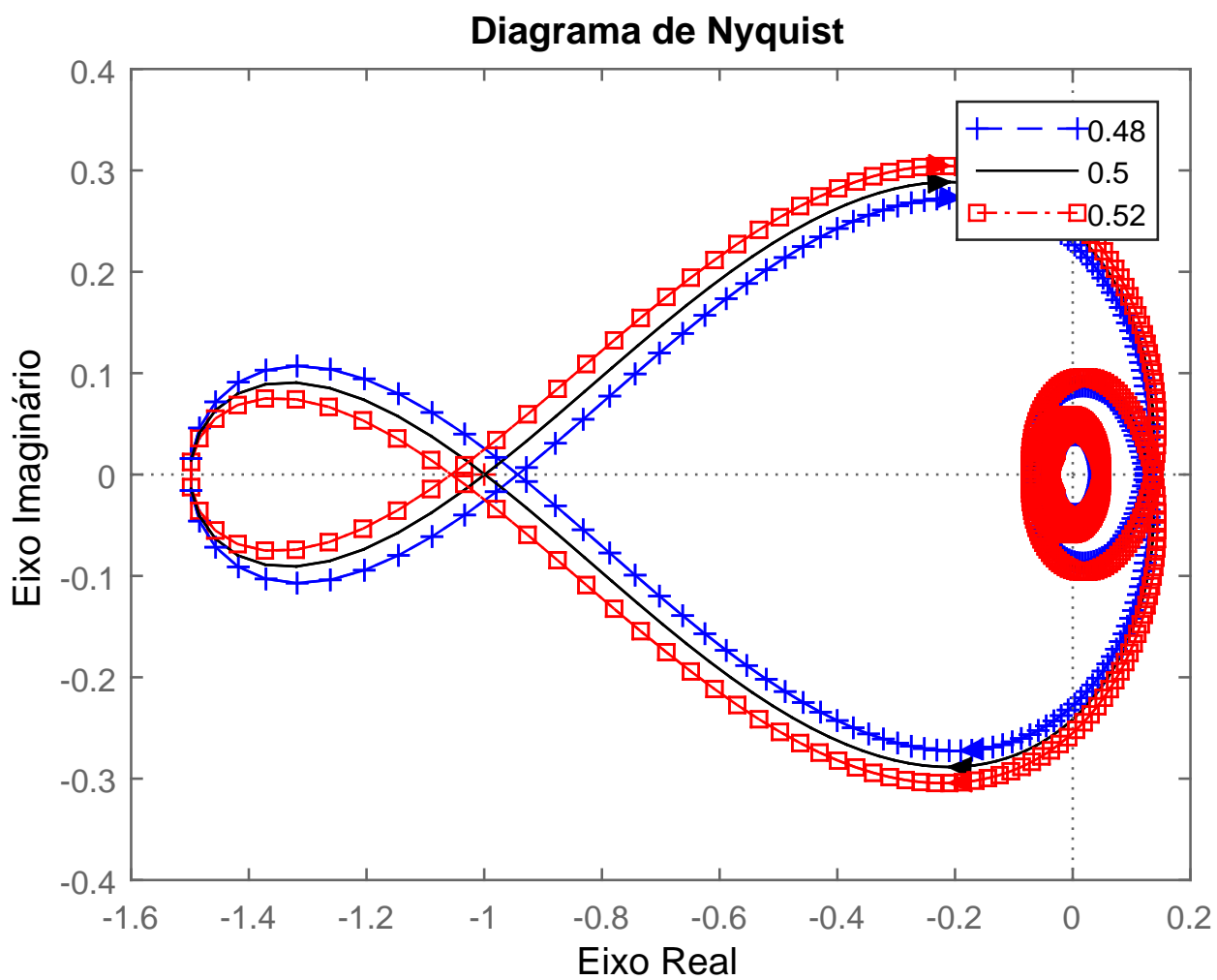


FIG. 3.14: Diagrama de Nyquist do observador de estados para o sistema com atrasos distintos

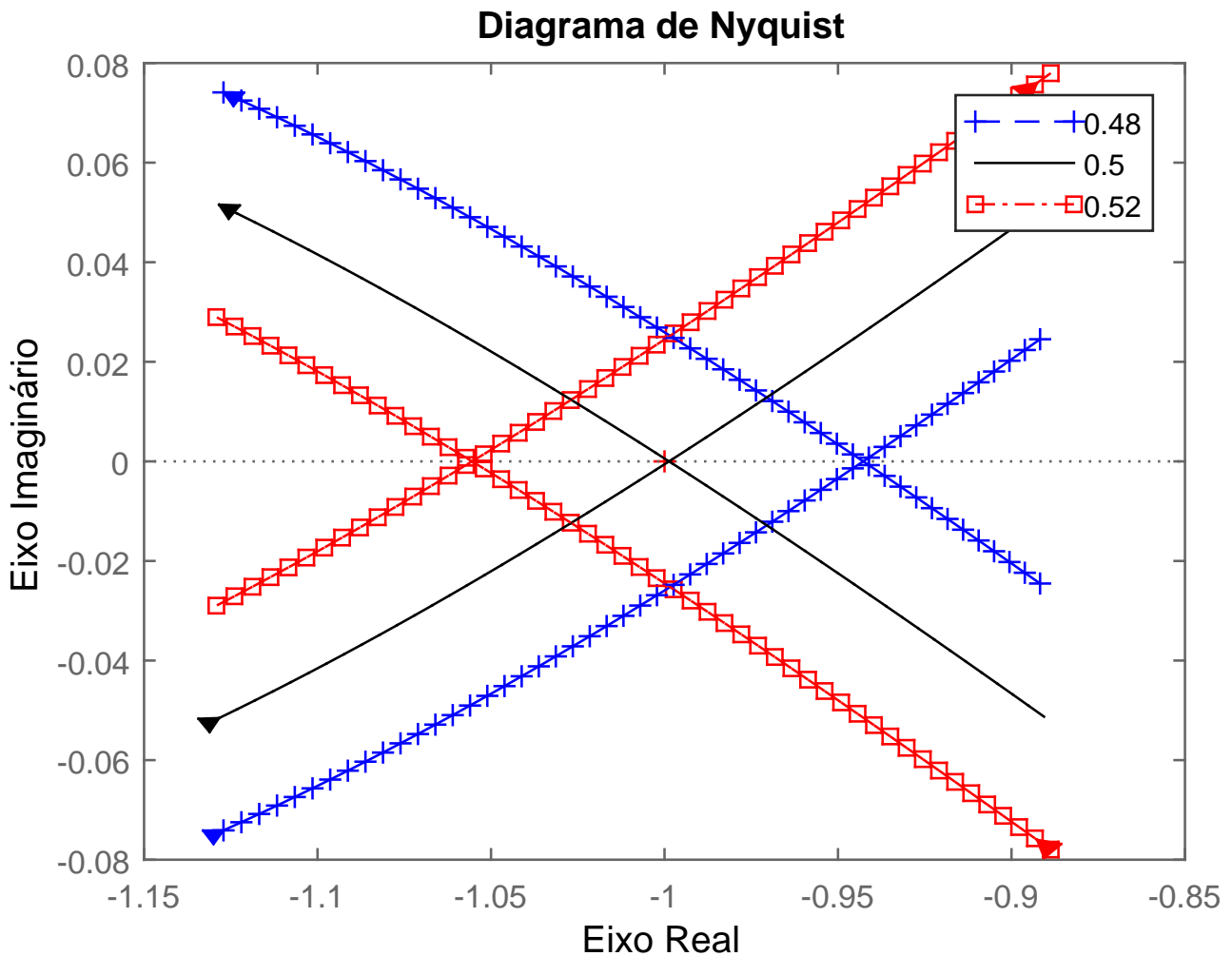


FIG. 3.15: Detalhe do diagrama de Nyquist do observador

É possível notar na FIG. 3.14, com destaque na FIG. 3.15, que o observador se mantém estável para os atrasos τ_1 e τ_2 , sendo que τ_2 está próximo ao limite da área de instabilidade, e para τ_3 o sistema já é instável, uma vez que o ponto -1 já não é mais envolvido no sentido anti-horário. Assim, pelo diagrama de Nyquist, é possível se ter uma ideia que o atraso máximo constante que o observador admite é um valor próximo a 0,5s. Ou seja, permanece estável para o valor máximo de atraso constante suportado pelo sistema, encontrado pela análise frequencial, com o valor de 0,4976, correspondente da taxa de variação nula ($d = 0$) na FIG. 3.13.

Cabe destacar que o critério de Nyquist traz uma informação visual mas precisa e é aplicada para sistema lineares invariantes no tempo. Por outro lado, a análise IQC releva

qual é o atraso máximo permitido à medida que o atraso deixa de ser constante e torna-se variante no tempo.

É possível complementar a análise pelas condições de estabilidade mostradas nos teoremas da Seção 3.5. O Teorema 3.1 não pode ser usado uma vez que a matriz A , e por consequência A_0 , não é estável, ou seja, o sistema não é estável independente do atraso. As condições do Teorema 3.2 podem ser testadas, resultando no valor máximo de 0,486 s. Conforme discutido no Capítulo 3, o resultado obtido pela aplicação do Teorema 3.2 corresponde ao obtido pela análise IQC para o operador \mathcal{S}_τ com a IQC para Π_4 apenas. Tal fato é corroborado na presente aplicação, dado que o valor de 0,486 s obtido pela aplicação do Teorema 3.2 corresponde ao valor assintótico observado na FIG. 3.13. Pelas condições do teorema 3.3 o resultado para o valor singular com atraso constante está na figura 3.16, com valor máximo de atraso de 0,2s para um atraso constante. É possível perceber, nos testes complementares, o conservadorismo envolvido em se tratar o atraso como incerteza LTV, haja vista que os resultados encontrados ficaram abaixo do que foi calculado pela análise por IQC.

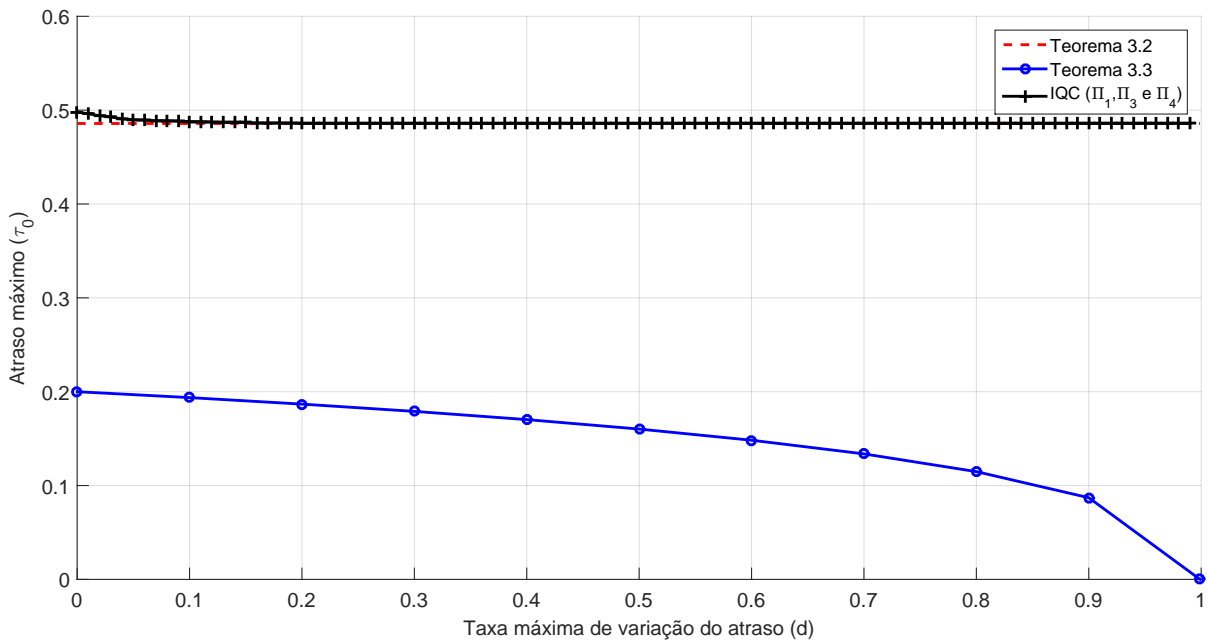


FIG. 3.16: Análise da estabilidade do sistema (3.96) de múltiplos atrasos

4 SISTEMAS INCERTOS COM ATRASO

Neste capítulo, é finalmente discutida a análise de estabilidade de sistemas lineares incertos com atraso. De tal discussão fica evidente a força e o atrativo da formulação IQC. Isso porque o mesmo quadro de trabalho dado pelo ferramental IQC que permitiu a análise de estabilidade de sistemas com atraso realizada no Capítulo 3, ou a análise de estabilidade de sistemas incertos do Capítulo 2, pode ser empregado sem maiores dificuldades para o caso mais geral da análise de estabilidade de sistemas incertos com atraso.

4.1 ANÁLISE IQC DE SISTEMAS INCERTOS COM ATRASO

A classe de sistemas incertos com atraso que pode ser tratada pelo ferramental IQC apresentado é dada pelos sistemas que podem ser reorganizados na forma LFT dada em (2.4) e representada na FIG. 2.1, e cujo operador bloco-diagonal é formado por suboperadores que podem ser descritos por IQC.

No caso mais geral, o sistema pode apresentar diferentes atrasos, bem como diversas fontes de incertezas. Trata-se, nesse caso, de um problema de operador misto discutido na Seção 2.2, no qual o operador apresenta uma estrutura do tipo

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_k), \quad (4.1)$$

onde cada um dos sub-operadores Δ_i , $i = 1, \dots, k$, corresponde ou a uma das representações de atraso introduzidas na Seção 3.2, ou a uma das representações de incerteza apresentadas na Seção 2.4.

Suponha que Π_i é o multiplicador associado ao suboperador Δ_i , com

$$\Pi_i(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{i,1}(j\omega) & \Pi_{i,o}(j\omega) \\ \Pi_{i,o}(j\omega)^H & \Pi_{i,2}(j\omega) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.2)$$

Então, conforme discutido na Seção 2.2, o multiplicador para o sistema em análise é dado por

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\Pi_{1,1}(j\omega), \dots, \Pi_{k,1}(j\omega)) & \text{diag}(\Pi_{1,o}(j\omega), \dots, \Pi_{k,o}(j\omega)) \\ \text{diag}(\Pi_{1,o}(j\omega)^H, \dots, \Pi_{k,o}(j\omega)^H) & \text{diag}(\Pi_{1,2}(j\omega), \dots, \Pi_{k,2}(j\omega)) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

A metodologia para a análise de estabilidade dos sistemas incertos com atraso pode, então, ser resumida na forma da seguinte sequência de passos:

- a) **Escolha dos sub-operadores:** cada atraso afetando o sistema é representado por um dos operadores apresentados na Seção 3.2. Analogamente, cada fonte de incerteza do sistema é representada pelo operador apropriado da Seção 2.4.
- b) **Modelagem LFT:** definidos os sub-operadores associados a cada atraso e a cada incerteza, o operador global Δ é definido conforme (4.1). A planta nominal $G(s)$ correspondente é determinada.
- c) **Construção do multiplicador:** uma vez definidos os sub-operadores associados a cada atraso e a cada incerteza, o multiplicador global é determinado por (4.3).
- d) **Determinação da FDI:** para o multiplicador global encontrado, a FDI associada ao teste (2.9) é colocada na forma (2.80).
- e) **Aplicação do Lema KYP:** o Lema 2.7 é aplicado à FDI (2.80), e a LMI (2.81) resultante é resolvida.

Seja Λ uma matriz de permutação de colunas, portanto ortogonal, tal que

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\Pi_{1,1}, \dots, \Pi_{k,1}) & \text{diag}(\Pi_{1,o}, \dots, \Pi_{k,o}) \\ \text{diag}(\Pi_{1,o}^H, \dots, \Pi_{k,o}^H) & \text{diag}(\Pi_{1,2}, \dots, \Pi_{k,2}) \end{bmatrix} = \Lambda^T \text{diag}(\Pi_1, \dots, \Pi_k) \Lambda. \quad (4.4)$$

Suponha que o multiplicador de cada sub-operador possa ser fatorado de forma análoga a (2.79), de modo que

$$\Pi_i(j\omega) = \Psi_i(j\omega)^H \mathcal{P}_i \Psi_i(j\omega), \quad (4.5)$$

com \mathcal{P}_i representando uma matriz real simétrica que pode ser representada por LMI. Então, o multiplicador (4.3) pode ser fatorado como

$$\Pi(j\omega) = (\Psi(j\omega)\Lambda)^H \mathcal{P} (\Psi(j\omega)\Lambda), \quad (4.6)$$

com

$$\Psi(j\omega) \triangleq \text{diag}(\Psi_1(j\omega), \dots, \Psi_k(j\omega)), \quad (4.7)$$

$$\mathcal{P} \triangleq \text{diag}(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k). \quad (4.8)$$

Com as definições acima, a FDI dada pelo teste (2.9) pode ser finalmente colocada na forma (2.80), para

$$\mathcal{G}(j\omega) = \Psi(j\omega)\Lambda \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e matriz \mathcal{P} dada por (4.8).

4.2 FATORAÇÃO DOS MULTIPLICADORES IQC

Nesta seção é discutido como se obter a fatoração (4.5) para cada um dos operadores discutidos nas Seções 2.4 e 3.2. Conforme indicado anteriormente, essa fatoração permite a construção da matriz \mathcal{P} dada por (4.8) e da transferência $\mathcal{G}(j\omega)$ em (4.9), caracterizando assim completamente o teste de análise de estabilidade dado pela FDI (2.80).

Seja $\Psi_\nu \in \mathbf{RH}_\infty^{(\nu+1) \times 1}$ uma transferência definida *a priori*, que pode ser escolhida, por exemplo, como a base

$$\Psi_\nu(j\omega) \triangleq \left[1 \quad \frac{1}{(j\omega - \rho)} \quad \frac{1}{(j\omega - \rho)^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{(j\omega - \rho)^\nu} \right]^T, \quad \rho < 0,$$

introduzida em (2.85), a qual admite a realização mínima

$$\Psi_\nu = \left[\begin{array}{c|c} A_\nu & B_\nu \\ \hline C_\nu & D_\nu \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c|c} \rho & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \rho & 0 \\ \hline & & & & 0 & 1 \\ & & & & I_\nu & 0 \end{array} \right]. \quad (4.10)$$

A ideia por trás da fixação da base $\Psi_\nu(j\omega)$ é a pré-determinação dos polos dos multiplicadores. Isso é necessário para garantir que as desigualdades matriciais resultantes da aplicação do Lema KYP sejam de fato lineares. Caso contrário, as desigualdades matriciais seriam bilineares, em função, por exemplo, do produto cruzado entre a variável de Lyapunov e a matriz de estado do multiplicador.

4.2.1 INCERTEZA PARAMÉTRICA INVARIANTE NO TEMPO

Conforme discutido na Seção 2.4.1, os operadores na classe Δ_r satisfazem IQC para o multiplicador

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} P(j\omega) & S(j\omega) \\ S(j\omega)^H & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix}, \quad S(j\omega) \in \mathbf{S}, P(j\omega) \in \mathbf{P}.$$

introduzido em (2.41).

Sejam

$$P(j\omega) \triangleq (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l)^H P_{11} (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l), \quad (4.11)$$

$$S(j\omega) \triangleq (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l)^H P_{12} (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l), \quad (4.12)$$

com $P_{11} \in \mathbb{S}^{l(\nu+1)}$ e $P_{12} \in \mathbb{R}^{l(\nu+1) \times l(\nu+1)}$. Então, o multiplicador (2.41) admite uma fatoração da forma (4.5) dada por

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^\top & -P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

se P_{11} e P_{12} forem tais que

$$(\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l)^H P_{11} (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l) \geq 0, \quad (4.14)$$

e

$$(\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l)^H (P_{12} + P_{12}^\top) (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l) = 0. \quad (4.15)$$

A inequação (4.14) serve para garantir que de fato $P(j\omega) \in \mathbf{P}$, enquanto que a igualdade (4.15) visa garantir que $S(j\omega) \in \mathbf{S}$.

Assim como a aplicação do Lema 2.7 leva a FDI (2.80) à condição equivalente de dimensão finita dada pela LMI (2.81), o mesmo Lema 2.7 pode ser aplicado também às FDI (4.14) e (4.15), levando, respectivamente, às LMI

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & X_\nu & 0 \\ X_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\nu \otimes I_l & B_\nu \otimes I_l \\ C_\nu \otimes I_l & D_\nu \otimes I_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & Y_\nu & 0 \\ Y_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{12} + P_{12}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\nu \otimes I_l & B_\nu \otimes I_l \\ C_\nu \otimes I_l & D_\nu \otimes I_l \end{bmatrix} = 0, \quad (4.17)$$

para $X_\nu, Y_\nu \in \mathbb{S}^{\nu}$. As LMI (4.16) e (4.17) devem então ser levadas em conta na solução do problema de factibilidade LMI.

4.2.2 DINÂMICA LTI INCERTA REPETIDA DIAGONALMENTE

Com relação ao caso de dinâmica LTI incerta repetida diagonalmente discutido na Seção 2.4.2, os operadores na classe $\Delta_{\mathbf{c}}$ satisfazem IQC para o multiplicador

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} P(j\omega) & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix}, \quad P(j\omega) \in \mathbf{P}.$$

introduzido em (2.44).

Seja

$$P(j\omega) \triangleq (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l)^H P_{11} (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l), \quad (4.18)$$

com $P_{11} \in \mathbb{S}^{l(\nu+1)}$. Então, o multiplicador (2.44) admite uma fatoração (4.5) da forma

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & -P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

se P_{11} for tal que

$$(\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l)^H P_{11} (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l) \geq 0. \quad (4.20)$$

O Lema 2.7, aplicado à FDI (4.20), leva à LMI adicional

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & X_\nu & 0 \\ X_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\nu \otimes I_l & B_\nu \otimes I_l \\ C_\nu \otimes I_l & D_\nu \otimes I_l \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.21)$$

para $X_\nu \in \mathbb{S}^{\nu}$.

4.2.3 DINÂMICA LTI INCERTA DE BLOCO CHEIO

Considere o caso de dinâmica LTI incerta de bloco cheio discutido na Seção 2.4.3. Os operadores na classe $\Delta_{\mathbf{c}}$ satisfazem IQC para o multiplicador

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} P(j\omega) & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P(j\omega) \end{bmatrix}, \quad P(j\omega) \in \mathbf{P}_d.$$

introduzido em (2.49).

Seja

$$P(j\omega) \triangleq (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l)^H P_{11} \otimes I_l (\Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l), \quad (4.22)$$

com $P_{11} \in \mathbb{S}^{\nu+1}$. Então, o multiplicador (2.49) admite uma fatoração (4.5) da forma

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P_{11} \otimes I_l & 0 \\ 0 & -P_{11} \otimes I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \Psi_\nu(j\omega) \otimes I_l \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

se P_{11} for tal que

$$\Psi_\nu(j\omega)^H P_{11} \Psi_\nu(j\omega) \geq 0. \quad (4.24)$$

O Lema 2.7, aplicado à FDI (4.24), leva à LMI adicional

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & X_\nu & 0 \\ X_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\nu & B_\nu \\ C_\nu & D_\nu \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.25)$$

para $X_\nu \in \mathbb{S}^\nu$.

4.2.4 DINÂMICA LTV INCERTA REPETIDA DIAGONALMENTE

Considere o caso de dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente discutido na Seção 2.4.4. Os operadores na classe $\Delta_{\mathbf{t}}$ satisfazem IQC para o multiplicador

$$\Pi = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P \end{bmatrix}, \quad P \in \mathbf{P}_r.$$

introduzido em (2.55).

Seja $P_{11} \in \mathbb{S}^l$. Então, o multiplicador (2.55) admite uma fatoração (4.5) da forma

$$\Pi = \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & -P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I_l \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

para

$$P_{11} \geq 0. \quad (4.27)$$

4.2.5 DINÂMICA LTV INCERTA DE BLOCO CHEIO

No caso de dinâmica LTV incerta de bloco cheio discutido na Seção 2.4.5, os operadores na classe $\Delta_{\mathbf{T}}$ satisfazem IQC para o multiplicador

$$\Pi = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P \end{bmatrix}, \quad P \in \mathbf{P}_{rd}.$$

introduzido em (2.61).

Seja $p_{11} \in \mathbb{R}$. Então, o multiplicador (2.61) admite uma fatoração (4.5) da forma

$$\Pi = \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_{11}I_l & 0 \\ 0 & -p_{11}I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I_l \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

para

$$p_{11} \geq 0. \quad (4.29)$$

4.2.6 OPERADOR ATRASO \mathcal{S}_τ

Na Seção 3.3, mostrou-se que o operador \mathcal{S}_τ satisfaz IQC para o multiplicador introduzido em (3.54) e dado por

$$\begin{aligned} \Pi(j\omega) &= x_1\Pi_1 + x_3\Pi_3(j\omega) + x_4\Pi_4(j\omega) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 + |\beta(j\omega)|^2X_3 + \tau_0^2\omega^2X_4 & X_1 \\ X_1 & -X_1 - X_3 - X_4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com $X_1 = X_1^T \geq 0$, $X_3 = X_3^T \geq 0$ e $X_4 = X_4^T \geq 0$. O multiplicador (3.54) admite, então, uma fatoração (4.5) da forma

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & -X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_l \\ \beta(j\omega) & 0 \\ 0 & I_l \\ \tau_0j\omega I_l & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

para

$$X_1 = X_1^T \geq 0, \quad X_3 = X_3^T \geq 0, \quad X_4 = X_4^T \geq 0. \quad (4.31)$$

4.3 APLICAÇÃO NUMÉRICA

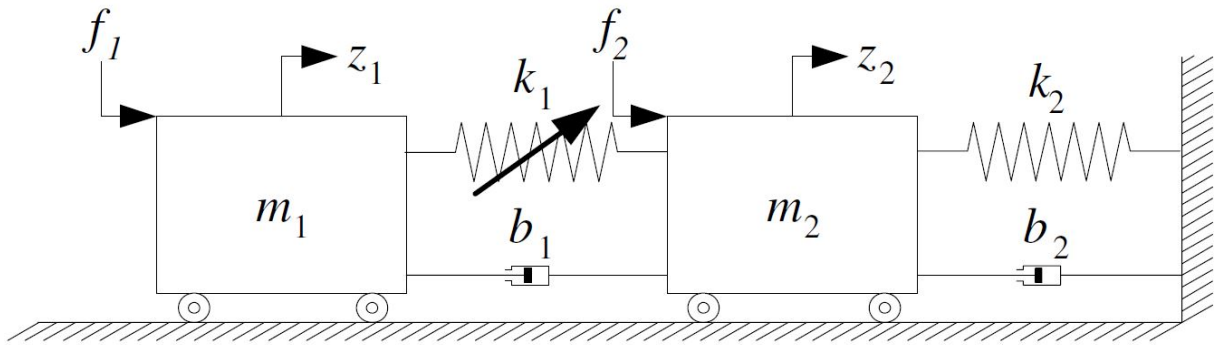


FIG. 4.1: Sistema massa-amortecedor-mola

Será estudado neste momento um sistema massa mola amortecedor, extraído de [BARROS, FEKRI e ATHANS, 2005], conforme FIG. 4.1. A massa m_1 está associada à massa m_2 através de uma mola k_1 de valor incerto e um amortecedor b_1 . O sistema sofre uma força de perturbação exógena f_2 que atua na massa m_2 , alterando a sua posição z_2 . A fim de atenuar os efeitos da perturbação é aplicada uma força f_1 que age sobre m_1 .

Uma dificuldade neste problema é que a constante de rigidez k_1 da mola que une as massas m_1 e m_2 possui valor incerto, com o valor nominal de $k_1 = 2$ N/m podendo variar entre 1,2 N/m e 2,8 N/m. Adicionalmente, existe um atraso de valor τ entre o comando do atuador da força f_1 e sua efetiva aplicação na massa m_1 . Esse atraso também é incerto, podendo atingir um valor máximo de 0,06 s.

Com intuito de facilitar apresentação, a solução do problema será dividida em duas etapas. A primeira consiste da síntese de um controlador robusto para o sistema. Para tanto, serão seguidos os passos em [BARROS, FEKRI e ATHANS, 2005], onde foi realizada uma síntese μ mista de desempenho robusto. A segunda etapa tratará da contribuição da análise IQC ao problema. A proposta é verificar a robustez em desempenho para este sistema.

É importante ressaltar que no presente problema o atraso será considerado invariante no tempo.

4.3.1 SÍNTESE DO CONTROLADOR ROBUSTO

As rotinas numéricas para a síntese do controlador robusto, discutida agora, estão disponíveis na *toolbox* de Controle Robusto do MATLAB.

A tarefa inicial para a síntese do controlador é a construção do modelo incerto de espaço de estados da planta, a partir das equações de movimento envolvidas, dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{m_1 + k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{m_1 + b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \\ \\ z_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Na representação acima, os sinais de entradas são a força de controle f_1 e a perturbação exógena f_2 , e o sinal de saída é a posição da massa m_2 . A fim de fornecer uma análise qualitativa da influência da incerteza paramétrica da constante de mola, é traçado o diagrama de Bode da planta, sobrepondo na figura (4.2) a resposta em frequência do sistema para diferentes valores de k_1 . Os valores nominais para os parâmetros do sistema são: $m_1 = 1\text{Kg}$, $m_2 = 2\text{Kg}$, $k_2 = 1\text{N/m}$, $b_1 = 0,05\text{Ns/m}$ e $b_2 = 0,05\text{Ns/m}$.

O objetivo de projeto para esse problema pode ser sintetizado como o de projetar um controlador que minimize a influência da perturbação exógena f_2 na posição z_2 da massa m_2 , para todo valor admissível de incerteza paramétrica e de atraso. Uma vez que a síntese proposta contempla requisitos de desempenho além da estabilidade da planta, é construída a planta de síntese generalizada ilustrada na FIG. 4.3, na qual as ponderações frequenciais servem para traduzir as seguintes especificações de projeto:

- o ruído do sensor é modelado através de um ganho estático de valor 0,001, através da ponderação

$$W_n = 0,001. \quad (4.33)$$

- o comando do atuador é penalizado por um fator 0,1 em baixas frequências e de um fator 10 em altas frequências, com frequência de cruzamento de 100 rad/s, através

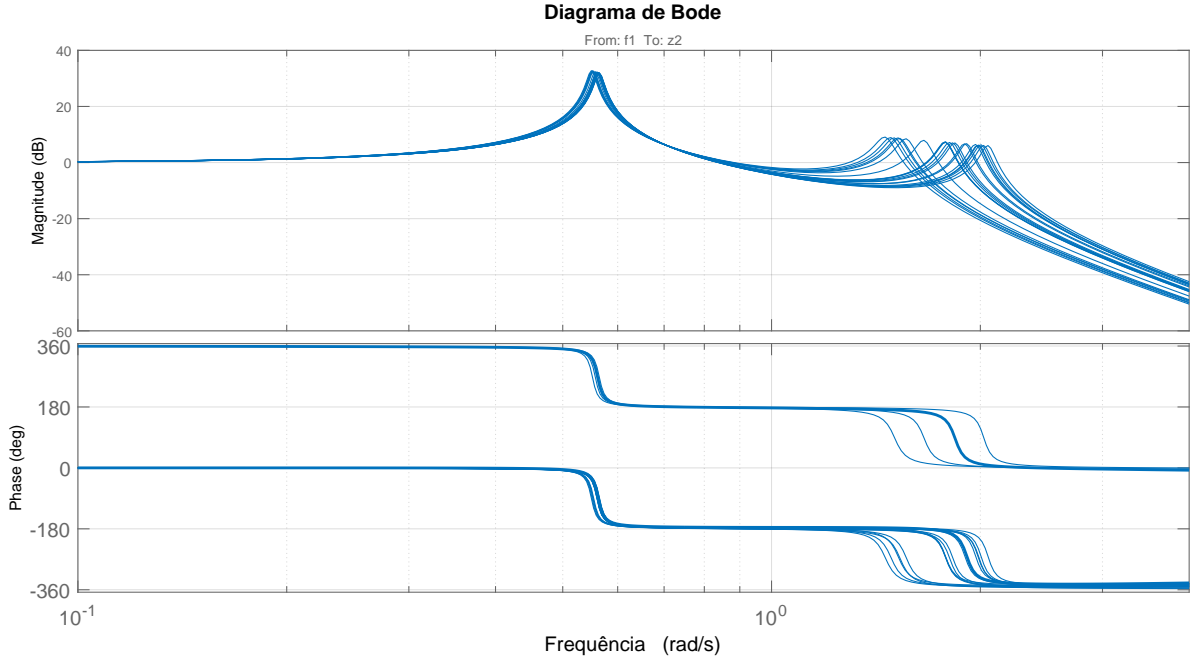


FIG. 4.2: Variação da resposta em frequência do sistema (4.32) para diferentes valores da constante k_1 da mola.

do filtro

$$W_u(s) = 10 \frac{s + 10}{s + 1000}. \quad (4.34)$$

- A perturbação exógena é modelada por um filtro de primeira ordem, com um polo em 0,25 rad/s,

$$W_{dist}(s) = \frac{0,25}{s + 0,25}. \quad (4.35)$$

- O objetivo do desempenho é atenuar a perturbação na massa m_2 em um fator de 80 para frequências abaixo de 0,1 rad/s, através do filtro

$$W_p(s) = 80 \frac{0,1}{s + 0,1}. \quad (4.36)$$

A constante de mola incerta k_1 é parametrizada da forma

$$k_1 = 2(1 + 0,4\Delta_K), \quad (4.37)$$

com $\Delta_K \in \mathbb{R}$ representando uma incerteza paramétrica invariante no tempo tal que $|\Delta_K| \leq 1$.

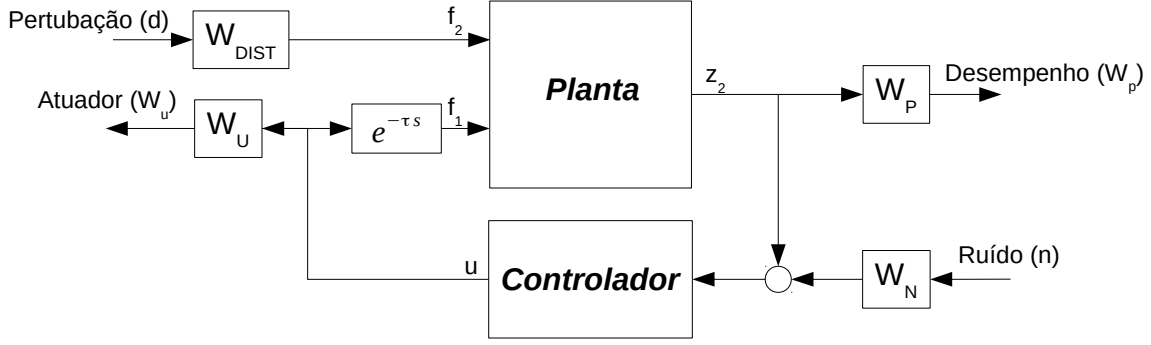


FIG. 4.3: Planta de síntese generalizada para o sistema (4.32)

Em seguida deve-se abordar a questão do atraso do atuador. Conforme discutido anteriormente, a ideia aqui é realizar inicialmente a decomposição

$$e^{-s\tau} = (e^{-s\tau} - 1) + 1. \quad (4.38)$$

Em seguida, o operador \mathcal{S}_τ é tratado como uma dinâmica não-modelada limitada em magnitude pelo filtro

$$W_{unmod}(s) = 2,6 \frac{s}{s + 40}, \quad (4.39)$$

de modo que

$$|e^{-0,06j\omega} - 1| \leq |W_{unmod}(j\omega)\Delta_\tau|, \quad (4.40)$$

com $\Delta_\tau \in \mathbb{C}$ representando uma dinâmica LTI incerta tal que $|\Delta_\tau| \leq 1$. Na FIG. 4.4 é mostrada a resposta em frequência da transferência $e^{-0,06s} - 1$ e da ponderação $W_{unmod}(s)$

Uma vez que foram apreciados os comportamentos dos elementos críticos nas FIG. 4.2 e 4.4, para realizar a síntese do controlador nas condições de contorno propostas, foi montado o modelo da planta no MATLAB com os dois elementos incertos. No caso foi usada uma variável representativa da constante da mola, que foi tratada como um parâmetro incerto real, e para o atraso, foi introduzida a dinâmica $W_{unmod}(s)$ citada na entrada da planta.

Concluída a modelagem do sistema, o mesmo pode ser rearrumado e simplificado na estrutura padrão de análise de desempenho de robustez que é a FIG. 4.5 . O objetivo de desempenho robusto pode ser resumido na relação

$$\left\| \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Wp \\ Wu \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1, \quad (4.41)$$

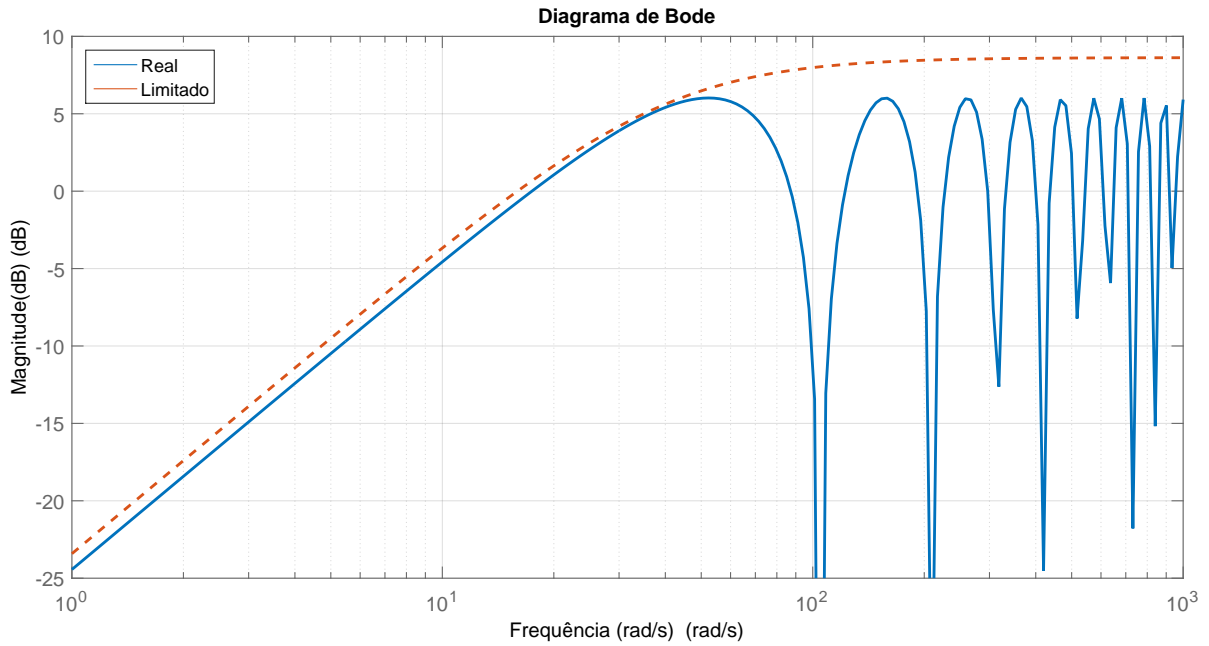


FIG. 4.4: Modelagem e comportamento do atraso para fins de síntese no sistema (4.32)

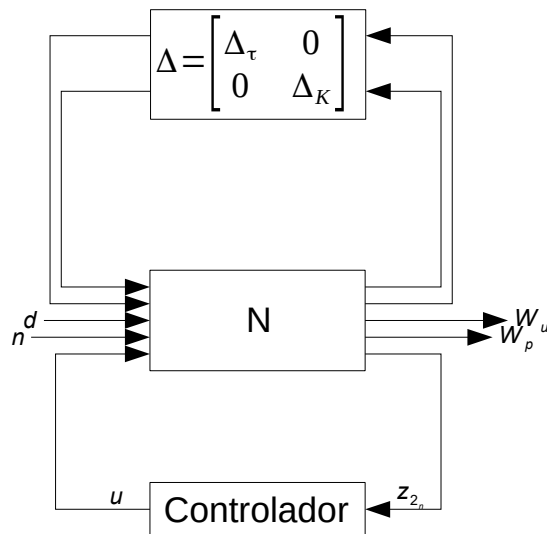


FIG. 4.5: Estrutura de análise de desempenho robusto.

para todo Δ_τ e Δ_K admissíveis.

Para efetivar a síntese do controlador, ao canal de desempenho é associada uma incerteza fictícia Δ_p , conforme pode ser visto na FIG. 4.6 .

Para a construção propriamente dita do controlador são utilizadas as funções nativas

de controle robusto do MATLAB com base no valor singular estruturado (síntese μ), que sintetiza um controlador robusto para um modelo de planta incerta através do algoritmo D-K ou D-G-K, que resultou em um controlador de ordem 34 com 1 entrada e 1 saída, posição de m_2 e a força de controle f_1 respectivamente.

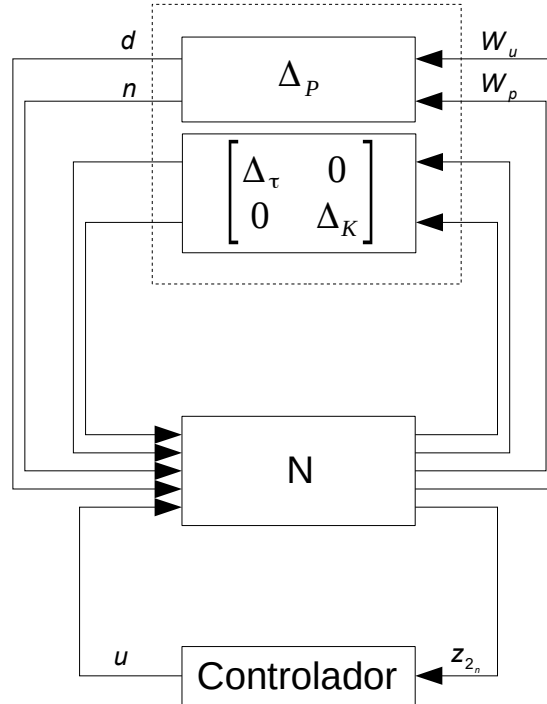


FIG. 4.6: Estrutura de síntese do controlador robusto.

4.3.2 ANÁLISE DE DESEMPENHO ROBUSTO VIA IQC

A análise que se deseja realizar agora pode ser sumariada da seguinte forma: para um dado valor de atraso máximo τ_0 , qual é o maior δ tal que, sempre que a incerteza tem tamanho δ ou menor, isto é $|\Delta_K| \leq \delta$, o sistema em malha fechada é estável e

$$\left\| \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} W_p \\ W_u \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \frac{1}{\delta} \quad (4.42)$$

para todo atraso e incerteza admissíveis.

A função do sistema pode ser obtida através da composição do sistema nominal com o controlador, fazendo $G(j\omega) = \mathcal{F}_l(N, \text{Controlador})$ e como o sistema deve ser estável, pelo teorema fundamental da estabilidade, Teorema 2.1, é válido que:

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I. \quad (4.43)$$

Na solução será utilizada a versão generalizada do Lema de KYP (Lema 2.7), assim deve-se fatorar $\Pi(j\omega)$ em:

$$\Pi(j\omega) = \Psi^H(j\omega) \mathcal{P} \Psi(j\omega) \quad (4.44)$$

que substituindo em (4.43) resulta em

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \underbrace{\Psi^H(j\omega) \mathcal{P} \Psi(j\omega)}_{\mathcal{G}(j\omega)} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I. \quad (4.45)$$

Representando $\mathcal{G}(j\omega)$ como

$$\mathcal{G}(j\omega) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right], \quad (4.46)$$

através do Lema 2.7 existe então a LMI

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.47)$$

Neste momento é importante ressaltar como o ferramental apresentado nos capítulos anteriores facilita a composição do problema. Como evidenciado na FIG. 4.6, os elementos modelados por incertezas foram:

- o atraso do compensador,
- a constante da mola, e
- a incerteza fictícia para o desempenho.

A constante da mola é uma incerteza paramétrica LTI e portanto satisfaz a EQ. (4.13), que já foi abordada com maiores detalhes na Seção 4.2, assim como suas condições EQ.(4.14) e (4.15), fornecendo

$$\Pi_r(j\omega) = \Psi_r(j\omega)^* P_r \Psi_r(j\omega)$$

$$= \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} P_{11_r} & P_{12_r} \\ P_{12_r}^\top & -P_{11_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{\nu_r}(j\omega) \otimes I_l & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \Psi_{\nu_r}(j\omega) \otimes I_l \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

e as condições necessárias para P_{11_r} e P_{12_r}

$$(\Psi_{\nu_r}(j\omega) \otimes I_l)^H P_{11_r} (\Psi_{\nu_r}(j\omega) \otimes I_l) \geq 0, \quad (4.49)$$

$$(\Psi_{\nu_r}(j\omega) \otimes I_l)^H (P_{12_r} + P_{12_r}^\top) (\Psi_{\nu_r}(j\omega) \otimes I_l) = 0, \quad (4.50)$$

que da aplicação do Lema KYP resultam nas LMIs auxiliares

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & X_\nu & 0 \\ X_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{11_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{\nu_r} \otimes I_l & B_{\nu_r} \otimes I_l \\ C_{\nu_r} \otimes I_l & D_{\nu_r} \otimes I_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.51)$$

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & Y_\nu & 0 \\ Y_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{12_r} + P_{12_r}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{\nu_r} \otimes I_l & B_{\nu_r} \otimes I_l \\ C_{\nu_r} \otimes I_l & D_{\nu_r} \otimes I_l \end{bmatrix} = 0, \quad (4.52)$$

Para a incerteza representativa do desempenho há obediência à EQ. (4.23), que também já foi devidamente tratada quando foram abordadas as dinâmicas LTI incertas de bloco cheio, e da mesma maneira, também deve ser considerada como condição necessária a EQ.(4.24):

$$\begin{aligned} \Pi_c(j\omega) &= \Psi_c(j\omega)^* P_c \Psi_c(j\omega) \\ &= \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} P_{11_c} \otimes I_l & 0 \\ 0 & -P_{11_c} \otimes I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{\nu_c}(j\omega) \otimes I_l & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \Psi_{\nu_c}(j\omega) \otimes I_l \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

se P_{11_c} for tal que seja válido

$$\Psi_{\nu_c}(j\omega)^H P_{11_c} \Psi_{\nu_c}(j\omega) \geq 0. \quad (4.54)$$

Aplicando o Lema 2.7 na FDI acima resulta na terceira LMI auxiliar

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & Z_\nu & 0 \\ Z_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{11_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{\nu_c} & B_{\nu_c} \\ C_{\nu_c} & D_{\nu_c} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.55)$$

Antes de tratar a incerteza relativa ao atraso, devem ser feitas algumas observações sobre as funções Ψ_{ν_c} e Ψ_{ν_r} . A adoção da forma fatorada na solução deste tipo de problema permite uma adequação da formulação matemática bem apropriada para a obtenção das LMIs, com isso, surgem as funções citadas, que representam na verdade uma garantia da linearidade dos sistemas.

A escolha de Ψ_{ν_c} e Ψ_{ν_r} é livre pois são uma base de um sistema de funções, ou melhor, a escolha dos polos da base de um sistema de funções é livre, uma vez que

$$\Psi_{\nu_r}(j\omega) = \left[1 \quad \frac{1}{(j\omega - \rho_r)} \quad \frac{1}{(j\omega - \rho_r)^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{(j\omega - \rho_r)^\nu} \right]^T, \quad \rho_r < 0,$$

e

$$\Psi_{\nu_c}(j\omega) = \left[1 \quad \frac{1}{(j\omega - \rho_c)} \quad \frac{1}{(j\omega - \rho_c)^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{(j\omega - \rho_c)^\nu} \right]^\top, \quad \rho_c < 0.$$

Entretanto, a maneira de escolha destes polos implicará diretamente na solução numérica. Percebe-se imediatamente que o comprimento da base tem dimensão $\nu + 1$, assim uma escolha de $\nu = 0$ implicaria em restringir os multiplicadores para uma forma não dinâmica, ou seja, um resultado conservativo. Por outro lado, para um valor superior de ν , $\nu \in \mathbb{N}^*$, há um enriquecimento da solução com a redução do conservadorismo ao custo de aumento da carga computacional. O segundo ponto crítico na escolha da base diz respeito à localização do polo ρ , que implica em alcançar ou não uma aproximação desejada para o erro. [VEENMAN, SCHERER e KÖROĞLU, 2016] comenta este problema, e embora não aponte uma técnica de solução, recomenda fortemente uma investigação linear de ν para um determinado ρ . No algoritmo implementado foi adotado o valor de 3 para ν e de -90 para ρ .

Voltando para os passos da análise, para a incerteza relativa ao atraso, serão empregadas as IQC de interesse Π_1 , Π_3 e Π_4 conforme (3.33),(3.46) e (3.50), de modo que

$$\Pi_\tau(j\omega) = X_1\Pi_1 + X_3\Pi_3 + X_4\Pi_4 \tag{4.56}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 & X_1 \\ X_1 & -X_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |\beta(j\omega)|^2 X_3 & 0 \\ 0 & -X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_0^2 \omega^2 X_4 & 0 \\ 0 & -X_4 \end{bmatrix}, \tag{4.57}$$

o qual pode ser fatorado da forma

$$\Pi_\tau(j\omega) = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^\top}_{\Psi_1^H} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 & X_1 \\ X_1 & -X_1 \end{bmatrix}}_{P_1} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Psi_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta(j\omega)I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Psi_3^H} \underbrace{\begin{bmatrix} X_3 & 0 \\ 0 & -X_3 \end{bmatrix}}_{P_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta(j\omega)I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Psi_3} + \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} j\omega I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Psi_4^H} \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_0^2 X_4 & 0 \\ 0 & -X_4 \end{bmatrix}}_{P_4} \underbrace{\begin{bmatrix} j\omega I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Psi_4} \quad (4.58)
\end{aligned}$$

$$\Pi_\tau(j\omega) = \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_1^H(j\omega) & \Psi_3^H(j\omega) & \Psi_4^H(j\omega) \end{bmatrix}}_{\Psi_\tau^H} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & P_4 \end{bmatrix}}_{P_\tau} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_1(j\omega) \\ \Psi_3(j\omega) \\ \Psi_4(j\omega) \end{bmatrix}}_{\Psi_\tau} \quad (4.59)$$

$$\Pi_\tau(j\omega) = \Psi_\tau^H(j\omega) P_\tau \Psi_\tau(j\omega) \quad (4.60)$$

Cabe um último destaque para o fato que a construção das matrizes $\Psi(j\omega)$ e \mathcal{P} na forma diagonal necessitam de um ajuste na apresentação na solução da estabilidade (4.43) pela matriz diagonalizante Λ , de acordo como o que foi mostrado na Seção 4.1, conforme EQ. (4.6). Logo, para uma representação do tipo

$$\Psi(j\omega) = \begin{bmatrix} \Psi_\tau(j\omega) & & \\ & \Psi_r(j\omega) & \\ & & \Psi_c(j\omega) \end{bmatrix} \Lambda \text{ e } \mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_\tau & & \\ & P_r & \\ & & P_c \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

é construída uma matriz ortogonal de permutação

$$\Lambda = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\Pi_{\tau,1}, \Pi_{r,1}, \Pi_{c,1}) & \text{diag}(\Pi_{\tau,o}, \Pi_{r,o}, \Pi_{c,o}) \\ \text{diag}(\Pi_{\tau,o}^H, \Pi_{r,o}^H, \Pi_{c,o}^H) & \text{diag}(\Pi_{\tau,2}, \Pi_{r,2}, \Pi_{c,2}) \end{bmatrix} = \Lambda^\top \begin{bmatrix} \Pi_\tau & & \\ & \Pi_r & \\ & & \Pi_c \end{bmatrix} \Lambda. \quad (4.63)$$

Dado que as equações que ditam o comportamento do sistema já estão definidas, a partir de agora elas serão empregadas em um algoritmo também implementado no MATLAB, para cumprir o objetivo de observar a região de estabilidade.

O primeiro procedimento é montar as funções de fatoração Ψ_τ , Ψ_r e Ψ_c , e também as matrizes P_τ , P_r e P_c , sendo que no caso será avaliada a relação para um atraso constante.

Para mapear a região, serão feitas simultaneamente duas variações, uma dimensão traduz o quanto a incerteza paramétrica da constante da mola vai variar, a outra diz o atraso máximo suportado pelo sistema. Assim para uma interação é definido um valor para a variação da constante da mola e busca-se o atraso máximo que o sistema comporta ainda estável variando o valor do atraso. Encontrado o atraso máximo é incrementado o valor da variação da constante da mola até o sistema não ser mais estável.

A busca pelo valor máximo de atraso consiste em testar se para aquela combinação de incertezas (mola e atraso) o sistema apresenta robustez em estabilidade. O teste em si é, na verdade, verificar a solução das LMIs. Para o algoritmo, este ponto é o que mais difere dos casos apresentados no capítulo anterior. Nos casos anteriores era resolvida uma única LMI, e dependendo da existência ou não da solução era feito um ajuste inferior ou superior em um intervalo, mas neste caso, são solucionadas 4 LMIs simultaneamente, decorrentes de EQ.(4.43), LMI principal (4.47) e 3 auxiliares (4.51), (4.52) e (4.55). Esse fato não cria nenhuma dificuldade adicional, simplesmente o algoritmo deve contemplar no seu teste se todas as LMIs foram obedecidas ou não, meramente há um esforço computacional maior. Enquanto houver solução das LMIs para o par de elementos o sistema é considerado com desempenho robusto. O resultado final é apresentado na FIG.4.7.

Por fim, cabe lembrar que no presente problema o atraso foi considerado invariante no tempo, todavia, o ferramental IQC permitiria sem maiores dificuldades a análise considerando-se também taxa de variação não-nula para o atraso.

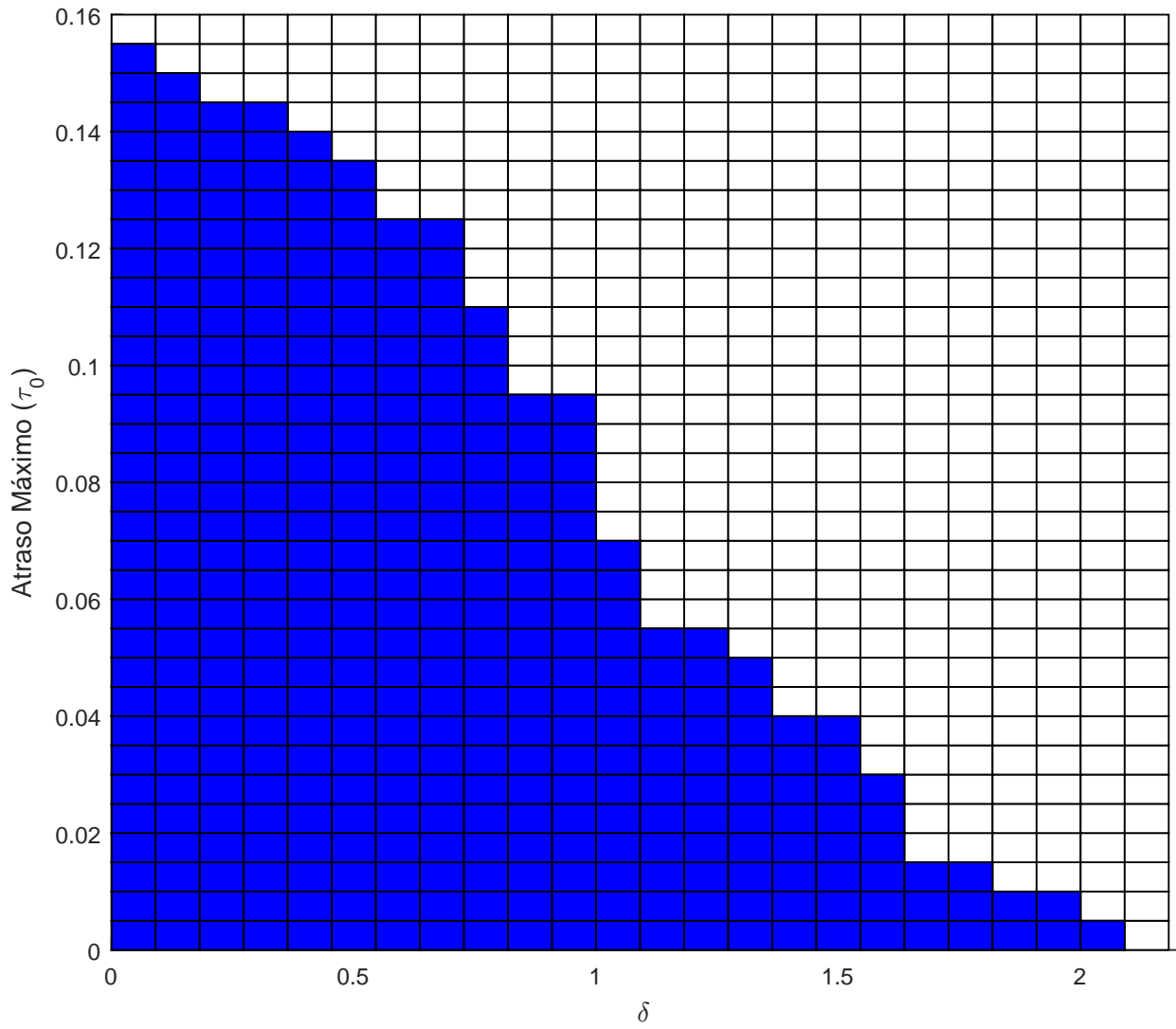


FIG. 4.7: Região de desempenho robusto para o sistema massa-mola-amortecedor

5 CONCLUSÃO

O trabalho teve como objetivo principal realizar um estudo sobre a análise de sistemas incertos com atraso variante no tempo, dando uma visão geral sobre o comportamento da estabilidade e do desempenho, fornecendo um conteúdo sintético de tópicos da área de controle robusto, com ênfase na análise frequencial por IQC.

Para tanto, o Capítulo 2 tratou inicialmente de reunir os fundamentos teóricos empregados, de elencar os principais teoremas, citar os princípios julgados mais importantes e definir critérios, parâmetros e considerações gerais envolvidas, de forma a construir e organizar uma sequência lógica para abordagem do problema. Assim foi possível formar a base de conhecimentos e uniformizar o tema.

A questão da estabilidade foi apresentada de forma ampla, permitindo discorrer de maneira abrangente sobre como incorporar algebricamente eventuais atraso e incertezas representativas de sistemas complexos. Devido à sua importância, o teorema fundamental para aferir a estabilidade foi discutido também através de exemplos, inclusive mostrando como a questão do desempenho pode ser incluída na forma de uma análise de estabilidade generalizada. Também foi mostrado como a análise por valor singular estruturado se relaciona com a análise frequencial por IQC.

Houve um exame mais profundo da questão da estabilidade de sistemas com atraso no Capítulo 3. Foram detalhadas uma série de representações do atraso. Também foi sustentado um exame minucioso de um operador específico, onde o sistema está sujeito a certas condições que auxiliam na solução do problema, obtendo uma lista de importantes IQC. Foi feita uma breve revisão dos conceitos ao final do Capítulo 3 na forma de aplicações numéricas, de forma a exaurir o método e consolidar os conceitos, explorando problemas da literatura. Os resultados intermediários podem ser considerados satisfatórios, pois refletiram comportamento semelhante aos textos de origem, e coerentes no caso de análises novas.

O resultado desse aprofundamento inicial foi a formação de um arcabouço de ferramentas que permitem o tratamento de problemas mais profundos, findando pela inclusão de parâmetros incertos nos sistemas com atrasos, tratado no Capítulo 4. Nessa parte do trabalho, o tratamento dado aos sistemas foi visto de forma a proporcionar uma análise

da robustez de sistemas incertos com atrasos, por meio de um exemplo complexo de parametrização das soluções, mostrando os recursos que as IQC fornecem e os procedimentos específicos que devem ser adotados para estes casos. Ficou clara a abordagem prática e simplificada que a análise IQC oferece no tratamento de problemas complexos.

Os exemplos dos Capítulos 3 e 4 agregaram à abordagem teórica proposta a sustentação necessária para concluir o estudo proposto.

É importante ressaltar que o presente estudo contribuiu no aporte das teorias envolvidas, particularmente por:

- Sintetizar e organizar os tópicos de controle robusto considerados mais relevantes para o tema. Dado que a literatura que trata de IQC, sistemas incertos, sistemas com atraso, etc, é vasta, é uma tarefa inviável inspecionar todos os seus aspectos, dado a amplitude de aplicações;
- Uma vez que as pesquisas em sistemas com um atraso constante e desconhecido já são bem conhecidas, o problema no caso de atrasos e incertezas concomitantes e variantes no tempo, que são mais complexos, tem na linha de pesquisa resultados predominantes com base na abordagem em condições no domínio do tempo, obtidas em sua maioria por construções de funções de Lyapunov como soluções de LMIs, contrapondo a abordagem frequencial empregada; e
- Embora as teorias apresentadas não representem ideias tão novas, a proposta de simplificação e de unificação em uma mesma forma centralizada de abordar problemas diferentes e complexos representam de fato consolidação dentro do Grupo de Controle do IME desse tema de pesquisa.

Por fim, cumpre destacar que a flexibilidade da ferramenta de análise via IQC deixa possibilidades para futuras pesquisas, tais como:

- análise de sistemas incertos com atraso e também com não-linearidades do tipo setor.
- projeto de controladores para a classe acima de sistemas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBOU, R., MOUSSAOUI, C. e LOISEAU, J. J. On stability of uncertain time-delay systems: robustness margin for the inventory control. *IFAC-PapersOnLine*, 48(12): 310–315, 2015.
- BARROS, D., FEKRI, S. e ATHANS, M. Robust mixed- μ synthesis performance for mass-spring system with stiffness uncertainty. Em *Intelligent Control, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on, Mediterrean Conference on Control and Automation*, págs. 743–748. IEEE, 2005.
- BOYD, S., EL GHAOUI, L., FERON, E. e BALAKRISHNAN, V. Linear matrix inequalities in system and control theory. *Studies in Applied Mathematics*, 15, 1994.
- CHEN, J. e GU, G. *Control-oriented system identification: an H [infinity] approach*, volume 19. Wiley-Interscience, 2000.
- CHIASSON, J. e LOISEAU, J. J. *Applications of time delay systems*, volume 352. Springer, 2007.
- CORLESS, M. e LEITMANN, G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(5):1139–1144, Oct 1981. ISSN 0018-9286.
- DEBELJKOVIĆ, D. L. e NESTOROVIĆ, T. *Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems*. InTech, 2011.
- DESOER, C. A. e VIDYASAGAR, M. *Feedback Systems: Input–Output Properties*. New York, Academic Press., 1975.
- DOYLE, J. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. Em *IEE Proceedings D-Control Theory and Applications*, volume 129, págs. 242–250. IET, 1982.
- FAN, M. K., TITS, A. L. e DOYLE, J. C. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1):25–38, 1991.
- FORRESTER, J. W. Industrial dynamics. *Journal of the Operational Research Society*, 48(10):1037–1041, 1997.
- FRIDMAN, E. e SHAKED, U. A descriptor system approach to h infin; control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):253–270, Feb 2002. ISSN 0018-9286.
- GU, K., CHEN, J. e KHARITONOV, V. L. *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2003.

- GU, K. e NICULESCU, S. I. Additional dynamics in transformed time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):572–575, Mar 2000. ISSN 0018-9286.
- IGNACIU, P. e BARTOSZEWICZ, A. Smith predictor based control of continuous-review perishable inventory systems with multiple supply alternatives. Em *Control & Automation (MED), 2011 19th Mediterranean Conference on*, págs. 1427–1432. IEEE, 2011.
- IVĂNESCU, D., NICULESCU, S.-I., DUGARD, L., DION, J.-M. e VERRIEST, E. I. On delay-dependent stability for linear neutral systems. *Automatica*, 39(2):255–261, 2003.
- IWASAKI, T. e HARA, S. Generalized kyp lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):41–59, 2005.
- KAO, C. e RANTZER, A. Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays. *Automatica*, 43:959–970, 2007.
- KAO, C. e LINCOLN, B. Simple stability criteria for systems with time-varying delays. *Automatica*, 40(8):1429–1434, 2004.
- KHARGONEKAR, P. P., PETERSEN, I. R. e ZHOU, K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and h_∞ control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3):356–361, Mar 1990. ISSN 0018-9286.
- KHARITONOV, V. L. Robust stability analysis of time delay systems: A survey. *IFAC Proceedings Volumes*, 31(18):1–12, 1998.
- LOPES, R. D. S. Síntese de controladores robustos baseada em um novo limitante para o valor singular estruturado. Tese de mestrado, IME, Janeiro 2014.
- MARQUES, I. O. Controle de sistemas lineares com incertezas, perturbações e atraso na saída. Tese de mestrado, UERJ, Março 2016.
- MEGRETSKI, A. e RANTZER, A. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6):819–830, 1997.
- MOON, Y. S., PARK, P., KWON, W. H. e LEE, Y. S. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *International Journal of control*, 74(14):1447–1455, 2001.
- NARENDRA, K. S. e TAYLOR, J. H. *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*. New York, Academic Press., 1973.
- NESTEROV, Y. e NEMIROVSKI, A. *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming*. Studies Appl. Math. Philadelphia, PA: SIAM, 1993.
- PACKARD, A. e DOYLE, J. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1):71–109, 1993.
- POPOV, V. M. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automation Remote Contr.*, 22(6):857–875, 1962.

- RANTZER, A. On the kalman—yakubovich—popov lemma. *Systems & Control Letters*, 28(1):7–10, 1996.
- RIDDALLS, C. e BENNETT, S. The stability of supply chains. *International Journal of Production Research*, 40(2):459–475, 2002.
- SAFONOV, M. G. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. Em *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, volume 129, págs. 251–256. IET, 1982.
- SIMON, H. A. On the application of servomechanism theory in the study of production control. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, págs. 247–268, 1952.
- SKOGESTAD, S. e POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*, volume 2. Wiley New York, 2007.
- TARBOURIECH, S., GARCIA, G., DA SILVA JR, J. M. G. e QUEINNEC, I. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media, 2011.
- VEENMAN, J., SCHERER, C. W. e KÖROĞLU, H. Robust stability and performance analysis based on integral quadratic constraints. *European Journal of Control*, 31:1–32, 2016.
- WANG, S.-S., CHEN, B.-S. e LIN, T.-P. Robust stability of uncertain time-delay systems. *International Journal of Control*, 46(3):963–976, 1987.
- WANG, X., DISNEY, S. M. e WANG, J. Stability analysis of constrained inventory systems with transportation delay. *European Journal of Operational Research*, 223(1): 86–95, 2012.
- WILLEMS, J. C. *The Analysis of Feedback Systems*. Cambridge, MA: MIT Press, 1971.
- WILLEMS, J. C. Dissipative dynamical systems—part i: General theory; part ii: Linear systems with quadratic supply rates. *Mechanics Anal.*, 45(5):321–393, 1972.
- YAKUBOVICH, V. A. Frequency conditions for the absolute stability of control systems with several nonlinear or linear nonstationary units. *Automat. Telemekh.*, pág. 5–30, 1967.
- YAKUBOVICH, V. A. A frequency theorem for the case in which the state and control spaces are hilbert spaces with an application to some problems of synthesis of optimal controls—parts i–ii. *Sibirskii Mat.*, 15:639–668, 1974.
- ZAMES, G. On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems—part i: Conditions derived using concepts of loop gain, and part ii: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11:228–238, 1966.

- ZHANG, J., KNOPE, C. R. e TSIOTRAS, P. New results on delay-dependent control of time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):95–100, 2005.
- ZHOU, K., DOYLE, J. C. e GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.
- ZHU, J., QI, T. e CHEN, J. Small-gain stability conditions for linear systems with time-varying delays. *Systems & Control Letters*, 81:42–48, 2015.