MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANA CATARINA ALMEIDA FILIZOLA DE ABREU

ANÁLISE E SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS DE SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS VARIÁVEIS UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV ASSINTOTICAMENTE $\mathcal{L}_2$-QUADRÁTICAS

Rio de Janeiro
2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

ANA CATARINA ALMEIDA FILIZOLA DE ABREU

ANÁLISE E SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS DE SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS VARIÁVEIS UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV ASSINTOTICAMENTE $\mathcal{L}_2$-QUADRÁTICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE
Co-orientador: Prof$^{\underline{a}}$. Patricia Thompson Bandeira, DC

Rio de Janeiro
2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

621.3 Ana Catarina Almeida Filizola de Abreu
A162a **Análise e Síntese de Controle Robusto por Realimentação de Estados de Sistemas Lineares a Parâmetros Variáveis Utilizando Funções de Lyapunov Assintoticamente $\mathcal{L}_2$-Quadráticas / Ana Catarina Almeida Filizola de Abreu; orientada por Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE; Prof^{a}. Patricia Thompson Bandeira, DC - Rio de Janeiro : Instituto Militar de Engenharia, 2019.**
103 p.: il.

Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia- Rio de Janeiro, 2019.

1. Curso de Engenharia Elétrica - teses e dissertações. 2. Sistemas Linear a Parâmetros Variáveis - LPV. 3. Transformada Haar. 4. Desempenho Robusto H_∞ I. Pellanda, Paulo César. II. Bandeira, Patrícia Thompson. III.Instituto Militar de Engenharia. IV. Título.

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

ANA CATARINA ALMEIDA FILIZOLA DE ABREU

ANÁLISE E SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS DE SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS VARIÁVEIS UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV ASSINTOTICAMENTE $\mathcal{L}_2$-QUADRÁTICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Co-orientador: Prof$^{\underline{a}}$. Patricia Thompson Bandeira, DC

Aprovada em 6 de março de 2019 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE do IME - Presidente

Prof$^{\underline{a}}$. Patricia Thompson Bandeira, DC da Escola Naval

Prof. Glauco Nery Taranto, Ph.D. da UFRJ

Prof. Roberto Ades, Dr. do IME

Rio de Janeiro
2019

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador *Paulo César Pellanda*, pelas orientações, palavras de incentivo, dedicação e todo apoio prestado não somente a mim como a todos os seus orientandos; certamente sem o senhor esta dissertação não teria se concretizado.

À minha coorientadora *Patrícia Thompson Bandeira*, pelos conhecimentos transmitidos a respeito da Transformada Haar e toda a ajuda a mim oferecida durante a elaboração dos teoremas e rotinas propostos nesta dissertação.

Aos integrantes do Departamento de Engenharia Elétrica do IME, pelo apoio prestado ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, que estiveram presente nessa jornada, nos trabalhos, nas provas e nas choradeiras no transcorrer do curso.

Ao meu marido *Jarcílio Marangone*, pela paciência e compreensão nesses dois anos, à minha família que mesmo longe sempre me apoiou e torceu por mim em todos os momentos dessa difícil jornada.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

ARM	-	Análise de Resolução Múltipla
EAG	-	Estabilidade Assintótica Global
FL	-	Função de Lyapunov
FT	-	Transformada de Fourier (*Fourier Transform*)
HWT	-	Transformada Wavelet Haar (*Haar Wavelet Transform*)
IME	-	Instituto Militar de Engenharia
LFT	-	Transformação Linear Fracionária (*Linear Fractional Transformation*)
LMI	-	Desigualdade Linear Matricial (*Linear Matrix Inequality*)
LPV	-	Linear a Parâmetros Variáveis (*Linear Parameter Varying*)
LTI	-	Linear Invariante no Tempo (*Linear Time-Invariant*)
LTV	-	Linear Variante no Tempo (*Linear Time Varying*)
PDLF	-	FL Dependente do Parâmetro
PILF	-	FL Independente do Parâmetro
PLMI	-	Desigualdade Linear Matricial Parametrizada
PSD	-	Programação Semidefinida
STFT	-	Transformada de Fourier de tempo curto (*Short Time FT*)
TH	-	Transformada Haar
TWD	-	Transformada Wavelet Discreta (*Discrete Wavelets Transform*)

SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$	-	conjunto dos números complexos
$\mathbb{N}$	-	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	-	conjunto dos números reais
$\mathbb{N}_+(\mathbb{R}_+)$	-	conjunto dos números naturais (reais) estritamente positivos
$\mathbb{R}^n$	-	conjunto dos vetores reais com n elementos
$\mathbb{R}^{n\times m}$	-	conjunto das matrizes reais com n linhas e m colunas
$\mathbb{S}^n$	-	conjunto das matrizes simétricas de dimensão $n \times n$
$\mathcal{L}_2$	-	espaço de funções quadraticamente integráveis
$\ell_2(\mathbb{Z})$	-	espaço de sequências quadraticamente somáveis
$\mathcal{L}_\infty$	-	espaço de funções com amplitude limitada
$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times m}$	-	matriz com n linhas e m colunas
$\mathbf{M}^T$	-	transposta da matriz $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}^{-1}$	-	inversa da matriz $\mathbf{M}$
$Tr(\mathbf{M})$	-	traço da matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{nxn}$
$\|\mathbf{M}\|$	-	norma 2 induzida
$\mathbf{M}^{pq}$	-	(p,q)-ésimo elemento de $\mathbf{M}$
$\mathcal{S}(\mathbf{M})$	-	utilizada para simplificar expressões matemáticas $\mathcal{S}(\mathbf{M}) \triangleq \mathbf{M} + \mathbf{M}^T$
norma H_∞	-	máximo valor singular no domínio da frequência
$\langle f(\theta),g(\theta)\rangle$	-	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)g(\theta)d\theta$ - produto interno de duas funções
$\langle \mathbf{M}(\theta)\,, g(\theta)\rangle$	-	matriz cujo elemento (p,q) é dado por $\langle \mathbf{M}^{pq}(\theta)\,, g(\theta)\rangle$
$\mathbf{M} \prec \mathbf{0}$	-	matriz negativa definida
$\mathbf{M} \succ \mathbf{0}$	-	matriz positiva definida
$\mathbf{M} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n\times m})$	-	$\mathbf{M}^{pq} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, $\forall(p,q)$

RESUMO

Nesta dissertação, realiza-se um estudo na área de sistemas não estacionários com dependência paramétrica geral, Lineares a Parâmetros Variáveis (LPV) ou *quasi*-LPV, cujo intuito é testar e tornar menos conservadora uma técnica recente de análise de desempenho robusto H_∞ com base no uso da Transformada Wavelet Haar (HWT, sigla em inglês para *Haar Wavelet Transform*). Além de, estendê-la para a síntese de controle robusto por realimentação de estados por meio do desenvolvimento de novas caracterizações por Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, sigla em inglês para Linear Matrix Inequalities) que definem o problema.

Algoritmos recentemente propostos para análise de estabilidade e desempenho robusto de sistemas LPV se baseiam no gradeamento do domínio paramétrico por meio da expansão por HWT das funções de dependência paramétrica do sistema e da busca de Funções de Lyapunov (FL) assintoticamente $\mathcal{L}_2$-quadráticas, ou seja, FL com dependência quadrática em relação aos estados do sistema e $\mathcal{L}_2$ em relação aos parâmetros variantes no tempo. Técnicas LPV que tratam de sistemas com representações por Transformações Lineares Fracionárias (LFT, sigla em inglês para *Linear Fractional Transformation*) ou politópicas não são capazes de tratar domínios paramétricos não convexos e sistemas com dependência paramétrica geral. Contrariamente, técnicas LPV tradicionais de gradeamento paramétrico não apresentam essas limitações mas garantem condições somente necessárias para estabilidade e desempenho, devido aos problemas LMI envolvidos de dimensionalidade infinita e de infinitas restrições exigindo testes complementares. Os novos algoritmos se baseiam em condições suficientes, são implementáveis computacionalmente e resolvem aqueles problemas associados às técnicas LPV tradicionais de gradeamento, sem no entanto requerer testes suplementares, mesmo para gradeamentos arbitrariamente esparsos. Diferentemente de resultados teóricos anteriores baseados na HWT, que não são construtivos de um ponto de vista numérico e algorítmico, esses novos métodos são sistemáticos e passíveis de implementação prática, evitando manipulações analíticas complexas enquanto consideram uma ampla classe de dependências paramétricas.

Este trabalho introduz novas caracterizações LMI para análise de desempenho robusto H_∞ e síntese de controle LPV por realimentação de estados com ganho $\mathcal{L}_2$ garantido, por meio do uso de FL assintoticamente $\mathcal{L}_2$-quadráticas. Caracterizações LMI recentes para análise de desempenho robusto são testadas e marginalmente melhoradas em termos de conservadorismo sendo então estendidas para a síntese de controle. Exemplos numéricos são utilizados para validar os algoritmos propostos e evidenciar as suas vantagens e limitações, por meio da comparação com resultados da literatura.

ABSTRACT

In this dissertation, a study is carried out in the field of non-stationary systems with general parametric dependencies, Linear Parameter Varying (LPV) or *quasi*-LPV, whose purpose is to test and make less conservative a recent H_∞ performance analysis technique based on the use of Haar Wavelet Transform (HWT), as well as extend it to the synthesis of robust control by state feedback through the development of new Linear Matrix Inequalities (LMI) characterizations that define the problem.

Recently proposed algorithms for stability and robust performance analysis of LPV systems are based on gridding the parameter domain by means of HWT expansion of parametric dependence functions of the system and on looking for asymptotically $\mathcal{L}_2$-quadratic Lyapunov Functions (LF), that is, LF with quadratic dependence on the system states and $\mathcal{L}_2$ on the time-varying parameters. LPV techniques dealing with systems represented by Linear Fractional Transformation (LFT) or polytopic models are not able to treat non-convex parametric domains and systems with general parameter dependencies. Conversely, classical parameter-gridding LPV techniques do not present these limitations but guarantee only necessary conditions for stability and performance due to infinite-dimensional and infinitely constrained LMI problems involved, requiring additional tests. The new algorithms are based on sufficient conditions, are computationally implementable and solve that problems associated to the conventional LPV-gridding techniques, without requiring further checks, even for arbitrarily sparse parameter grids. In contrast with previous Haar-based theoretical results which are not constructive from the algorithmic and numerical point of view, these new approaches are systematic and amenable for practical implementation, avoiding complex analytical manipulations while considering a vast class of parameter dependencies.

This work introduces new LMI characterizations for robust H_∞ performance analysis and state-feedback LPV-control synthesis with guaranteed $\mathcal{L}_2$ gain through the use of asymptotically $\mathcal{L}_2$-quadratic LF. Recent LMI characterizations for robust performance analysis are tested and marginally improved in terms of conservatism and then extended to the control synthesis. Numerical examples are used to validate the proposed algorithms and to demonstrate their advantages and limitations, through comparison with literature results.

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

Na engenharia de controle, a maioria das técnicas de análise e síntese foram desenvolvidas para sistemas lineares. Contudo, muitos sistemas são de natureza não linear, o que motivou o desenvolvimento de técnicas nos últimos anos para análise desses sistemas. Apesar de serem não lineares, muitas dessas plantas podem ser modeladas, para fins de análise e síntese, como Linear a Parâmetros Variáveis (LPV) ou *quasi*-LPV. A denominação *quasi*-LPV se aplica quando pelo menos um elemento do vetor de parâmetros dependentes do tempo é uma variável endógena, ou seja, depende também da própria dinâmica do modelo (DE ARAÚJO, 2013). A terminologia LPV foi inicialmente definida em (SHAMMA, 1988), de maneira distinta das outras classes tradicionais de sistemas, a Linear Invariante no Tempo (LTI) e a Linear Variante no Tempo (LTV), para fins de análise de controle via escalonamento de ganho. Diferente dos sistemas LTI, os LPV são não estacionários. Mais especificamente, os sistemas LPV são uma classe particular de sistemas LTV, em que os elementos variáveis dependem de parâmetros mensuráveis que variam ao longo do tempo.

Um dos métodos mais utilizados para projetar controladores para sistemas não lineares ou com dinâmica dependente de parâmetros, é o escalonamento de ganhos (*gain scheduling*). Conforme Shamma e Athans (1991), o método consiste basicamente em selecionar pontos operacionais da dinâmica da planta, obter uma aproximação linear invariante no tempo para cada um desses pontos e, por fim, projetar um compensador linear para cada planta linearizada utilizando qualquer técnica disponível de projeto de controle LTI, inclusive de controle ótimo ou robusto. Os parâmetros (ou "ganhos") dos compensadores são interpolados (ou "escalonados") entre os diversos pontos de operação, supondo que o parâmetro seja medido em tempo real, resultando em um compensador também variante no tempo. Um limitador para aplicação da técnica de linearização para o escalonamento de ganhos é que a estabilização e o desempenho de um sistema não estacionário de malha fechada só podem ser garantidos em uma vizinhança dos múltiplos pontos de equilíbrio e sob uma suposição de variação lenta de sinais (RUGH; SHAMMA, 2000).

O controle LPV se enquadra como uma classe específica de técnica *gain scheduling* em

que se busca uma função de Lyapunov, geralmente quadrática nos estados, pela solução de um problema de otimização ou de viabilidade sujeito a um conjunto de restrições do tipo Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, da sigla em inglês para *Linear Matrix Inequalities*). A síntese de controle LPV, que inclui intrinsecamente a lei de interpolação, passa pela síntese de uma Função de Lyapunov (FL) e, por isso, é conhecida como sujeita ao paradigma de Lyapunov. O grande sucesso e o crescente interesse nos métodos de controle LPV nas últimas três décadas talvez se deva à sua grande vantagem de garantia da estabilidade e do desempenho do sistema em malha fechada para todo o domínio operativo. Além de, consistir em uma extensão para sistemas LPV das técnicas de análise e síntese de controle robusto LTI dos tipos H_2 e H_∞ introduzidos no final da década de 1980.

A análise de estabilidade e de desempenho robusto de sistemas LPV continua a ser um desafio, a despeito dos notáveis progressos recentes na teoria de controle de sistemas dinâmicos, particularmente de controle LPV. A maior parte dos métodos de análise e síntese para sistemas incertos ou variantes no tempo baseados na teoria de Lyapunov mostram-se, muitas vezes, inadequados no caso particular de sistemas LPV. Primeiro, porque assume-se, geralmente, que os parâmetros evoluem em algum politopo convexo, usualmente um hiper-retângulo (GAHINET et al., 1996; BLIMAN, 2003) ou um simplex (GEROMEL; COLANERI, 2006; OLIVEIRA; PERES, 2007; CHESI et al., 2007). Infelizmente, tal suposição não é válida para a grande classe de sistemas LPV em que o conjunto de trajetórias paramétricas possíveis define domínios mais irregulares. Para contornar a eventual não convexidade do domínio paramétrico, esses métodos recorrem a algum tipo de técnica que estabeleça uma cobertura convexa, por exemplo, em (YU; SIDERIS, 1997). No entanto, essas técnicas são suscetíveis de introduzir conservadorismos, uma vez que trajetórias não realistas são consideradas. Em segundo lugar, os métodos existentes, em geral, são capazes de tratar somente uma classe limitada de dependências paramétricas das matrizes do sistema, basicamente linear (BLANCHINI; MIANI, 1999; GEROMEL; COLANERI, 2006; CHESI et al., 2007; OLIVEIRA; PERES, 2007), afim (GAHINET et al., 1996; TROFINO NETO; DE SOUZA, 2001; BLIMAN, 2003) ou racional (SCHERER, 2001; WANG; BALAKRISHNAN, 2002; CHESI, 2013). Consequentemente, esses métodos não são capazes de tratar diretamente dependências mais gerais encontradas em algumas aplicações de grande interesse prático, por exemplo, os modelos *quasi*-LPV que aparecem no campo aeroespacial, onde alguns dos parâmetros endógenos influenciam ele-

mentos das matrizes do sistema via funções trigonométricas (MARCOS; BALAS, 2004). Para aplicar os métodos citados em tais problemas, recorre-se a algum tipo de esquema de linearização ou inserção do modelo em outro do tipo politópico, o que é, reconhecidamente, um procedimento conservador.

Nessas mesmas linhas, algumas técnicas que apresentam os mesmos inconvenientes, mas que são de particular interesse para esta dissertação por apresentarem exemplos numéricos com potencial para comparação de resultados, são as que propõem FL afim-quadrática (FERON et al., 1996; HADDAD; BERNSTEIN, 1991; KAPILA et al., 1998; YU; SIDERIS, 1997) e biquadrática (TROFINO NETO; DE SOUZA, 1999; TROFINO NETO, 1999). Também de interesse para este estudo, a técnica de Chesi (2013), já citada, introduziu um método capaz de manipular uma classe particular de dependências paramétricas racionais em domínios politópicos que, após aproximações das dependências paramétricas por funções racionais, pode englobar um grande número de casos práticos com, supostamente, pouco conservadorismo, por tratar de condições necessárias e suficientes e considerar FL com dependência polinomial no estado. Porém, a maior desvantagem desse método, também comum a alguns outros, especialmente àqueles que utilizam representações do tipo Transformação Linear Fracionária (LFT, sigla para os termos em inglês *Linear Fractional Transformation*), é que não inclui a possibilidade de considerar FL dependentes do parâmetro e, por conseguinte, também não permite considerar taxas de variação paramétrica limitadas, o que é um fator de grande conservadorismo, pois em boa parte dos casos de interesse prático, os modelos dos sistemas não estão sujeitos a descontinuidades (derivadas paramétricas infinitas).

Uma estratégia bem conhecida para contornar as desvantagens acima indicadas é a discretização ou gradeamento do domínio paramétrico (WU et al., 1996; APKARIAN; ADAMS, 1998). Uma das características mais atraentes dessa abordagem é a possibilidade de tratar uma classe muito mais geral de sistemas ou de FL dependentes do parâmetro, incluindo domínios paramétricos não convexos. Contudo, a grande falha das técnicas tradicionais de gradeamento é que as soluções garantem a satisfação das restrições somente para os pontos do domínio discreto considerado, e não necessariamente para o domínio contínuo inteiro. Consequentemente, uma estimação otimista do domínio de estabilidade ou do desempenho robusto pode ocorrer. Na prática, deve-se selecionar uma grade tão densa quanto possível e esperar que as restrições sejam atendidas para os infinitos pontos não considerados no cálculo. Obviamente, quanto maior a quantidade

de pontos considerados, maior é a carga computacional associada. Em suma, as técnicas tradicionais de gradeamento fracassam ou por considerar apenas condições necessárias ou por não fornecer regras sistemáticas para selecionar FL candidatas dependentes do parâmetro (APKARIAN; ADAMS, 1998; PELLANDA et al., 2004).

Em (DE ARAÚJO, 2013) e (DE ARAÚJO et al., 2015), os autores propuseram um método baseado em grade paramétrica para a análise de estabilidade de sistemas LPV que consegue tratar as dificuldades das técnicas clássicas de gradeamento pelo uso da Transformada Haar (TH). Ou seja, o método se baseia na teoria wavelet Haar (BURRUS et al., 1998; MALLAT, 2009) para suplantar as limitações citadas dos esquemas de gradeamento clássicos. A novidade da abordagem proposta reside no uso da teoria wavelet para garantir a satisfação das restrições no domínio paramétrico inteiro, mesmo quando uma grade paramétrica arbitrariamente esparsa é considerada. Isso representa um grande avanço em relação aos métodos tradicionais de gradeamento, que não fornecem tal certificado sem a realização de testes de verificação suplementares. Com esse objetivo, a matriz de estado dependente do parâmetro é substituída nas LMI por uma aproximação arbitrariamente precisa, obtida por uma expansão em série de Haar truncada. Então, uma FL quadrática no estado e afim por partes no parâmetro, também baseada em uma expansão Haar, é buscada via Programação Semi-Definida (PSD), enquanto um limitante superior da norma dos termos residuais da expansão Haar da matriz de estado é também considerado. A expansão Haar forma uma base para o espaço de funções $\mathcal{L}_2$ e a dependência afim no parâmetro da FL quadrática no estado se torna assintoticamente $\mathcal{L}_2$-quadrática para expansões infinitas de Haar. Os algoritmos resultantes envolvem condições suficientes de estabilidade, cujo grau de conservadorismo decresce com o aumento da densidade da grade paramétrica e do nível de truncamento da expansão Haar. Eles também herdam as principais características das técnicas clássicas de gradeamento: podem tratar diretamente uma vasta classe de sistemas, bem como domínios paramétricos não convexos, e considerar taxas de variação paramétrica limitadas, o que é mais realista.

No entanto, os resultados teóricos envolvidos em (DE ARAÚJO et al., 2015) não são sistemáticos nem construtivos de um ponto de vista numérico, requerendo manipulações algébricas especificas para cada sistema e para cada classe de função de parâmetro da matriz de estados. Mais recentemente, Bandeira (2018) e Bandeira et al. (2018) introduziram novos algoritmos baseados em TH, derivados daqueles resultados, que são adequados para implementação prática e evitam manipulações analíticas e algébricas complexas quando

uma ampla classe de dependências e domínios paramétricos irregulares são considerados. Além disso, Bandeira (2018) estendeu a técnica para a análise de desempenho robusto H_2 e H_∞, utilizando tanto FL Independentes do Parâmetro (PILF) como Dependentes do Parâmetro (PDLF). Contudo, os testes numéricos apresentados focaram principalmente na análise de desempenho H_2.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVOS GERAIS

O principal objetivo deste trabalho é testar numericamente a aplicabilidade dos algoritmos propostos por Bandeira (2018), para análise de desempenho robusto H_∞ de sistemas LPV, propondo melhorias marginais em termos de complexidade e conservadorismo, bem como estendê-los para a síntese de controle robusto com ganho $\mathcal{L}_2$ garantido por realimentação de estados por meio do desenvolvimento de novas caracterizações LMI.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para atingir os pontos supracitados, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- estudar os algoritmos desenvolvidos em (BANDEIRA, 2018) e avaliar suas limitações e potencialidades na análise de desempenho robusto H_∞ de modelos acadêmicos, de forma a complementar os resultados publicados;
- propor melhorias na técnica de análise supracitada, em termos de complexidade e conservadorismo, mesmo que marginais;
- desenvolver e testar novos algoritmos para síntese de controle por realimentação de estados para sistemas LPV via TH.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está organizada em 4 capítulos, além desta introdução, da seguinte maneira:

- Capítulo 2: Apresenta os fundamentos teóricos que são a base dessa dissertação, bem como alguns resultados anteriores sobre análise e síntese de controle de sis-

temas LPV. São apresentados conceitos sobre a transformada Wavelet Haar, as desigualdades matriciais lineares, os sistemas LPV, a análise de estabilidade e de desempenho robusto H_∞ de sistemas LPV.

- Capítulo 3: Apresenta de forma resumida as técnicas propostas em (DE ARAÚJO et al., 2015), (BANDEIRA, 2018) e (BANDEIRA et al., 2018) para análise de estabilidade e de desempenho robusto H_∞ de sistemas LPV utilizando a TH.

- Capítulo 4 Consiste no cerne do trabalhado desenvolvido, onde são apresentadas as aplicações da técnica proposta por Bandeira (2018) para a análise de desempenho robusto H_∞ de sistemas LPV, assim como as modificações propostas para melhoria do conservadorismo e sua extensão para a síntese de controle LPV-Haar por realimentação de estados.

- Capítulo 5: Discute-se, nesse capítulo, os pontos relevantes, as vantagens e limitações das técnicas estudadas, e também são apresentadas as considerações finais, e as perspectivas para futuros trabalhos.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos, conceitos e definições relacionados às principais ferramentas utilizadas neste trabalho e que formam a base para a teoria de análise e síntese de controle LPV baseada na TH, apresentada no Capítulo 3, e para os desenvolvimentos e aplicações numéricas introduzidos e apresentados no Capítulo 4. A Seção 2.1 é dedicada à Transformada Wavelet Discreta e, particularmente, à TH. Na Seção 2.2, algumas definições relacionadas às LMI são apresentadas. A última e mais longa seção deste capítulo, a Seção 2.3, relaciona conceitos sobre sistema LPV e a problemática de sua análise de estabilidade e desempenho e de síntese de controle.

2.1 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA E DE HAAR

Uma *wave* (onda) é definida como uma função que oscila no tempo ou no espaço. A análise de Fourier é uma análise de ondas que expande sinais ou funções em termos de senoides (ou exponenciais complexas). No entanto, ao se trabalhar no domínio da frequência, a informação no tempo é perdida, e a análise se restringe a fenômenos estacionários (BANDEIRA, 2018). Ao se analisar a transformada de Fourier de um sinal é impossível, por exemplo, identificar em que momento um evento particular ocorreu.

Como os sinais mais interessantes são geralmente aqueles que contêm características não estacionárias, e estas são as mais importantes, a análise de Fourier não é adequada para detectá-las (BANDEIRA, 2018). Para tentar corrigir este problema, Gabor (1946a,b,c) adaptou a transformada de Fourier para analisar uma pequena janela do sinal: a *Short Time Fourier Transform* fornece alguma informação sobre quando e em quais frequências o evento ocorre. Mas só é possível obter esta informação com precisão limitada, sendo esta determinada pelo tamanho da janela.

Uma wavelet (pequena onda) tem sua energia concentrada no tempo e permite analisar o transiente, sendo útil para fenômenos não estacionários (BURRUS et al., 1998). Logo, a análise wavelet representa o próximo passo lógico, isto é, uma técnica de janelamento com regiões de tamanho variável. A análise wavelet permite o uso de intervalos de tempo longos para obter informação em baixa frequência mais precisa e regiões menores para obter informação em alta frequência (BANDEIRA, 2018).

Para simplificar a apresentação, nesta seção, $\boldsymbol{\theta}$ é considerado um parâmetro escalar θ. Uma wavelet possui as seguintes características:

Definição 2.1. *Uma função $\psi(\theta)$ tem suporte compacto, se existe um intervalo fechado e limitado, fora do qual $\psi(\theta) = 0$.*

Definição 2.2. *Uma wavelet é uma função $\psi(\theta) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \bigcap \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, tal que a família de funções*

$$\psi_{j,k}(\theta) \triangleq 2^{\frac{j}{2}} \psi\left(2^j \theta - k\right), \tag{2.1}$$

em que j e k são inteiros arbitrários, seja uma base ortonormal para o espaço $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

Observações:

a) Da definição acima, se ψ é uma wavelet, então $\psi_{j,k}$ também o será para qualquer j,$k \in \mathbb{Z}$.

b) O fator $2^{j/2}$ mantém a norma da wavelet constante independente da escala j.

c) Conforme o índice j varia, a forma da wavelet muda em escala, o que permite representar o detalhe ou resolução.

d) Note que conforme a escala se afina (j maior), os passos no tempo ficam menores.

Para uma melhor interpretação das wavelets, faz-se necessário utilizar o conceito de resolução para definir os efeitos de mudança de escala. Portanto, define-se primeiro a função escala ϕ, e depois a função wavelet ψ em termos de ϕ (BURRUS et al., 1998). Considere o conjunto de funções escala

$$\phi_k(\theta) = \phi(\theta - k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \phi \in \mathcal{L}_2. \tag{2.2}$$

O subespaço de $\mathcal{L}_2$ gerado por estas funções é definido por

$$\mathbb{V}_0 = \overline{span\{\phi_k\}}, \tag{2.3}$$

onde a barra representa fechamento de $\mathbb{V}_0$. $\mathbb{V}_0$ contém além de todos os sinais que podem ser escritos como combinação linear de $\phi_k(\theta)$, também todos os sinais limites das expansões infinitas. Isto significa que é possível escrever qualquer função $f(\theta) \in \mathbb{V}_0$ como

$$f(\theta) = \sum_k v_k \phi_k(\theta). \tag{2.4}$$

Caso haja a necessidade de aumentar o tamanho do subespaço gerado, deve-se mudar a escala de tempo. Uma família de funções bidimensionais é gerada a partir do escalonamento da função de escala básica:

$$\phi_{j,k}(\theta) = 2^{j/2}\phi(2^j\theta - k), \tag{2.5}$$

tal que

$$\mathbb{V}_j = \overline{span\{\phi_{j,k}(\theta)\}} = \overline{span\{\phi_k(2^j\theta)\}}, \tag{2.6}$$

o que significa que se $f(\theta) \in \mathbb{V}_j$, então

$$f(\theta) = \sum_k v_k\phi_k(2^j\theta - k). \tag{2.7}$$

Para $j > 0$, $\mathbb{V}_j$ é maior pois $\phi_{j,k}$ é mais estreita e deslocada em passos menores, representando assim detalhes mais finos. Para $j < 0$, $\mathbb{V}_j$ é menor já que $\phi_{j,k}$ é mais larga e deslocada em passos maiores, representando apenas informações grosseiras.

A formulação Análise de Resolução Múltipla (ARM) requer que (BURRUS et al., 1998):

$$\cdots \subset \mathbb{V}_{-2} \subset \mathbb{V}_{-1} \subset \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_2 \tag{2.8}$$

ou

$$\mathbb{V}_j \subset \mathbb{V}_{j+1} \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

com

$$\mathbb{V}_{-\infty} = \{0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{V}_\infty = \mathcal{L}_2. \tag{2.10}$$

O espaço que contém sinais de alta resolução também contém os de baixa resolução (FIG. 2.1). Os elementos de um espaço são simplesmente versões escalonadas dos elementos do próximo espaço

$$f(\theta) \in \mathbb{V}_j \Leftrightarrow f(2\theta) \in \mathbb{V}_{j+1}. \tag{2.11}$$

O espaço dos intervalos de $\phi(2^j\theta - k)$, denotado por $\mathbb{V}_j$ e apresentado em (2.8) e (2.11), é obtido impondo que $\phi(\theta) \in \mathbb{V}_1$, isso significa que se $\phi(\theta)$ está em $\mathbb{V}_0$, também está em $\mathbb{V}_1$, espaço ocupado por $\phi(2\theta)$. Ou seja, $\phi(\theta)$ pode ser escrita como a soma ponderada de

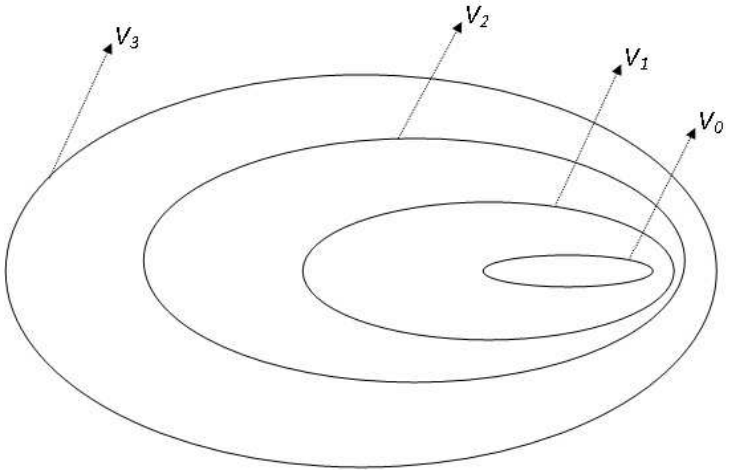


FIG. 2.1: Espaço $\mathbb{V}_j$.
Fonte: (BANDEIRA, 2018)

$\phi(2\theta - n)$:

$$\phi(\theta) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\phi(2\theta - n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

onde os coeficientes $h(n)$ são uma sequência de números reais ou possivelmente complexos chamados de coeficientes de função de escala (ou filtro de escala ou vetor de escala).

As funções wavelet $\psi_{j,k}$ geram as diferenças entre os espaços gerados pelas funções escala. O complemento ortogonal de $\mathbb{V}_j$ em $\mathbb{V}_{j+1}$ é definido como $\mathbb{W}_j$. Isto significa que todos os elementos de $\mathbb{V}_j$ são ortogonais aos membros de $\mathbb{W}_j$:

$$\langle \phi_{j,k}(\theta), \psi_{j,l}(\theta) \rangle = \int \phi_{j,k}(\theta), \psi_{j,l}(\theta) d\theta = 0, \quad j,k,l \in \mathbb{Z}. \tag{2.13}$$

Começando (2.8) em $j = 0$, tem-se que

$$\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_2. \tag{2.14}$$

Definindo o subespaço $\mathbb{W}_0$ gerado pela wavelet tal que

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{W}_0 \tag{2.15}$$

que pode ser estendido para

$$\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{W}_1. \tag{2.16}$$

Logo, em geral, conforme ilustrado na FIG. 2.2, tem-se que

$$\mathcal{L}_2 = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{W}_1 \oplus \cdots \tag{2.17}$$

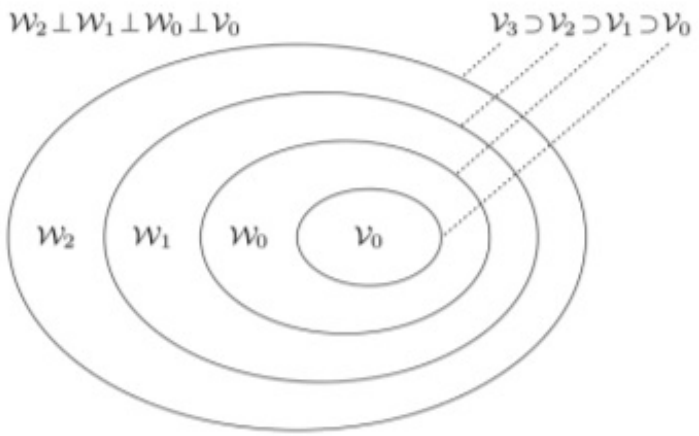


FIG. 2.2: Relação entre os espaços $\mathbb{V}_j$, $\mathbb{W}_i$.
Fonte: (BURRUS et al., 1998)

A escala do espaço inicial é arbitrária e pode ser escolhida em uma resolução mais alta.

Como as wavelets residem no espaço ocupado pela próxima função escala mais estreita, $\mathbb{W}_0 \subset \mathbb{V}_1$, elas podem ser escritas como a soma ponderada de $\phi(2\theta - n)$, definida em (2.12) (BURRUS et al., 1998):

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \sum_n h_1(n)\sqrt{2}\phi(2\theta - n), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ h_1(n) &= (-1)^n h(1-n). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como as funções definidas em (2.12) e (2.18) geram uma família de funções, elas às vezes são chamadas de "wavelet pai" e "wavelet mãe", respectivamente. De fato, o conjunto de funções $\phi_k(\theta)$ e $\psi_{j,k}(\theta)$ gera o espaço $\mathcal{L}_2$, dessa maneira, qualquer função $f(\theta) \in \mathcal{L}_2$ pode ser escrita como uma expansão em somatório infinito, da seguinte forma:

$$f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \phi_k(\theta) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{j,k} \psi_{j,k}(\theta). \tag{2.19}$$

O primeiro somatório fornece uma aproximação em baixa resolução de $f(\theta)$. O nível de resolução da função aumenta com o acréscimo no índice j no segundo somatório; ou

seja, existe uma analogia com a série de Fourier em que os termos de mais alta frequência contêm os detalhes do sinal.

Os coeficientes v_k e $w_{j,k}$, de (2.19), são calculados pelos produtos internos:

$$v_k = \langle f(\theta)\ ,\ \phi_k\,(\theta)\rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\phi_k\,(\theta)\,d\theta, \tag{2.20a}$$

$$w_{j,k} = \langle f(\theta)\ ,\ \psi_{j,k}\,(\theta)\rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\psi_{j,k}\,(\theta)\,d\theta. \tag{2.20b}$$

Neste estudo, as funções $\phi_j(\theta)$ e $\psi_{ij}(\theta)$ de interesse são aquelas ortonormais, embora isso não seja requisito obrigatório para a definição de uma wavelet.

Se o primeiro somatório da segunda parcela de (2.19) for truncado em $j = J$, uma aproximação $\hat{f}(\theta)$ da função $f(\theta)$ é definida. Assim, quanto maior for o limitante J, menor será o erro de aproximação. Outro fator que influencia no erro de aproximação é a função de base escolhida. Neste caso, a partir de um espaço inicial $\mathbb{V}_0$, pode-se aproximar uma função da seguinte forma:

$$f(\theta) = \hat{f}(\theta) + e(\theta) = \sum_{k=0}^{K} v_k\phi_k(\theta) + \sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{g(j)} w_{j,k}\psi_{j,k}(\theta) + e(\theta), \tag{2.21}$$

em que $e(\theta)$ é o erro da aproximação ao se usar o truncamento, ou seja:

$$e(\theta) = \sum_{j=J+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{g(j)} w_{j,k}\psi_{j,k}(\theta),$$

e $g(j)$ relaciona o tempo ou localização k com a escala ou frequência j, variando de acordo com o domínio da função.

Existem diversas vantagens para o uso de funções escalas e wavelets ortogonais entre si. Funções de base ortogonais permitem o cálculo dos coeficientes de expansão de forma simples e o teorema de Parseval associado permite particionar o sinal de energia no domínio da transformada wavelet. Se as funções escala e wavelet formarem uma base ortonormal, então o teorema de Parseval pode ser utilizado para relacionar a energia do sinal $f(\theta)$ em cada componente com seus coeficientes wavelet, da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\theta)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |w_{j,k}|^2. \tag{2.22}$$

As bases wavelets ortogonais são também bases incondicionais[1] para uma ampla classe de funções e, portanto, são bases ótimas para a sua compressão e reconstrução (DONOHO, 1993). Isto significa que as expansões wavelet de funções possuem coeficientes cujos valores caem rapidamente com o aumento do nível de resolução, assim a função pode ser representada com boa aproximação por um pequeno número de coeficientes. Note que a energia do erro, dada por $\int_{-\infty}^{\infty} |e(\theta)|^2 d\theta = \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{g(j)} |w_{j,k}|^2$, tende a zero quando $J \to \infty$.

Haar (1910) mostrou que funções de ondas quadradas podem ser transladadas e escalonadas para criar uma base para o espaço de funções $\mathcal{L}_2$. Somente muitos anos mais tarde, verificou-se que o sistema de Haar é um caso particular de um sistema wavelet. Uma wavelet Haar é definida no espaço de Hilbert $\mathcal{L}_2$ que assume valores em $\left\{0, \sqrt{2^i}\right\}$, sendo i um número inteiro positivo. Escolhendo a função escala $\phi(\theta)$ com suporte compacto $0 \leq \theta \leq 1$, a solução de (2.12) é uma função retângulo simples, com coeficientes $h(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o que equivale a:

$$\phi(\theta) = \phi(2\theta) + \phi(2\theta - 1), \tag{2.23}$$

e a solução de (2.18) requer uma função wavelet $\psi(\theta)$ com $h_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $h_1(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja,

$$\psi(\theta) = \phi(2\theta) - \phi(2\theta - 1). \tag{2.24}$$

Portanto, as respectivas funções da base Haar Pai e Mãe são dadas por

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq \theta < 1, \\ 0, \text{ caso contrário}, \end{cases} \tag{2.25a}$$

e

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq \theta < 0{,}5, \\ -1, \text{ se } 0{,}5 \leq \theta < 1, \\ 0, \text{ caso contrário}. \end{cases} \tag{2.25b}$$

e estão graficamente representadas na FIG. 2.3.

A partir da função Haar mãe, é possível construir funções de base de níveis de resolução mais elevados. As funções desta base são constituídas por constantes, ou constantes

[1]Uma base ortogonal de um espaço de funções é incondicional, se qualquer permutação de seus elementos, é também uma base para esse espaço.

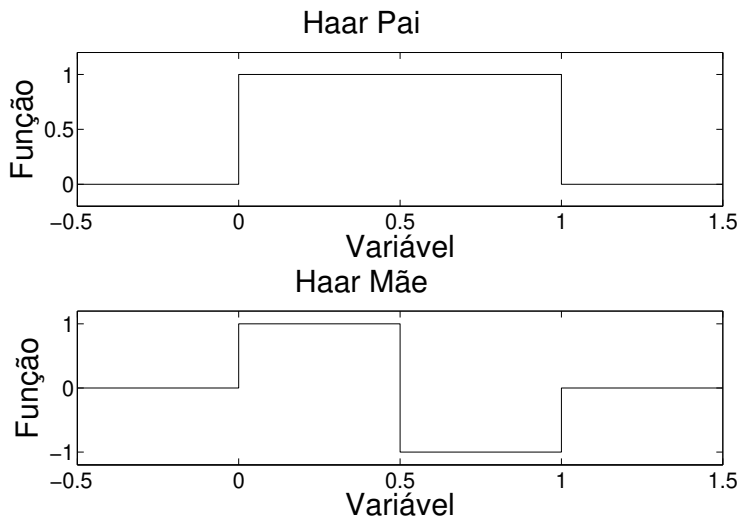


FIG. 2.3: Perfil das funções da base Haar.
Fonte: (BANDEIRA, 2018)

por partes, conforme podem ser verificadas nas representações das funções pai e mãe apresentadas em (2.25) e na FIG. 2.3. Assim, todas as demais funções da base Haar geradoras dos subespaços $\mathbb{W}_{ij}$, por guardarem as características da função mãe, têm esta propriedade (BANDEIRA, 2018). Uma consequência disso é que, no processo de síntese de funções, a base Haar possibilita aproximar uma determinada função por outra constante por partes.

A aproximação obtida pela TH, em várias resoluções, para uma dada função teste, é ilustrada na FIG. 2.4. O exemplo trata da mistura de um sinal ondulatório, que tem perfeita representação no domínio de Fourier, e duas descontinuidades. A componente no espaço inicial da decomposição ($\mathbb{V}_0$) é, simplesmente, a média do sinal. Com a inclusão crescente de escalas wavelets, a aproximação converge para o sinal original. Embora na FIG. 2.4 se utilize a base Haar, a recomposição ilustra uma propriedade geral bastante conhecida da Transformada Wavelet Discreta (TWD): cada novo nível de resolução acrescido reduz o erro médio quadrático entre a síntese e a função original. Esta característica decorre da forma pela qual os coeficientes da transformada são obtidos.

A partir desta abordagem, pode-se representar qualquer função $f(\theta) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ da seguinte maneira:

$$f(\theta) = v_0(\theta) + \sum_{j=0}^{\infty} w_j(\theta), \tag{2.26}$$

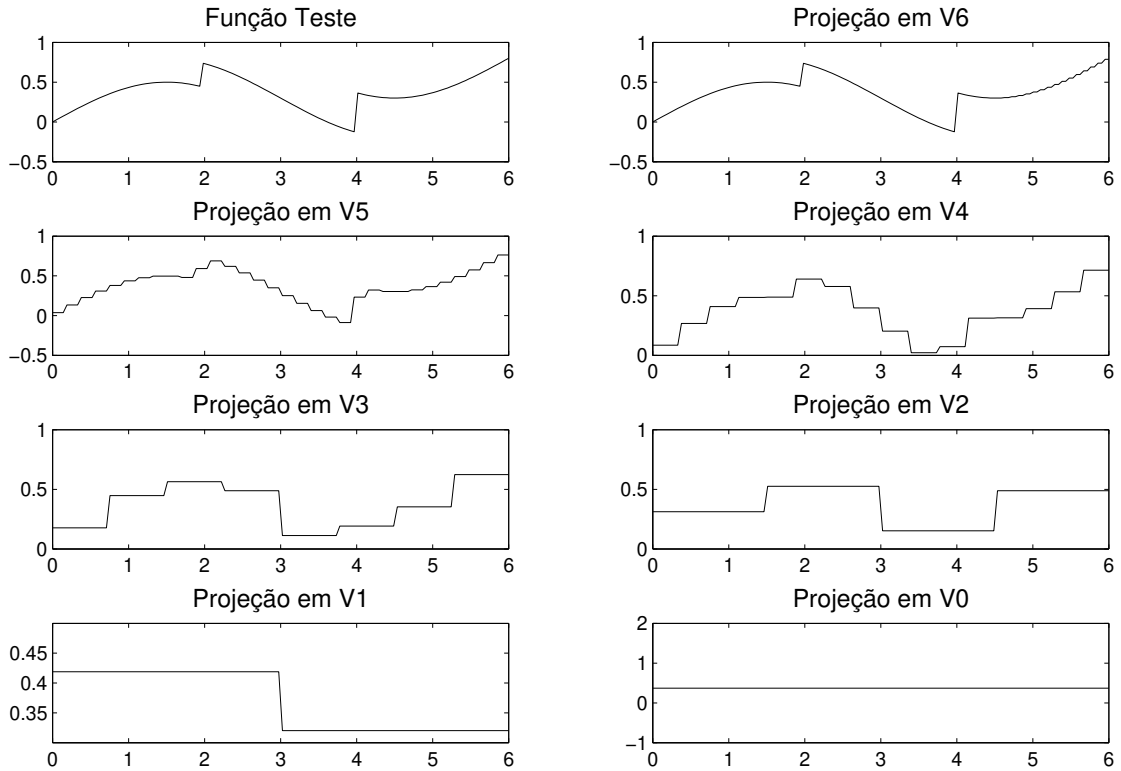


FIG. 2.4: Aproximações dadas pelas funções Haar em $\mathbb{V}_j$.

em que

$$v_0(\theta) \in \mathbb{V}_0, \quad \text{ou seja} \quad v_0(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \phi_k(\theta),$$

e

$$w_j(\theta) \in \mathbb{W}_j, \quad \text{ou seja} \quad w_j(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{j,k} \psi_{j,k}(\theta).$$

Assim

$$f(\theta) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{v_0(\theta)}_{\mathbb{V}_0} + w_0(\theta)}_{\mathbb{V}_1} + w_1(\theta)}_{\mathbb{V}_2} + w_2(\theta)}_{\mathbb{V}_3} + w_3(\theta)}_{\mathbb{V}_4} + \ldots \tag{2.27}$$

Outras propriedades relativas à função escalar e wavelet de Haar e também aos algoritmos para a decomposição e reconstrução Haar, podem ser encontrados em (BANDEIRA, 2018). Algoritmos para decomposição e recomposição Haar e obtenção de ex-

pansões Haar truncadas estão disponíveis no *Wavelet Toolbox* do programa Matlab®.

2.2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMI)

Os estudos sobre LMI associados a sistemas de controle foram motivados, principalmente, pela teoria de estabilidade de Lyapunov (BOYD et al., 1994) que mostrou que um sistema linear homogêneo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{2.28}$$

é estável, se e somente se, existir uma matriz real simétrica $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, tal que

$$\mathbf{P} \succ \mathbf{0} \text{ e que } \mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} \prec \mathbf{0}, \tag{2.29}$$

em que símbolo "$\succ$" significa que $\mathbf{P}$ é positiva definida, isto é, $\mathbf{u}^T\mathbf{P}\mathbf{u} > \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{u} \in R^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, e o símbolo "$\prec$" significa que $\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}$ é negativa definida. A segunda restrição em (2.29) é chamada de inequação de Lyapunov em $\mathbf{P}$, sendo uma forma especial de LMI. A matriz $\mathbf{P}$ também é referida muitas vezes na literatura como *matriz de Lyapunov*. Foi demonstrado por Lyapunov que essa LMI pode ser explicitamente resolvida. De fato, dada uma matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succ 0$, pode-se encontrar analiticamente, pela solução de um conjunto de equações lineares, uma matriz $\mathbf{P} \succ 0$ que satisfaz a equação

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q} \tag{2.30}$$

se e somente se o sistema (2.28) for estável.

Willems (1971) comprovou também que a LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} & \mathbf{PB} + \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \succ \mathbf{0} \tag{2.31}$$

poder ser resolvida pelo estudo das soluções simétricas da seguinte equação algébrica de Ricatti:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - (\mathbf{PB} + \mathbf{C}^T)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}) = -\mathbf{Q}, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succ 0. \tag{2.32}$$

Nas LMI (2.29) e (2.31), a matriz $\mathbf{P}$ é a variável do problema, sendo as outras matrizes consideradas conhecidas *a priori*. Note que as matrizes das LMI são lineares na variável.

Essas LMI podem ser facilmente reescritas na forma da definição a seguir, em que os elementos da matriz $\mathbf{P}$ passam a formar um vetor de variáveis a serem determinadas.

Definição 2.3. *(BOYD et al., 1994) Uma LMI é uma desigualdade da forma*

$$\mathbf{F}(x) := \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{F}_i \succ 0 \tag{2.33}$$

em que $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots x_m]^T \in R^m$ *é a variável e as matrizes simétricas* $\{\mathbf{F}_i \in R^{n\times n}, i = 0,...,m\}$ *são dados do problema.*

A LMI 2.33 é uma restrição convexa em $\mathbf{x}$, isto é, o conjunto $\{\mathbf{x}|\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{0}\}$ é convexo. Uma outra propriedade importante é que todos os autovalores de uma matriz real e simétrica são reais e que, se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{0}$ ($\mathbf{F}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{0}$), todos os seus autovalores são positivos (negativos), ou seja, o menor (maior) autovalor $\lambda_{min}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$ ($\lambda_{max}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$) é positivo (negativo). Uma maneira válida de expressar múltiplas LMI, $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{0}$,...,$\mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{0}$, é por meio de uma simples LMI: $diag(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}),...,\mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x})) \prec \mathbf{0}$. Também, pode-se utilizar o complemento de Schur para converter algumas desigualdades matriciais não lineares para a forma de LMI (BOYD et al., 1994).

Os problemas de encontrar $\mathbf{P}$ sujeito às restrições (2.29) e (2.31) são ditos problemas de viabilidade, mas muitos problemas na área de sistemas de controle são definidos como problemas de otimização de uma combinação linear das variáveis sujeita a restrições LMI, ou seja, $\min_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)$ sujeita a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{0}$, em que $\mathbf{c}$ é um vetor conhecido.

Muitos algoritmos de programação semidefinida estão disponíveis hoje para solução numérica de problemas de viabilidade ou otimização convexa (BOYD et al., 1994). Neste trabalho, o *solver* Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000) é utilizado para prover soluções numéricas de problemas LMI.

2.3 SISTEMAS LPV E *QUASI*-LPV

Uma classe importante de sistemas dinâmicos não estacionários, da qual fazem parte vários sistemas aeroespaciais e mecatrônicos, pode ser representada por um conjunto de equações diferenciais não lineares de primeira ordem. Modelos LPV são, muitas vezes, úteis para a aproximar a dinâmica de sistemas não lineares (TÓTH et al., 2010; LOVERA et al., 2013). A estrutura dos modelos LPV fica em um campo intermediário entre a dinâmica linear e a não linear, sendo descrita por equações diferenciais lineares cujos

dados dependem possivelmente de uma forma não linear dos parâmetros que variam no tempo e podem depender da dinâmica do próprio sistema (BANDEIRA, 2018).

Por meio de uma escolha apropriada dos vetores das variáveis de estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, da entrada $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ e da saída $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$, pode-se, em geral, obter um modelo $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}(t),t),t)$, representado por uma notação mais simplificada como $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}(t),t)$, não linear em relação ao vetor de estado, mas linear em relação à entrada, da seguinte forma (RUGH; SHAMMA, 2000):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{2.34}$$

As matrizes $\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)$, $\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)$, $\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)$ e $\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)$, cujos elementos são supostos pertencer ao espaço $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, são de dimensões compatíveis com as dimensões do vetor de estado, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, e dos sinais de entrada, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, e de saída, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$, e definem completamente a dinâmica do sistema.

Nota-se que a característica não estacionária tem origem no vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}\left(t\right) \in \mathbb{R}^r$, com $\boldsymbol{\theta}\left(t\right) = \left[\boldsymbol{\theta}_x^T\left(\mathbf{x}\left(t\right)\right)\boldsymbol{\theta}_p^T\left(t\right)\right]^T$, em que:

- $\boldsymbol{\theta}_x\left(\mathbf{x}\left(t\right)\right) \in \mathbb{R}^{r_1}$ é uma variável endógena, ou seja, que depende da dinâmica interna do sistema;

- $\boldsymbol{\theta}_p\left(t\right) \in \mathbb{R}^{r_2}$ é um parâmetro exógeno, ou seja, que evolui no tempo de forma independente da dinâmica interna do sistema.

A presença dos parâmetros endógenos, $\boldsymbol{\theta}_x\left(\mathbf{x}\left(t\right)\right)$, no vetor de parâmetros, $\boldsymbol{\theta}\left(t\right)$, caracteriza o modelo denominado de *quasi*-LPV (RUGH; SHAMMA, 2000), no qual a dinâmica não linear da planta é reescrita como se fosse independente dos estados por meio de parâmetros variáveis no tempo inseridos no vetor $\boldsymbol{\theta}_p(t)$, como detalhado mais adiante.

Os sistemas LPV podem ser vistos como uma generalização dos sistemas Lineares Invariantes no tempo (LTI) ou dos sistemas Lineares Variantes no Tempo (LTV), já que no conjunto de suas possíveis trajetórias podem estar as funções constantes, $\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_0$, ou funções do tempo $\boldsymbol{\theta}(t) = t$.

O paradigma LPV foi introduzido por Shamma (1988), em sua tese de doutorado, para análise de tabelamento de ganhos no projeto de controladores. O tabelamento de ganhos é uma abordagem que constrói um controlador não linear para uma planta não linear, interligando uma coleção de controladores lineares. Esses controladores são combinados

em tempo real (por chaveamento ou interpolação) de acordo com uma medida em tempo real.

Nesse contexto, é difícil dissociar o problema de análise do problema de projeto ou síntese de controladores, em uma discussão sobre modelagem ou sistemas LPV (BANDEIRA, 2018). Na síntese de controladores dentro da técnica de tabelamento (ou interpolação) de ganhos, em que coeficientes do controlador variam de acordo com os sinais que definem a operação do sistema, que por sua vez podem ser tanto exógenos quanto endógenos em relação à planta, o primeiro passo é a obtenção de uma descrição linear aproximada do sistema não linear descrito em (2.34) em torno de uma trajetória das condições operativas, cujas variações são consideradas suficientemente lentas (RUGH; SHAMMA, 2000). A obtenção de modelos lineares justifica-se pelo grande desenvolvimento de técnicas de controle lineares nas últimas décadas.

A abordagem clássica é aquela baseada na linearização Jacobiana da planta não linear ao redor de uma família de pontos de equilíbrio, tendo como resultado uma família de plantas linearizadas. Na prática, historicamente, a maneira mais utilizada consiste em:

- obter um modelo linearizado, via linearização Jacobiana clássica do modelo (2.34) em torno de um conjunto de pontos de equilíbrio $\mathbf{x}_0^{(i)}(\mathbf{u}_0^{(i)})$,$i = 1,2,...$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &\cong \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_i)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_i)\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t) &\cong \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_i)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}_i)\mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

  parametrizado por

$$\boldsymbol{\theta}_i(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x(\mathbf{x}_0^{(i)}) \\ \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r,\ r = r_1 + r_2;$$

- definir uma trajetória nominal de $\mathbf{x}_0(t)$ para o sistema e, supondo que $\boldsymbol{\theta}_x(\mathbf{x}(t))$ e $\dot{\boldsymbol{\theta}}_x(\mathbf{x}(t)) = d\boldsymbol{\theta}_x(\mathbf{x}(t))/dt$ são limitadas e independentes de $\mathbf{x}_0(t)$ e de $d\mathbf{x}_0(t)/dt$, derivar um modelo do tipo LPV (2.34) onde o parâmetro e sua taxa de variação evoluem em domínios compactos, $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \in \Theta_d \subset \mathbb{R}^r$,$\forall t$;

- eventualmente, escolher uma trajetória $\boldsymbol{\theta}(t) \longleftarrow \boldsymbol{\theta}_0(t)$ ou congelar o parâmetro em um ponto dado $\boldsymbol{\theta}(t) \longleftarrow \boldsymbol{\theta}_0$, para obter, respectivamente, um modelo LTV ou LTI.

Contudo, as trajetórias dos estados do modelo LPV assim obtido aproximam as dos estados do sistema não linear somente para taxas de variação paramétrica suficientemente baixas (ROSENBROOK, 1963).

Outra abordagem é obter um modelo *quasi*−LPV a partir do modelo não linear consistindo em escolher convenientemente a função $\boldsymbol{\theta}_x(\mathbf{x}(t))$ para reescrever a dinâmica da planta em um formato em que os termos não lineares possam ser redefinidos por um parâmetro variante unicamente em função do tempo. De forma análoga ao caso anterior, considera-se que as trajetórias desse parâmetro são limitadas e independentes das trajetórias de $\mathbf{x}(t)$, para desacoplar as funções matriciais $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$, $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))$, $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))$ e $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}(t))$ das variáveis de estado (BANDEIRA, 2018). É importante observar que nesta formulação não existe linearização da planta, nem ponto de equilíbrio explícito. Em contrapartida, ela pode ser muito conservadora, pois trajetórias irrealistas são introduzidas na descrição da planta. Ou seja, mesmo que limites nas taxas de variações dos parâmetros compatíveis com a realidade sejam considerados, trajetórias fisicamente impossíveis para a dinâmica original do sistema são invariavelmente introduzidas no modelo. Conclui-se, então, que a dinâmica de um modelo *quasi*−LPV, em geral, pode não se aproximar adequadamente daquela do correspondente sistema não linear.

Embora o modelo *quasi*−LPV não seja válido para simular o sistema original não linear, o conjunto das trajetórias dinâmicas do primeiro contém o conjunto das do segundo. Assim sendo, se uma lei de controle atende aos requisitos de desempenho para todas as trajetórias no domínio $\Theta \times \Theta_d$ da representação *quasi*−LPV, então ela também os atende para o subconjunto das trajetórias realistas dos estados. Este raciocínio vale não somente para o caso de síntese de controle mas também para o caso de análise. Além disso, ressalta-se que o modelo *quasi*−LPV de um sistema não linear não é único e uma representação adequada dependerá do objetivo da técnica de análise ou de síntese a ser utilizada.

Exemplo: Considerando o sistema não linear (RUGH; SHAMMA, 2000):

$$\dot{x}_1(t) = sen(x_1(t)) + x_2(t), \quad \dot{x}_2 = x_1(t)x_2(t) + u(t),$$

uma representação *quasi*-LPV é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} sen(x_1(t))/x_1(t) & 1 \\ x_2(t) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Esta representação só serve para o controle por tabelamento de ganho se todos os estados estiverem disponíveis para realimentação, já que $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ depende de dois estados, com $x_1(t) \neq 0 \; \forall t$ e $\boldsymbol{\theta}_x(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t) \triangleq [x_1(t) \;\; x_2(t)]^T$. No entanto, a seguinte representação tende a ser menos conservadora, uma vez que o parâmetro $\boldsymbol{\theta}_x(\mathbf{x}(t))$ é definido por uma única variável de estado ($\boldsymbol{\theta}_x(\mathbf{x}(t)) = x_1(t)$):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} sen(x_1(t))/x_1(t) & 1 \\ 0 & x_1(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

□

Duas outras classes mais restritivas de modelos LPV, obtidas a partir da forma mais geral (2.34), são às vezes admissíveis e mais adaptadas a certos métodos específicos de controle por tabelamento de ganhos. Uma dessas classes refere-se aos modelos do tipo LFT. A outra classe de representação LPV é a dos modelos politópicos. Estas classes de modelos LPV não estão no foco deste trabalho, pois se pretende trabalhar com métodos de análise e síntese aplicáveis à classes mais gerais de representações que incluem aquelas classes específicas. Contudo, resultados numéricos obtidos por técnicas mais restritas são utilizados para comparações e testes dos algoritmos tratados e desenvolvidos neste trabalho.

Vale também ressaltar que um sistema pode ser LPV pela sua própria natureza, não sendo necessária nenhuma aproximação ou linearização suplementar para construir o modelo (2.34), caso em que $r_1 = 0$ e $r = r_2$.

Uma categoria mais recente de controle por tabelamento de ganhos é o controle LPV, que se desenvolveu a partir da década de 1990, com o surgimento de técnicas mais eficientes de PSD que resolvem numericamente problemas de otimização com objetivo linear sob restrições do tipo LMI (descritas na seção anterior). A afinidade existente entre a formulação LMI e a teoria de Lyapunov permite estender, para sistemas LPV, critérios de estabilidade e desempenho robustos H_2 e H_∞ desenvolvidos para sistemas LTI. As técnicas de sistemas de controle que estendem os métodos de análise e síntese de controle robusto linear para sistemas LPV pertencem, então, à chamada classe de técnicas de controle LPV.

O modelo LPV ou *quasi*-LPV (2.34) possibilita uma dependência paramétrica bastante geral, englobando a maior parte das situações práticas nas áreas de interesse de sistemas aeroespaciais e de defesa. Nos últimos anos, as técnicas de controle LPV têm chamado a atenção pelo fato de proporcionarem uma forma elegante para tratar problemas de tabelamento de ganho e interpolação de controladores de sistemas nesses campos de interesse (BANDEIRA, 2018).

2.3.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Sabe-se que uma condição necessária e suficiente para a estabilidade interna de um sistema LTI é que seus polos pertençam ao semiplano esquerdo estrito do domínio de Laplace s ou, para o caso de modelos em espaço de estado, que os autovalores da matriz dinâmica $\mathbf{A}$ tenham sua parte real estritamente negativa.

Para sistemas LPV, a estabilidade por meio da localização dos autovalores da matriz da dinâmica $\mathbf{A}$ não é suficiente, pois a condição $Re(\lambda_i(\mathbf{A}\,(\boldsymbol{\theta}(t)))) < 0, i = 1, \cdots, n, \forall \boldsymbol{\theta}(t) \in \Theta$ é necessária, mas não é suficiente para garantir estabilidade (ROSENBROOK, 1963). Utiliza-se então a teoria de estabilidade de Lyapunov, que é uma teoria mais abrangente. Assim sendo, nesta seção, apenas serão abordado os itens relevantes ao estudo de sistemas LPV.

Seja o sistema homogêneo geral em que $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Pressupõe-se que sejam válidas a existência e a unicidade da solução do sistema de equações diferenciais do sistema (2.35). Além disso, supõe-se, sem perda de generalidade, que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ seja um ponto de equilíbrio para o sistema[2], ou seja, $\forall t \geq t_0, \mathbf{f}(\mathbf{0},t) = \mathbf{0}$.

Definição 2.4 (Estabilidade Assintótica Global - EAG, ou Estabilidade Assintótica Uniforme)**.** *A trajetória de equilíbrio* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *é dita uniformemente assintoticamente estável se:*

- $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon)$ *tal que* $t \geq t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$,
- $\exists c > 0 \mid \forall \|\mathbf{x}(t_0)\| < c$, $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ *quando* $t \to \infty$, *sendo que* $\forall \epsilon > 0, \exists T(c) \mid \forall t > t_0 + T$, $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$.

Se essas condições forem verificadas para $c \to \infty$, *então a trajetória de equilíbrio* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *é dita globalmente uniformemente assintoticamente estável.*

Definição 2.5 (Estabilidade Exponencial (Global))**.** *A trajetória de equilíbrio* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *é dita (globalmente) exponencialmente estável se:*

- *as condições de estabilidade assintótica uniforme (global) forem verificadas,*

[2]Essa hipótese não é restritiva, sendo satisfeita por simples translação (VIDYASAGAR, 1978).

- $\exists\lambda > 0$ *tal que* $\forall\|\mathbf{x}(t_0)\| < c$, $\exists M(\mathbf{x}(t_0))$ *tal que* $t \geq t_0 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq Me^{-\lambda t}$.

Para os enunciados a seguir, considere a função escalar $V(t,\mathbf{x}(t))$ como contínua.

Teorema 2.1. *(VIDYASAGAR, 1978) O sistema* (2.35) *é globalmente uniformemente assintoticamente estável se existe uma função continuamente diferenciável,* $V(t,\mathbf{x}(t))$*, definida em* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ *com valores em* $\mathbb{R}$*, tal que, para todo* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ *e todo* t *positivo:*

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq V(t,\mathbf{x}(t)) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}(t)\|), \tag{2.36}$$

$$\dot{V}(t,\mathbf{x}(t)) \leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}(t)\|), \tag{2.37}$$

em que $\alpha_1(.)$*,* $\alpha_2(.)$ *e* $\alpha_3(.)$ *são funções definidas sobre* $\mathbb{R}_+$ *com valores em* $\mathbb{R}_+$*, contínuas, estritamente crescentes, não limitadas e nulas na origem.*

A função $\dot{V}(t,\mathbf{x}(t))$ é a derivada temporal de $V(t,\mathbf{x}(t))$ ao longo das trajetórias do sistema 2.35. Ela é definida como

$$\dot{V}(t,\mathbf{x}(t)) \triangleq \frac{dV(t,\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial V(t,\mathbf{x}(t))}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(t,\mathbf{x}(t))}{\partial x_k(t)} \frac{dx_k(t)}{dt}. \tag{2.38}$$

Pode-se observar que, pelo Teorema 2.1, $V(t,\mathbf{0}) = 0$, $\forall t > 0$.

O teorema a seguir é uma variante do Teorema 2.1. Trata-se de uma extensão para funções $V(t,\mathbf{x}(t))$ que sejam continuamente diferenciáveis por partes. Por outro lado, ele particulariza as funções α_i, para $i \in \{1,2,3\}$, λ_i e $c \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_i(\|\mathbf{x}(t)\|) = \lambda_i\|\mathbf{x}(t)\|^c, \lambda_i > 0, c > 0. \tag{2.39}$$

Além disso, $V(t,\mathbf{x}(t))$ passa a ser função apenas de $\mathbf{x}(t)$.

Teorema 2.2. *(PETTERSSON; LENNARTSON, 1997) O sistema* (2.35) *é globalmente exponencialmente estável se existe uma função continuamente diferenciável por partes,* $V(\mathbf{x}(t))$*, definida sobre* $\mathbb{R}^n$ *com valores em* $\mathbb{R}$*, tal que, para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *e todo* t *positivo:*

$$\lambda_1\|\mathbf{x}(t)\|^c \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq \lambda_2\|\mathbf{x}(t)\|^c, \tag{2.40}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\lambda_3\|\mathbf{x}(t)\|^c, \tag{2.41}$$

com as constantes $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3, c$ *estritamente positivas e reais.*

Denomina-se Função de Lyapunov (FL) a função $V(t,\mathbf{x}(t))$ que atende às condições dos Teoremas 2.1 e 2.2. Ela pode ser vista como uma medida generalizada da energia do sistema. Para que o sistema (2.35) seja estável, a função $V(t,\mathbf{x}(t))$ tem que ser decrescente ao longo de todas as trajetórias desse sistema. Embora não seja explícito, a estabilidade exponencial global garante a estabilidade do ponto de vista entrada/saída (KHALIL, 2002). Não obstante o Teorema 2.2 aponte para a estabilidade do sistema (2.35), ele não é construtivo no sentido que não indica como encontrar uma FL, caso seja possível.

Considere, agora, a particularização do sistema (2.34), como um sistema homogêneo *quasi*-LPV:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0, \tag{2.42}$$

em que $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{\theta}\,(t) \in \Theta$ representam, respectivamente, os vetores de estado e de parâmetros. As trajetórias dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, evoluem em um domínio compacto, Θ, com taxa de variação $\frac{d\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ em um hiper-retângulo Θ_d. Supõe-se também que $\mathbf{A} : \boldsymbol{\Theta} \mapsto \mathcal{L}_2^{\Theta}(\mathbb{R}^{n\times n})$.

O próximo teorema fornece condições de suficiência para a análise de estabilidade de sistemas homogêneos contínuos no tempo.

Teorema 2.3. *O sistema não linear homogêneo* (2.42) *é globalmente (em todo o domínio* $\mathcal{D}_{\mathbf{x}}$*) e assintoticamente estável em torno do ponto de equilíbrio nulo (estado constante), se existe a função escalar continuamente diferenciável* $V(\mathbf{x}(t),t)$*:* $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$*, definida em* $\mathcal{D}_{\mathbf{x}} \times [t_0, \infty)$*, tal que:*

(i) $V(\mathbf{0},t) = 0$*;*

(ii) $V(\mathbf{x}(t),t) > 0$ *para todo* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*;*

(iii) $\dot{V}(\mathbf{x}(t),t) < 0$ *para todo* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*,*

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t),t) = \frac{\partial V(\mathbf{x}(t),t)}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} \triangleq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x}(t),t)}{\partial x_k(t)}\dot{x}_k(t).$$

No Teorema 2.3, se ao invés da condição *(iii)* for considerada a seguinte condição *(iv)* $\dot{V}(\mathbf{x}(t),t) \leq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}}$, o resultado da análise da estabilidade é dita somente no sentido de Lyapunov, mas não é necessariamente assintótica, isto é, o vetor de estado evolui em torno do ponto de equilíbrio, mas poderá não se aproximar gradualmente do mesmo (KHALIL, 2002, p 114). Denomina-se como segundo método (ou método direto) de Lyapunov essa

forma de construção da FL para verificação de estabilidade. Para sistemas não lineares, não existe um procedimento sistematizado generalizado para obtenção dessa função.

Para sistemas lineares, a estabilidade assintótica uniforme é equivalente à estabilidade exponencial e pode ser deduzida, por meio dos Teoremas 2.2 e 2.3, utilizando-se uma FL quadrática (VIDYASAGAR, 1978). Portanto, para analisar a estabilidade de sistemas LPV, será utilizada a seguinte função quadrática candidata

$$V(t) = V(\boldsymbol{\theta}(t),\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t), \tag{2.43}$$

em que a matriz dependente do parâmetro $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))$ é simétrica e cujos elementos são chamados de *variáveis de Lyapunov* quando $V(t)$ for uma FL.

A derivada ao longo das trajetórias para a FL dependente do parâmetro $V(\boldsymbol{\theta}(t),\mathbf{x}(t),t)$, denotada por $\dot{V}(t)$, é obtida por

$$\dot{V}(t) = \frac{\partial V(t)}{\partial \boldsymbol{\theta}(t)}\frac{d\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} + \frac{\partial V(t)}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}. \tag{2.44}$$

Para que $V(\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\theta}(t))$ seja uma FL e, consequentemente, o sistema seja estável, ela deve satisfazer o Teorema 2.3, de modo que

$$\begin{array}{lll} V(\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\theta}(t)) > 0, & \dot{V}(\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\theta}(t)) < 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ V(\mathbf{0},\boldsymbol{\theta}(t)) = 0 & \text{e} & \dot{V}(\mathbf{0},\boldsymbol{\theta}(t)) = 0. \end{array} \tag{2.45}$$

A primeira restrição é satisfeita quando a matriz $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))$ é positiva definida:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}(t)) \succ 0, \forall \boldsymbol{\theta}(t) \in \Theta. \tag{2.46}$$

A segunda restrição implica, de acordo com (2.44), em

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}^T(t)\dot{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t)) + (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta}(t)))\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t) = \\ \mathbf{x}^T(t)\left[\dot{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}(t)) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) + \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\right]\mathbf{x}(t) \prec 0, \end{array} \tag{2.47}$$

que é satisfeita quando

$$\frac{\partial \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \prec 0,\ \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta,\ \forall \dot{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta_d. \tag{2.48}$$

A notação $\mathcal{S}(\mathbf{M}) \triangleq \mathbf{M} + \mathbf{M}^T$ é por vezes usada em grandes desigualdades matriciais,

deste ponto em diante.

A derivada da variável de Lyapunov $\frac{\partial \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \dot{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}(t))$ pode ser desconsiderada na inequação (2.48) em duas situações distintas:

- quando o parâmetro varia de forma suficientemente lenta ($\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \approx 0$) com o tempo que a sua derivada possa ser considerada nula, condição para a qual a desigualdade (2.48) passa a ser escrita como

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) + \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t)) \prec \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{\theta}(t) \in \Theta;$$

- quando são admitidas taxas de variação paramétricas arbitrárias, incluindo valores $\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\| \leq \rho \longrightarrow \infty$, ou seja, quando a FL candidata é considerada independente do parâmetro, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \mathbf{P} \Longrightarrow \frac{\partial \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$, condição para a qual a desigualdade (2.48) passa a ser escrita como

$$\mathbf{P}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) + \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{P} \prec \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{\theta}(t) \in \Theta.$$

A inequação matricial (2.48) é denominada como uma Desigualdade Linear Matricial Parametrizada, ou PLMI (do inglês *Parametrized Linear Matrix Inequality*). Como o parâmetro $\boldsymbol{\theta}(t)$ é uma função contínua do tempo, a PLMI tem que ser satisfeita $\forall \boldsymbol{\theta}(t)$. A especificação da desigualdade (2.48) implica na solução de um problema de otimização de natureza convexa, porém de dimensão infinita e com infinitas restrições. Isto é, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))$ evolui dentro de um espaço de funções de dimensão infinita e o número de LMI em $\boldsymbol{\theta}(t)$ também é infinito. Essa problemática decorre da suposição de dependência paramétrica geral do sistema e define o problema central a ser tratado neste trabalho pelo uso da TH.

2.3.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE BI-QUADRÁTICA

Trofino Neto e de Souza (2001) e de Oliveira et al. (2002) consideram os problemas de análise de estabilidade e de desempenho de sistemas LPV para o caso particular em que o domínio paramétrico é um politopo e as matrizes do sistemas são funções afins do parâmetro. Seja o sistema LPV descrito pela equação de estado em (2.34), em que

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}_0 + \mathcal{A}\boldsymbol{\Theta}, \ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{B}\boldsymbol{\Theta}_u, \ \mathbf{C}(\theta) = \mathcal{C}\boldsymbol{\Theta}_a, \ \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{D}\boldsymbol{\Theta}_u, \tag{2.49}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \mathbf{I}_n \\ \vdots \\ \theta_r \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Theta}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Theta}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \theta_1 \mathbf{I}_m \\ \vdots \\ \theta_r \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \tag{2.50}$$

em que $\mathbf{A}_0$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são matrizes dadas de dimensões compatíveis e $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1,...,\theta_r]^T \in \mathbb{R}^r$ é um vetor de parâmetros reais que podem variar no tempo.

Definição 2.6 (Estabilidade bi-quadrática)**.** *(DE OLIVEIRA et al., 2002) Seja* $\Theta \times \Theta_d$ *um politopo de vértices conhecidos representando o domínio admissível de* $(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})$*. O sistema* $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t)$ *é bi-quadraticamente estável se existe uma matriz simétrica* $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times nr}$ *da forma:*

$$\mathcal{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^T\mathbf{P}_1^T + \boldsymbol{\Theta}^T\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1^T & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{n \times nr},$$

tal que as condições equivalentes a (2.46) *e* (2.48) *sejam satisfeitas para todo* $(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}}) \in \Theta \times \Theta_d$*.*

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\theta) \succ 0 \\ \dot{\mathcal{P}}(\theta) + \mathbf{A}^T(\theta)\mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta)\mathbf{A}(\theta) \prec 0 \end{cases} \tag{2.51}$$

Note que a estabilidade bi-quadrática implica que o sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t)$ é exponencialmente estável $\forall(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}}) \in \Theta \times \Theta_d$ e $V(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}^T\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}$ é uma FL com dependência quadrática nos parâmetros e nos estados do sistema.

2.3.3 ANÁLISE DE DESEMPENHO ROBUSTO H_∞

Para sistemas LPV, o isomorfismo tempo/frequência induzido pela transformada de Laplace não se aplica, de forma que não tem fundamento em falar em função ou matriz de transferência. Desta maneira, o mesmo ocorre para medidas de desempenho que consideram limites sobre normas H_2 e H_∞ de funções de transferência (BANDEIRA, 2018). Portanto, há a necessidade dos conceitos de normas H_2 e H_∞ serem estendidos para sistemas com apenas interpretações temporais.

2.3.3.1 DESEMPENHO ROBUSTO H_∞

O ganho induzido pela norma $\mathcal{L}_2$ de um sistema LPV modelado por (2.34), representado por um operador $\mathbf{G}$, é descrito como a maior razão possível entre a norma $\mathcal{L}_2$ do sinal de saída $\mathbf{y}(t)$ e norma $\mathcal{L}_2$ do sinal de entrada $\mathbf{u}(t)$, para um conjunto de sinais de entrada quadraticamente integráveis.

$$\text{ganho } \mathcal{L}_2 = \parallel \mathbf{G} \parallel_2 = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{L}_2} \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2}. \tag{2.52}$$

O ganho $\mathcal{L}_2$ pode ser representado pelo menor γ que satisfaça

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{y}(t)^T\mathbf{y}(t)\right) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \left(\mathbf{u}(t)^T\mathbf{u}(t)\right) dt. \tag{2.53}$$

Para sistemas LTI, o ganho $\mathcal{L}_2$ se reduz ao valor da norma H_∞ do sistema, ou seja, a norma $\mathcal{L}_2$ induzida representa a extensão para sistemas lineares não estacionários da norma H_∞ de sistemas lineares estacionários (BOYD et al., 1994).

No caso específico de sistemas LPV, será utilizado o conceito de sistemas dissipativos por sua analogia com o conceito de energia generalizada de Lyapunov e por ser a forma que as LMI surgem mais naturalmente.

Considere o sistema geral dado por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t), \\ \mathbf{y}(t) &= g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) \end{aligned} \tag{2.54}$$

e seja $s(t)$ uma função localmente integrável

$$s(t) := s(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t),t),$$

denominada função ou razão de alimentação.

Definição 2.7 (Sistemas dissipativos)**.** *O sistema dinâmico* (2.54) *é dito dissipativo para a razão de alimentação* $s(t)$ *se existe uma função não negativa* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*

$$V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t),t)dt \geq V(\mathbf{x}(t_1)), \tag{2.55}$$

para todo $t_0 \leq t_1$ *e para todas as trajetórias* $(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y})$ *que satisfaça* (2.54).

A razão de alimentação $s(t)$ deve ser interpretada como a energia fornecida ao sistema. Isso significa que no intervalo $[t_0,t_1]$ foi realizado trabalho no sistema sempre que $\int_{t_0}^{t_1} s(\tau)d\tau$ for positivo e que o sistema realizou trabalho se a integral for negativa. A função não negativa V é chamada de função de armazenamento e generaliza a noção de energia para um sistema dissipativo. Com essa interpretação, a desigualdade (2.55) formaliza a ideia de que um sistema dissipativo é caracterizado pela propriedade de que a variação na energia armazenada $V(\mathbf{x}(t_1))-V(\mathbf{x}(t_0))$ em qualquer intervalo $[t_0,t_1]$ não irá exceder a quantidade de energia que entra no sistema (SCHERER; WEILAND, 2000; SIMÕES, 2004).

Sempre que $V(\mathbf{x}(t))$, em que V é uma função de armazenamento e $\mathbf{x}$ uma trajetória dos estados satisfazendo (2.54), for diferenciável em relação ao tempo, então (2.55) pode ser escrita da seguinte forma

$$\dot{V}(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}(t)) \leq s(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t)). \tag{2.56}$$

Quando a igualdade vale em (2.55), e consequentemente em (2.56), o sistema é dito conservativo, e não há perda de energia.

Considere a função de alimentação quadrática geral $s(t)$ definida por

$$s(\mathbf{u},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q_{yy}} & \mathbf{Q_{yu}} \\ \mathbf{Q_{uy}} & \mathbf{Q_{uu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \tag{2.57}$$

em que a matriz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q_{yy}} & \mathbf{Q_{yu}} \\ \mathbf{Q_{uy}} & \mathbf{Q_{uu}} \end{bmatrix}$$

é simétrica, real e indefinida [3], e a função de armazenamento na forma quadrática é dada por

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}, \\ \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \succ 0, \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Teorema 2.4. *Considere o sistema LPV* (2.34) *controlável. Então, as seguintes sentenças são equivalentes:*

a) O sistema é dissipativo para a razão de alimentação $s(t)$ dada por (2.57) *e possui*

[3] Uma matriz é indefinida quando não é nem positiva definida nem negativa definida.

função de armazenamento quadrática $V(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})$ *dada por* (2.58).

b) Existe uma matriz $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \succ 0, \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q_{yy}} & \mathbf{Q_{yu}} \\ \mathbf{Q_{uy}} & \mathbf{Q_{uu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \preceq 0. \tag{2.59}$$

Prova: Ver (BANDEIRA, 2018). □

Suponha agora que existe um η mínimo que satisfaz (2.53) representando o ganho $\mathcal{L}_2$ do sistema (2.34). Da definição de ganho $\mathcal{L}_2$, tem-se que o sistema LPV 2.34 é dissipativo em relação à razão de alimentação

$$s(u,y) = -\eta \mathbf{u}^T\mathbf{u} + \eta^{-1}\mathbf{y}^T\mathbf{y}. \tag{2.60}$$

Isto é, a energia $\eta\mathbf{u}^T\mathbf{u}$ fornecida ao sistema é sempre maior do que a energia $\eta^{-1}\mathbf{y}^T\mathbf{y}$ que o sistema fornece para $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. A razão de alimentação (2.60) assume, então, a forma particular (SCHERER et al., 1997)

$$s(\mathbf{u},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \eta^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\eta\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

da função quadrática geral (2.57).

Corolário 2.1. *Para um sistema LPV, controlável, da forma especificada em* (2.34)*, as seguintes sentenças são equivalentes:*

a) O sistema é estritamente dissipativo em relação à razão de alimentação $s(\mathbf{u},\mathbf{y}) = -\eta\mathbf{u}^T\mathbf{u} + \eta^{-1}\mathbf{y}^T\mathbf{y}$ *e possui função de armazenamento quadrática dada por* (2.58).

b) O sistema de PLMI

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) + \eta^{-1}\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) + \eta^{-1}\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) + \eta^{-1}\mathbf{D}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \eta^{-1}\mathbf{D}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) + \eta\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.62}$$

é viável $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *e* $\forall \dot{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta_d$.

c) O ganho $\mathcal{L}_2$ *é limitado superiormente por* η *quando satisfeita a PLMI* (2.62)*, ou seja:*

$$\textit{ganho } \mathcal{L}_2 = \|\mathbf{G}\|_2 = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{L}_2} \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} < \eta. \tag{2.63}$$

Utilizando o complemento de Schur, tem-se que a PLMI (2.62) é equivalente a (BANDEIRA, 2018):

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \succ 0, \\ &\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) & -\eta\mathbf{I} & \mathbf{D}^T(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) & -\eta\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Logo, se existirem um escalar η mínimo e uma matriz $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ que tornem o sistema de PLMI 2.64 viável para todo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, então η aproxima o ganho $\mathcal{L}_2$ do sistema.

2.3.3.2 DESEMPENHO ROBUSTO H_∞ BI-QUADRÁTICO

Considere o sistema LPV representado por (2.34).

Teorema 2.5. *(DE OLIVEIRA et al., 2002) Seja* $\Theta \times \Theta_d$ *um politopo de vértices conhecidos representando o domínio admissível de* $(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})$ *para o sistema* (2.34)*. Seja a notação*

$$
\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dot{\boldsymbol{\Theta}}_a^T\mathbf{P} & 0 & 0 & \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\theta}) & 0 \\
0 & 0 & \boldsymbol{\Theta}_a^T\mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{P}\dot{\boldsymbol{\Theta}}_a & \mathbf{P}\boldsymbol{\Theta}_a & 0 & 0 & \mathbf{P}\boldsymbol{\Theta}_a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{\mathbf{n_z}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boldsymbol{\Theta}_a^T\mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2\mathbf{I}_m
\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix}
-\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\boldsymbol{\Theta}_a & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & -\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})
\end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{C}_a = [\boldsymbol{\Theta} - \mathbf{I}].
$$

Sendo Θ *e* Θ_a *definidos em* (2.50). *Então, dado um escalar* $\eta > 0$, *o sistema* (2.34) *é biquadraticamente estável e o seu ganho* $\mathcal{L}_2$ *obedece a restrição* (2.63), *se existirem matrizes* $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{L}$ *tais que o sistema de PLMI*

$$
\boldsymbol{\Psi} + \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}^T \prec 0 \tag{2.65}
$$

$$
\mathbf{P} + \mathbf{L}\mathbf{C}_a + \mathbf{C}_a^T\mathbf{L}^T \succ 0 \tag{2.66}
$$

é viável em todos os vértices do politopo $\Theta \times \Theta_d$. *Além disso,* $V(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}^T\boldsymbol{\Theta}_a^T\boldsymbol{\Theta}_a\mathbf{x}$ *é uma FL para o sistema* (2.34) *com* $u \equiv 0$.

Prova: Ver (DE OLIVEIRA et al., 2002). □

O Teorema 2.5 permite encontrar o valor mínimo do limitante superior do ganho induzido pela norma $\mathcal{L}_2$. Este limitante mínimo pode ser obtido numericamente resolvendo-se o seguinte problema de otimização convexa com restrições do tipo LMI:

$$
\begin{gathered}
\min \eta^2 \\
\text{sujeito às restrições } (2.65) - (2.66).
\end{gathered} \tag{2.67}
$$

2.3.4 SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO H_∞ BI-QUADRÁTICO

Seja o sistema LPV descrito por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w(\boldsymbol{\theta})\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_u(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_w(\boldsymbol{\theta})\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_u(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(t),\end{aligned} \tag{2.68}$$

com

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}_0 + \mathcal{A}\boldsymbol{\Theta},\ \mathbf{B}_w(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{B}_w\boldsymbol{\Theta}_w,\\ &\mathbf{B}_u(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{B}_u\boldsymbol{\Theta}_u,\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{C}\boldsymbol{\Theta}_a,\\ &\mathbf{D}_w(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{D}_w\boldsymbol{\Theta}_w,\ \mathbf{D}_u(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{D}_u\boldsymbol{\Theta}_u,\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix}\theta_1\mathbf{I}_n\\ \vdots\\ \theta_r\mathbf{I}_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Theta}_a = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_n\\ \Theta\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Theta}_w = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_q\\ \theta_1\mathbf{I}_q\\ \vdots\\ \theta_r\mathbf{I}_q\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Theta}_u = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_m\\ \theta_1\mathbf{I}_m\\ \vdots\\ \theta_r\mathbf{I}_m\end{bmatrix}, \tag{2.70}$$

em que $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^q$ e $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ são, respectivamente, os vetores de estado, entrada, distúrbio e de desempenho, $\mathbf{A}_0$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_w$,$\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}_w$ são matrizes dadas e $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1,...,\theta_r]^T \in \mathbb{R}^r$ é um vetor de parâmetros reais, que podem variar no tempo.

O sistema da EQ. 2.68 é considerado um sistema do tipo LPV, onde $\theta_i(t)$, $i = 1,...,r$, são supostos disponíveis em tempo real, contudo, suas trajetórias não são conhecidas *a priori*. A única informação conhecida *a priori* é que os valores de $\boldsymbol{\theta}(t)$ e $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\forall t \geq 0$ pertencem ao politopo conhecido $\Theta \times \Theta_d$. Para garantir um limitante superior prescrito para a norma $\mathcal{L}_2$ $\|G_{yw}\|_2 < \eta$ do sistema realimentado, é necessário projetar um controlador, que de Oliveira et al. (2002) consideraram ser por realimentação de estado com dependência paramétrica afim.

A lei de controle é do tipo

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x},\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^{r}\mathbf{K}_i\boldsymbol{\theta}_i. \tag{2.71}$$

Teorema 2.6. *(DE OLIVEIRA et al., 2002) Seja o sistema* (2.68) *e* $\Theta \times \Theta_d$ *um politopo*

dado que representa os valores admissíveis de $(\boldsymbol{\theta}(t),\dot{\boldsymbol{\theta}}(t))$. *Seja a notação*

$$\boldsymbol{\Psi}_c = \begin{bmatrix} \Lambda & * & * & * \\ \mathbf{B}_u(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_a & 0 & * & * \\ 0 & \mathbf{B}_w^T(\boldsymbol{\theta}) & -\eta^2\mathbf{I}_q & * \\ \mathbf{CW} + \mathbf{D}_u(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_a & 0 & \mathbf{D}_w(\boldsymbol{\theta}) & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_a^T & -\mathbf{I}_n, & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que

$$\Lambda = \mathbf{W}\mathbf{A}_a^T + \mathbf{A}_a\mathbf{W} + L\mathbf{C}_a + \mathbf{C}_a^T\mathbf{L}^T$$
$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathcal{A} \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} + \boldsymbol{\Theta}\mathbf{A}_0 & \boldsymbol{\Theta}\mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_a = [\boldsymbol{\Theta} - \mathbf{I}].$$

Então, dado um escalar $\eta > 0$, *existe uma realimentação de estado do tipo* (2.71), *tal que o sistema em malha fechada é bi-quadraticamente estável e o ganho* $\mathcal{L}_2$ $\|G_{yw}\|_2 < \eta$, *se existirem matrizes* $\mathbf{W} \succ 0$, $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *tais que as seguintes condições forem satisfeitas em todos os vértices do politopo* $\Theta \times \Theta_d$*:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_c + \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_c + \boldsymbol{\Phi}_c^T\mathbf{M}^T &\prec 0 \\ \mathbf{NC}_a &= \mathbf{C}_a\mathbf{W} \end{aligned} \tag{2.72}$$

Neste caso, as matrizes de ganho da lei de controle (2.71) *são dadas por*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_1 & \dots & \mathbf{K}_r \end{bmatrix} = \mathbf{F}_a\mathbf{W}^{-1} \tag{2.73}$$

e $V(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}^T\boldsymbol{\Theta}_a^T\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Theta}_a\mathbf{x}$ *é uma FL para o sistema em malha fechada.*

Prova: Ver (DE OLIVEIRA et al., 2002). □

O Teorema 2.6 fornece um método de projeto de sistemas de controle LPV com ganho induzido pela norma $\mathcal{L}_2$ garantido para um canal de desempenho. Note que a lei de controle sintetizada, (2.71), minimiza o limitante superior da norma norma $\mathcal{L}_2$ por meio da solução do seguinte problema de otimização convexa com restrições do tipo LMI:

$$\begin{aligned} &\min \eta^2 \\ &\text{sujeito à PLMI} \quad (2.72). \end{aligned} \tag{2.74}$$

2.4 CONCLUSÃO

Os fundamentos sobre TH e análise de estabilidade e desempenho robusto, apresentados neste capítulo, são utilizados como base para os desenvolvimentos apresentados no próximo capítulo, que resume as contribuições de Bandeira (2018) e de Bandeira et al. (2018).

Particularmente, os resultados dos Teoremas 2.5 e 2.6 são utilizados no Capítulo 4 em aplicações numéricas, para fins de validação dos novos algoritmos introduzidos neste trabalho e comparação de resultados, a despeito de os métodos baseados em TH possuírem novas potencialidades em termos de tratamento de sistemas com dependências mais gerais do que os tratados naqueles teoremas.

3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO ROBUSTO DE SISTEMAS LPV UTILIZANDO TH

Neste Capítulo, as contribuições de Bandeira (2018) e Bandeira et al. (2018) relativas à análise de estabilidade e de desempenho robusto H_∞ via TH de sistemas LPV com dependência paramétrica geral são apresentadas de forma resumida. Alguns pontos específicos, notadamente os referentes à análise de desempenho robusto H_∞ são discutidos e testados numericamente, uma vez que a tese de Bandeira (2018) focou mais em resultados de análise de desempenho robusto H_2, no que se refere a testes numéricos.

3.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE VIA TH

Considere novamente a representação em espaço de estados de um sistema LPV

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\mathbf{x}(t), \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, and $\boldsymbol{\theta}\,(t) \in \mathbb{R}^r$ denotam vetores de estados e parâmetros, respectivamente. As trajetórias dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ em (3.1) evoluem em um domínio compacto, $\boldsymbol{\Theta}$, com taxa de variação $\frac{d\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ em um hiper-retângulo $\boldsymbol{\Theta}_d$. Suponha também que $\mathbf{A} : \boldsymbol{\Theta} \mapsto \mathcal{L}_2^{\Theta}(\mathbb{R}^{n\times n})$, ou seja, um mapeamento que engloba uma grande quantidade de aplicações práticas. Como já enfatizado no capítulo introdutório desta dissertação, a análise de estabilidade de uma classe tão ampla de sistemas dinâmicos continua sendo uma tarefa desafiadora.

Na Seção 2.3.1 foi exposta uma condição suficiente para a estabilidade quadrática do sistema (3.1) é a existência de uma FL quadrática dependente do parâmetro (BARMISH; DEMARCO, 1986; VIDYASAGAR, 1978),

$$V(\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\theta}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t), \tag{3.2}$$

com $\mathbf{P} : \boldsymbol{\Theta} \mapsto \mathbb{S}^n$ sendo continuamente diferenciável por partes. Também, convém recordar que pode ser demonstrado que $V(\cdot,\cdot)$ em (3.2) representa uma FL para o sistema (3.1) se e só se $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{S}^n$ é uma solução viável do seguinte conjunto de PLMI (SHAMMA, 2012),

$\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ e $\forall \dot{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{\Theta}_d$:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \succ 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \mathcal{S}\left(\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\right) \prec 0. \tag{3.4}$$

Ressalte-se novamente que a viabilidade das PLMI (3.3) - (3.4) é um problema convexo, mas de dimensão infinita e com infinitas restrições. Esta última dificuldade se deve à dependência do sistema em relação ao conjunto contínuo $(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ pertencendo à $\boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{\Theta}_d$, enquanto que a primeira resulta da dimensão infinita do conjunto de possíveis funções candidatas de Lyapunov $\mathbf{P}(\theta)$ (APKARIAN; ADAMS, 1998). Para superar estas dificuldades, (DE ARAÚJO et al., 2015) propôs o uso da TWD para reduzir o sistema PLMI a um programa de dimensão finita, sem perder a propriedade de suficiência da condição de estabilidade ou necessitar de suposições mais conservadoras sobre a dependência paramétrica do estado e das matrizes de Lyapunov, ou sobre a forma do domínio $\boldsymbol{\Theta}$. Curiosamente, as soluções calculadas satisfazem as restrições sobre todo o domínio de análise, mesmo se grades esparsas forem consideradas.

Por questão de clareza, a partir deste ponto, é considerado o caso escalar $\theta \in \Theta$ com $\Theta = [0\,, 1)$, podendo ser estendida para o caso em que o parâmetro é multidimensional (MALLAT, 2009) e para intervalos gerais.

Bandeira (2018) mostra que a expansão de Haar de uma matriz de funções $\mathbf{A}(\theta) \in \mathcal{L}_2^{\Theta}(\mathbb{R}^{n\times n})$, *i.e.* $\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A}_{\Sigma_\infty}(\theta)$, é dada por

$$\mathbf{A}_{\Sigma_\infty}(\theta) \triangleq \mathbf{A}_0\phi_0\left(\theta\right) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{A}_{j,k}\psi_{j,k}\left(\theta\right), \tag{3.5}$$

em que

$$\mathbf{A}_0 \triangleq \langle \mathbf{A}(\theta), \phi_0\left(\theta\right)\rangle \text{ e } \mathbf{A}_{j,k} \triangleq \langle \mathbf{A}(\theta), \psi_{j,k}\left(\theta\right)\rangle. \tag{3.6}$$

A TH (3.5) satisfaz o teorema de Parseval, portanto a energia nos coeficientes $\mathbf{A}_{j,k}$ tende a decrescer conforme a resolução j aumenta (VIDAKOVIC, 1999).

3.1.1 EXISTÊNCIA DE LIMITES SUPERIORES PARA RESÍDUOS MATRICIAIS

Seja $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ a TH da matriz de estados $\mathbf{A}(\theta)$, com o nível de truncamento J. A soma infinita pode ser reescrita como:

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A}_{\Sigma_\infty}(\theta) \triangleq \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta), \tag{3.7}$$

em que $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ corresponde à expansão em série truncada

$$\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta(t)) = \mathbf{A}_0\phi_0\left(\theta(t)\right) + \sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{2^j-1}\mathbf{A}_{j,k}\psi_{j,k}\left(\theta(t)\right) \tag{3.8}$$

e

$$\mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) = \sum_{j=J+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\mathbf{A}_{j,k}\psi_{j,k}(\theta) \tag{3.9}$$

é o resíduo. Note que $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ é constante por partes e pode ser interpretada como um tipo de discretização de $\mathbf{A}(\theta)$.

É importante mencionar que para o sistema $\mathcal{M}(\theta(t),t)$ em (2.34) é representado por $\mathcal{M}_{\Sigma_\infty}(\theta(t),t)$ com exatidão, ou seja, $\mathcal{M}(\theta(t),t) \equiv \mathcal{M}_{\Sigma_\infty}(\theta(t),t)$, e que as matrizes $\mathbf{B}_{\Sigma_\infty}(\theta(t))$, $\mathbf{C}_{\Sigma_\infty}(\theta(t))$ e $\mathbf{D}_{\Sigma_\infty}(\theta(t))$ são definidas de maneira análoga à (3.7). Também, embora a modelagem esteja sendo apresentada para o caso do parâmetro escalar, ela pode ser estendida para o caso em que o parâmetro é multidimensional (MALLAT, 2009).

Uma propriedade interessante da TH é que os coeficientes de mais alta resolução são aqueles com mais baixo nível de energia. Portanto, para J suficientemente grande, o resíduo $\mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)$ carrega informação pobre ou irrelevante e $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ é uma aproximação bastante precisa de $\mathbf{A}(\theta)$. Em (DE ARAÚJO et al., 2015), os autores demonstraram que existem funções reais positivas constantes por parte $\{\alpha_m(\theta)\}_{m=0}^{2^J-1}$, para qualquer J, tal que

$$\|\mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\| \leq \sum_{m=0}^{2^J-1}\alpha_m(\theta), \quad \forall\theta \in \Theta. \tag{3.10}$$

Contudo, o cálculo de α_m para funções de dependência paramétrica geral envolve análises não triviais.

O cálculo do limitante superior (3.10) de $\|\boldsymbol{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\|$ não é sistemático, exigindo uma análise particular para cada função dependente do parâmetro, notadamente para a determinação de alguns outros coeficientes e expoentes de Hölder, e envolvendo o cálculo

dos produtos internos em (3.6) (BANDEIRA, 2018). Em outras palavras, as provas dos lemas e teoremas em (DE ARAÚJO et al., 2015) não são construtivas do ponto de vista algorítmico e numérico, no caso de dependências paraméricas gerais. Nesta seção, novos algoritmos, de fácil implementação, para a análise da estabilidade de sistemas LPV considerando Funções de Lyapunov Independentes do Parâmetro (PILF) (BANDEIRA, 2018), são revisitados e ilustrados.

Para um nível de truncamento J, considere os intervalos contínuos $\Theta_{J_i} = \left[\frac{i-1}{2^{J+1}}, \frac{i}{2^{J+1}}\right)$, com $\cup_{i=1}^{2^{J+1}}\{\Theta_{J_i}\} = \Theta$, e $\mathcal{D}_{J_i}^{\Theta} \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \Theta$ como o conjunto discreto dos 2^{J+1} pontos equidistantes

$$\theta_i = \frac{2i-1}{2^{J+2}},\ \theta_i \in \Theta_{J_i}. \tag{3.11}$$

Note que $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ em (3.7) é uma matriz de funções constantes por partes cujos valores discretos das constantes são $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^{\Theta}$. Então, dados $\mathbf{A}(\theta) \in \mathcal{L}_2^{\Theta}(\mathbb{R}^{n\times n})$, Θ e J, é possível calcular numericamente o conjunto de matrizes discretas $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\forall\theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^{\Theta}$, e o conjunto de matrizes de resíduos máximos para cada intervalo correspondente Θ_{J_i}, da seguinte forma:

- Passo 1: Calcular $\mathbf{A}(\theta_{\hat{\ell}})$ para valores discretos igualmente espaçados (congelados) $\theta_{\hat{\ell}} = \hat{\ell}/2^{j^*}$ em uma grade paramétrica fina $\mathcal{D}_{j_{\hat{\ell}}^*}^{\Theta} \triangleq \{\theta_{\hat{\ell}}\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{j^*+1}} \subset \Theta$, onde j^* é escolhido suficientemente grande tal que $\| \{A^{pq}(\theta_{\hat{\ell}})\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{j^*+1}} \|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \cong \|\mathbf{A}^{pq}(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R})}$, $\forall pq$, de forma a evitar perda de informação. O inteiro j^* deve ser escolhido, ao menos, maior do que $J+2$ e, para um dado limitante $\xi \ll 1$, um valor adequado para j^* é alcançado quando o número $2^{j*}+1$ de valores amostrados de $A^{pq}(\theta)$ é tal que $\forall pq$:

$$\left\|\{A^{pq}(\theta_{\hat{\ell}})\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{(j*+1)}+1}\right\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} - \left\|\{A^{pq}(\theta_{\hat{\ell}})\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{j*}+1}\right\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \leq \xi;$$

- Passo 2: Calcular a TH de $\mathbf{A}(\theta_{\hat{\ell}})$ conforme (3.5), mas truncando o primeiro somatório em $j = J$ e guardando os primeiros 2^{J+1} coeficientes wavelet, $J \ll j^*$, para obter $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_{\hat{\ell}})$ e $\mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_{\hat{\ell}}) = \mathbf{A}(\theta_{\hat{\ell}}) - \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_{\hat{\ell}})$, $\forall\theta_{\hat{\ell}} \in \mathcal{D}_{j_{\hat{\ell}}^*}^{\Theta}$, assim como em (3.7);

- Passo 3: Selecionar $\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)$, $\forall\theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^{\Theta}$, como as matrizes cujos elementos são os máximos absolutos dos resíduos dos respectivos elementos de $\mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_{\hat{\ell}})$, para cada um dos 2^{J+1} intervalos Θ_{J_i} de tamanho 2^{j^*-J-1}, i.e., para cada conjunto de valores $(i-1)2^{j^*-J-1}+1 \leq \hat{\ell} < (i)2^{j^*-J-1}$;

- Passo 4: Selecionar os valores $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ nos pontos médios de Θ_{J_i} e calcule $\|\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)\|$

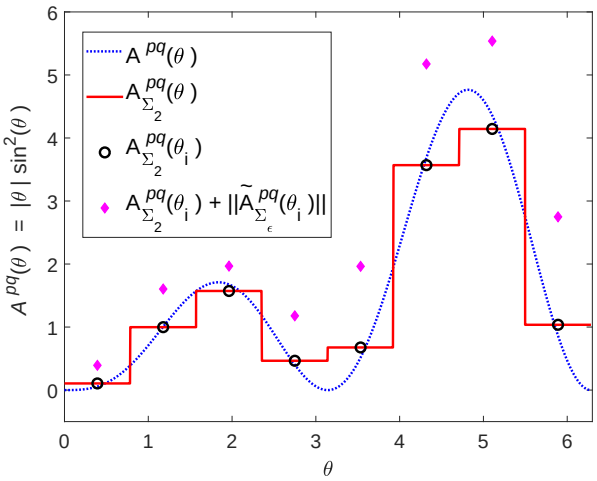


FIG. 3.1: $A^{pq}(\theta) = |\theta| sin^2(\theta)$ para $J = 2$.

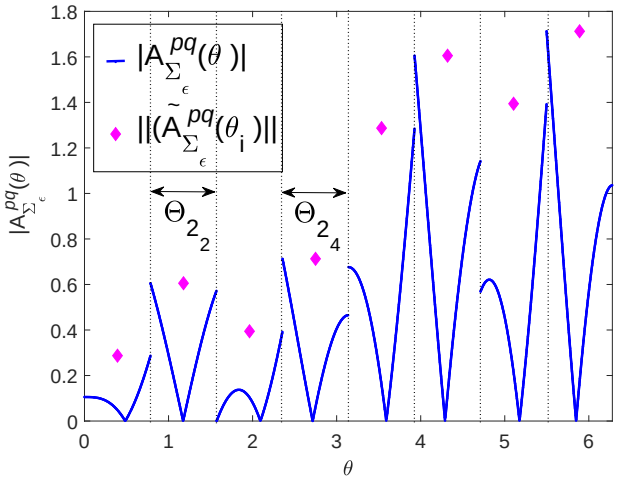


FIG. 3.2: $|A^{pq}(\theta)|$ para $J = 2$.

e seus resíduos máximos para os intervalos correspondentes $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, $\forall \theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$.

Para ilustrar as principais variáveis de saída desse algoritmo, seja $A^{pq}(\theta) = |\theta| \sin^2(\theta)$ com $\theta \in [0,2\pi)$, um elemento de $\mathbf{A}(\theta)$. Na FIG. 3.1, são apresentadas para $J = 2$, $A^{pq}_{\Sigma_2}(\theta)$, $A^{pq}_{\Sigma_2}(\theta_i)$ e $\|\tilde{A}^{pq}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$ para cada intervalo Θ_{2_i}, $i = 1, \cdots, 8$. A FIG. 3.2 mostra os máximos resíduos relativos a essa função e os correspondentes intervalos Θ_{2_i}.

3.1.2 PILF VIA TH PARA ESTABILIDADE QUADRÁTICA

Considere as matrizes $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ e seus resíduos máximos nos intervalos correspondentes $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$ calculados $\forall \theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$, como indicado na Seção 3.1.1. Então o seguinte teorema apresenta um número finito de condições suficientes para a existência de uma PILF que

garante a estabilidade quadrática do sistema (3.1).

Teorema 3.1. *(BANDEIRA, 2018) O sistema LPV* (3.1) *é quadraticamente assintoticamente estável se existir* $\gamma \in \mathbb{R}_+$ *e uma matriz independente do parâmetro* $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$ *tal que o seguinte conjunto de PLMI é válido* $\forall \theta_i \in \Theta_J \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \Theta$*:*

$$\mathbf{P} \succ 0, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{P} - \gamma \mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{S}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)\right) + 2\gamma \mathbf{I}_n \|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\| \prec 0. \tag{3.14}$$

Prova: Ver (BANDEIRA, 2018). □

Note que a viabilidade das condições do Teorema 3.1 implica a viabilidade do problema de dimensão infinita dado pela PLMI (3.3) - (3.4) que permite inferir a estabilidade exponencial do sistema LPV (3.1). O termo $2\gamma\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$ em (3.14) é uma medida do conservadorismo introduzido pelos algoritmos de discretização e truncamento do Teorema 3.1. Este conservadorismo adicional tende a decrescer com o aumento do nível de truncamento J e tende a zero assintoticamente. De fato, devido às propriedades da TH, quando $J \to \infty$, $\mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) \to \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) \to \mathbf{A}_{\Sigma_\infty}(\theta) = \mathbf{A}(\theta)$, o que anula assintoticamente os limitantes superiores $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$. Sendo assim, as condições suficientes para a estabilidade quadrática do Teorema 3.1 se tornam também necessárias assintoticamente.

Enquanto o número de variáveis escalares livres nas condições (3.12) - (3.14) depende somente da dimensão do vetor de estado n, sendo dado por $1 + \frac{n(n+1)}{2}$, o número de restrições PLMI depende apenas do nível de truncamento J e é dado por $2^{J+1} + 2$.

3.1.3 PDLF VIA TH PARA A ESTABILIDADE QUADRÁTICA

A adoção de uma PDLF pode reduzir o conservadorismo no Teorema 3.1. Considere inicialmente a seguinte função constante por partes construída por funções da base Haar (DE ARAÚJO et al., 2015):

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}_0\phi_0(\theta) + \sum_{g=0}^{G}\sum_{h=0}^{2^g-1} \mathbf{Q}_{g,h}\psi_{g,h}(\theta), \tag{3.15}$$

em que $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_{g,h} \in \mathbb{S}^n$ e $G \in \mathbb{N}$. A matrix $\mathbf{Q}(\theta)$ pode ser reescrita como abaixo (BANDEIRA, 2018), onde $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$:

$$\mathbf{Q}(\theta) = \sum_{h=0}^{2^{G+1}-1} \mathbf{Q}_h \phi_h(2^{G+1}\theta). \tag{3.16}$$

Diferentemente de (DE ARAÚJO et al., 2015), Bandeira et al. (2018) propuseram obter matrizes de Lyapunov candidatas $\mathbf{P}(\theta)$ a partir de $\mathbf{Q}(\theta)$ em (3.16) em vez de (3.15). Isso permite a construção de um algoritmo computacional geral para solucionar o problema de análise de estabilidade da seguinte forma:

$$\mathbf{P}(\theta) \triangleq \int \mathbf{Q}(\theta) d\theta = \sum_{h=0}^{2^{G+1}-1} \left(\mathbf{Q}_h \theta + \hat{\mathbf{Q}}_h \right) \phi_h(2^{G+1}\theta), \tag{3.17}$$

onde $\mathbf{Q}_h$ e $\hat{\mathbf{Q}}_h \in \mathbb{S}^n$ com $h = 0, \cdots, 2^{G+1}-1$ são variáveis a serem determinadas. A matriz candidata de Lyapunov $\mathbf{P}(\theta)$ em (3.17) é afim por partes, mas não necessariamente continuamente diferenciável por partes. Assim sendo, algumas restrições devem ser impostas sobre as variáveis $\hat{\mathbf{Q}}_h$, conforme estabelecido pelo próximo lema.

Lema 3.1. *(BANDEIRA, 2018) Considere $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$, $h = 0, \cdots, 2^{G+1}-1$, e $\hat{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{S}^n$. A função afim por partes $\mathbf{P}(\theta)$ em (3.17) também é continuamente diferenciável por partes se e só se $\hat{\mathbf{Q}}_h$, $h = 1, \cdots, 2^{G+1}-1$, for obtida recursivamente da seguinte forma*

$$\hat{\mathbf{Q}}_h = \sum_{r=1}^{h} \left(\mathbf{Q}_{r-1} - \mathbf{Q}_r \right) \frac{r}{2^{G+1}} + \hat{\mathbf{Q}}_0. \tag{3.18}$$

Prova: Ver (BANDEIRA, 2018). □

Por outro lado, analogamente a $\mathbf{A}(\theta)$ em (3.7), $\mathbf{P}(\theta)$ em (3.17) pode ser precisamente representada por sua TH:

$$\mathbf{P}(\theta) \triangleq \mathbf{P}_{\Sigma_\infty}(\theta) = \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta), \tag{3.19}$$

em que $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta)$ representa a expansão Haar truncada

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) = \mathbf{P}_0 \phi_0 + \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{P}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta) \tag{3.20}$$

e $\mathbf{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta)$ é o resíduo

$$\mathbf{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) = \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{P}_{j,k}\psi_{j,k}(\theta), \tag{3.21}$$

com $\mathbf{P}_0 = \langle \mathbf{P}(\theta), \phi_0(\theta) \rangle$ e $\mathbf{P}_{j,k} = \langle \mathbf{P}(\theta), \psi_{j,k}(\theta) \rangle$.

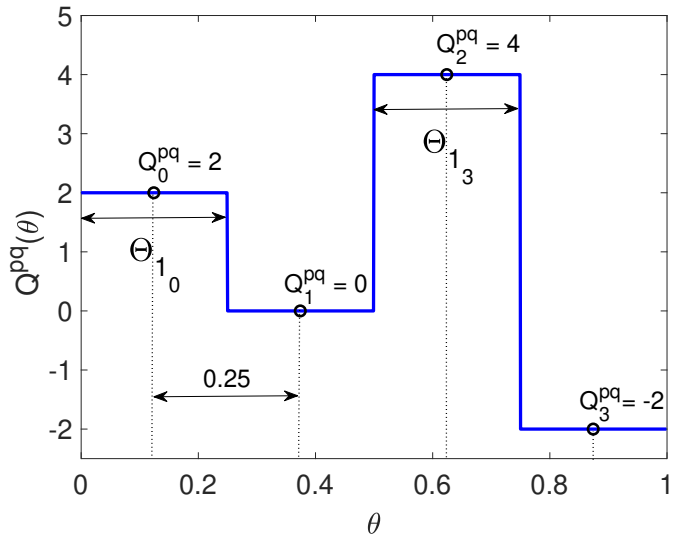


FIG. 3.3: Exemplo de $Q^{pq}(\theta)$ para $G = 1$.

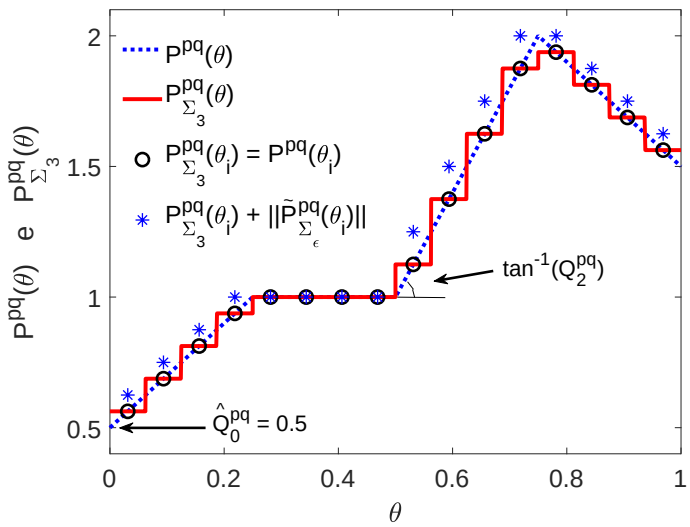


FIG. 3.4: $P^{pq}(\theta)$ e $P^{pq}_{\Sigma_J}(\theta)$ para $J = 3$, $G = 1$ e $Q^{pq}(\theta)$ da FIG. 3.3.

Um exemplo de um elemento genérico $Q^{pq}(\theta)$ para $G = 1$ é ilustrado na FIG. 3.3. Na FIG. 3.4, é mostrado o correspondente elemento de $\mathbf{P}(\theta)$ em (3.17), sob as restrições em (3.18) com $\hat{Q}^{pq}_0 = 0.5$, e $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta)$ em 3.20 para $J = 3$. Neste caso, visto que $J \geq G$ a expansão em TH (3.20) captura todas as informações relevantes de $\mathbf{P}(\theta)$ em (3.17).

O nível de truncamento G define os intervalos $\Theta_{G_h} = \left[\frac{h}{2^{G+1}}, \frac{h+1}{2^{G+1}}\right)$, com $\cup_{h=0}^{2^{G+1}-1}\{\Theta_{G_h}\} = \Theta$. Então, como $\mathbf{P}(\theta)$ em (3.17) é afim por partes e $\mathbf{Q}(\theta)$ em (3.16) é constante por partes, para a condição $J \geq G$ as seguintes propriedades são verdadeiras $\forall \theta_i \in \Theta_{G_h}$ FIG. 3.4:

$$\mathbf{P}(\theta_i) = \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \Big(\mathbf{Q}_h\theta_i + \hat{\mathbf{Q}}_h\Big)\phi_{i-1}(2^{J+1}\theta_i), \tag{3.22}$$

$$\mathbf{Q}(\theta_i) = \mathbf{Q}_h. \tag{3.23}$$

Além disso, para $\theta \in \Theta_{J_i}$, os resíduos máximos dependem das inclinações Q_h^{pq}, $\forall \theta_i \in \Theta_{G_h}$:

$$\tilde{P}_{\Sigma_\mathcal{E}}^{pq}(\theta_i) \triangleq \max\{P_{\Sigma_\mathcal{E}}^{pq}(\theta)\} = Q^{pq}(\theta_i)/2^{J+2}. \tag{3.24}$$

Suponha agora $\theta(t) \in \Theta$ e $|\dot{\theta}(t)| \leq \rho \in \mathbb{R}_+$ $\forall t$. Considere o sistema LPV (3.1) e a TH da matriz da dinâmica em (3.7), com o conjunto de matrizes truncadas $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, suas normas induzidas e limites superiores correspondentes $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$ calculados $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^{\Theta}$ como indicado na Seção 3.1.1. Considere também $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ em (3.22) sob a condição (3.18) com o conjunto correspondente $\tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)$, cujos elementos são dados por (3.24), e $\mathbf{Q}(\theta_i)$ em (3.23). Então o teorema a seguir estabelece as condições para a existência de $\mathbf{P}(\theta)$ em (3.17) que garante a estabilidade quadrática do sistema (3.1).

Teorema 3.2. *(BANDEIRA, 2018) O sistema* (3.1) *é quadraticamente estável se existirem matrizes* $\hat{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$, $0 \leq h \leq 2^{G+1}-1$, *e escalares* $\gamma_{J_i}, \gamma_{\mathcal{E}_i} \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq 2^{J+1}$, *tal que as seguintes condições sejam satisfeitas* $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^{\Theta}$*:*

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n \succ 0, \tag{3.25}$$

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{J_i}\mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{3.26}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n & \tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} \pm\rho\mathbf{Q}(\theta_i) + \mathcal{S}\left(\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)\right) + 2\gamma_{j_i}||\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)||\mathbf{I}_n \\ +2\gamma_{\mathcal{E}_i}\Big(||\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)|| + ||\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)||\Big)\mathbf{I}_n \prec 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Prova: Ver (BANDEIRA, 2018). □

Em resumo, a viabilidade do problema de dimensão finita no Teorema 3.2 implica na

viabilidade do problema de dimensão infinita em (3.3) - (3.4), o que permite verificar a estabilidade do sistema LPV (3.1). O número de variáveis escalares de decisão nas $5(2^{J+1})$ PLMI (3.25) - (3.28) é $2(2^{J+1}) + (2^{G+1}+1)(n(n+1)/2)$. Enquanto o Teorema 3.1 envolve uma FL quadrática no estado, o Teorema 3.2 oferece um grau de liberdade muito maior, permitindo a síntese conjunta de uma FL quadrática no estado e com dependência paramétrica no $\mathcal{L}_2^{\Theta}$.

Os Teoremas 3.1 e 3.2 fornecem somente condições suficientes para a estabilidade quadrática quando expansões truncadas de Haar são usadas. Por outro lado, para o Teorema 3.2, quando $J \to \infty$, $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) \to \mathbf{A}(\theta)$, $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\| \to 0$, $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) \to \mathbf{P}_{\Sigma_\infty}(\theta) = \mathbf{P}(\theta)$, $\mathbf{P}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) \to 0$, e os últimos termos em (3.28) $2\gamma_{j_i}||\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)||\mathbf{I}_n + 2\gamma_{\mathcal{E}_i}\left(||\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)|| + ||\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)||\right)\mathbf{I}_n \to 0$. Consequentemente, o conservadorismo introduzido pelo Teorema 3.2 desaparece, e as condições suficientes para a estabilidade quadrática se tornam assintoticamente também necessárias. Além disso, com o aumento de G, maior grau de liberdade é provido para encontrar uma solução viável para a função matricial afim por partes, $\mathbf{P}(\theta)$ em (3.17). Portanto, G determina a suavidade de $\mathbf{P}(\theta)$ se uma solução viável for encontrada. Quando $G \to \infty$, o espaço de busca para FL (quadráticas) candidatas tende assintoticamente ao espaço $\mathcal{L}_2^{\Theta}$. Enquanto o Teorema 3.1 envolve uma FL quadrática no estado, o algoritmo do Teorema 3.2 oferece a possibilidade de considerar um grau de liberdade muito maior, permitindo a síntese de uma FL conjuntamente quadrática no estado e assintoticamente $\mathcal{L}_2^{\Theta}$ no parâmetro. Finalmente, o número de variáveis escalares de decisão nas $5(2^{J+1})$ PLMI (3.25) - (3.28) é $2(2^{J+1}) + (2^{G+1}+1)(n(n+1)/2)$.

3.1.4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Os exemplos apresentados nesta seção envolvem dependências paramétricas gerais e são usados para demonstrar a validade dos algoritmos propostos por Bandeira (2018) nesses casos.

3.1.4.1 EXEMPLO 1

Considere o modelo de sistema introduzido em (CHESI, 2013) e utilizado em (DE ARAÚJO et al., 2015; BANDEIRA, 2018), com um elemento adicional que depende do parâmetro variante no tempo $\theta(t)$ de uma forma mais geral que as tradicionais politópica

e LFT:

$$\mathbf{A}(\theta)=\begin{bmatrix} 0 & (2{,}01)\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) \\ \frac{-1+\theta-\theta^2}{1+\theta} & -1 \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

em que $\theta(t) \in [0,\zeta]$. O objetivo é determinar o máximo ζ, denotado ζ^*, tal que a origem seja assintoticamente estável mesmo para uma taxa de variação ilimitada.

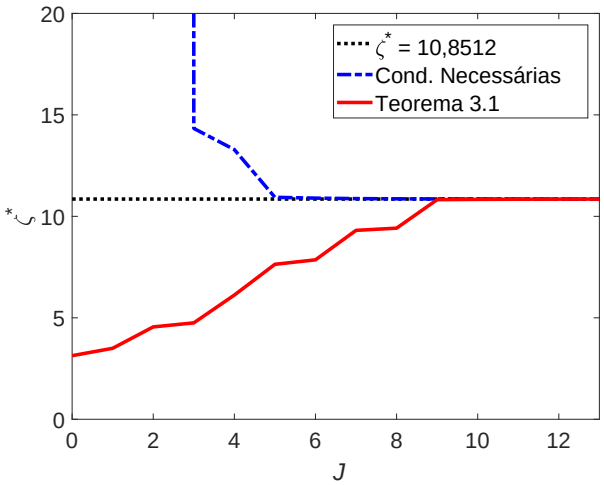


FIG. 3.5: Estimativas de ζ^* para diferentes valores de J no Exemplo 1.
Fonte: (BANDEIRA, 2018).

Analogamente a (BANDEIRA, 2018), para cada nível de truncamento J, uma estimativa de ζ^* é encontrada por um algoritmo de bisseção em ζ o qual define o domínio Θ. A FIG. 3.5 ilustra as estimativas de ζ^* fornecidas pelo Teorema 3.1 para diferentes níveis de truncamento J. As estimativas se aproximam de $\zeta^* = 10{,}8512$ por baixo conforme J aumenta e para $J \geq 9$ o conservadorismo é quase desprezível. A FIG. 3.5 também mostra as estimativas de ζ^* que garantem a condição necessária para a estabilidade quadrática de (3.1), obtidas testando (3.3) - (3.4) somente $\forall\theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$, e desprezando os resíduos da matriz dinâmica, que resulta em limitantes superiores aos fornecidos pelo Teorema 3.1. Na FIG. 3.6, é mostrado que o termo $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|$ tende a decrescer com o aumento do nível de truncamento J, tendendo a zero assintoticamente. Então, o conservadorismo introduzido pelo algoritmo de discretização e truncamento do Teorema 3.1 também esvanece assintoticamente.

O Teorema 3.2 também permite analisar a estabilidade do sistema (3.29) para valores finitos da derivada paramétrica, como ilustra o próximo exemplo, o que é mais realístico em muitos casos práticos e impossível pelo método de Chesi (2013).

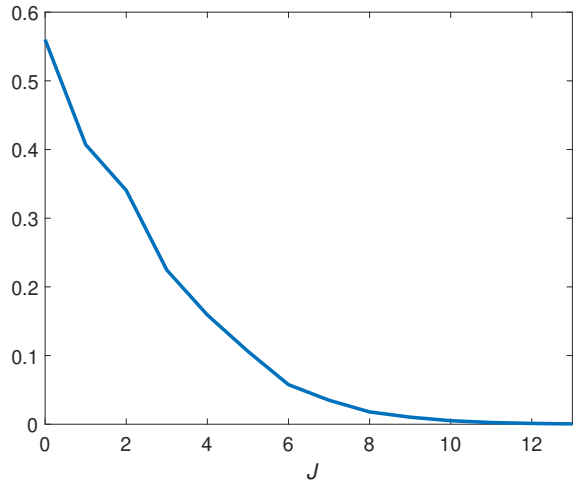


FIG. 3.6: $\max\limits_{\theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}} \{\|\tilde{\boldsymbol{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|\}$ para o sistema 3.29.
Fonte: (BANDEIRA, 2018).

3.1.4.2 EXEMPLO 2

Considere o sistema de segunda ordem translacional do tipo massa-mola-amortecedor descrito a seguir, em que os estados x_1 e x_2 são, respectivamente, o deslocamento em torno do ponto de equilíbrio (sistema em repouso) e a velocidade da massa m (PELLANDA; APKARIAN, 2003):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k(\theta)}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Assume-se que $m = 1\ kg$ e que o coeficiente de fricção viscosa $b = 0{,}1$ Nsm^{-1} são constantes, enquanto que o coeficiente da mola $k(\theta)$ varia em torno de um valor constante $k_0 = 1$ Nm^{-1}:

$$k = k_0 + \frac{\theta(t)}{2} \quad \text{Nm}^{-1}, \quad \theta(t) = \cos(\omega t) \in [-1{,}1]\,.$$

As condições do Teorema 3.1 com $J = 10$ são satisfeitas para $\theta \in [-0{,}1996,\ 0{,}1996]$, *i.e.* esta gama de variação determina o máximo deslocamento paramétrico para o qual o sistema (3.30) seria quadraticamente estável, considerando taxas de variação arbitrariamente altas ou mesmo ilimitadas ($\rho \to \infty$). Também, as condições do Teorema 3.2 com $J = 9$ e $G = 6$ são satisfeitas para $\theta \in [-1,\ 1]$ e para um ρ máximo denotado $\rho^* = 0{,}563$, *i.e.* o sistema é quadraticamente estável para o domínio paramétrico admissível inteiro se a condição $|d\theta/dt| \leq 0{,}563$ for satisfeita.

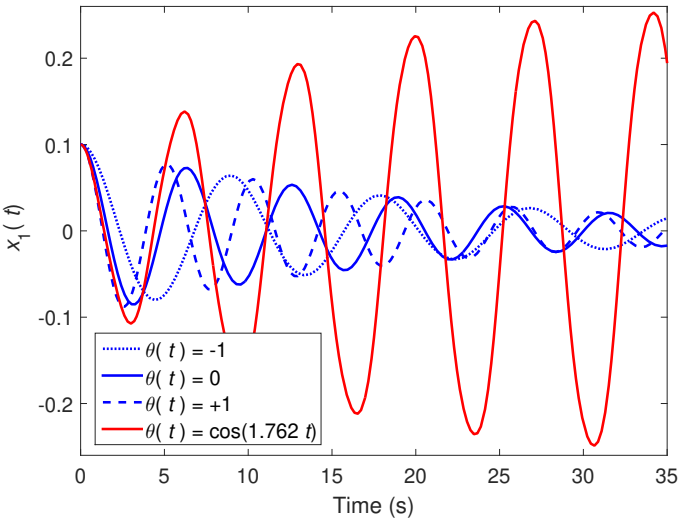


FIG. 3.7: Resposta no tempo do sistema 3.30 para diferentes valores de θ.
Fonte: (BANDEIRA, 2018).

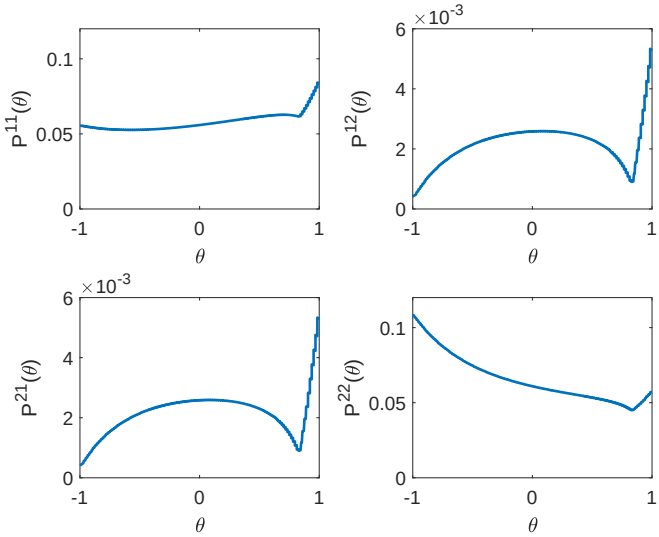


FIG. 3.8: $\mathbf{P}(\theta)$ obtido para o sistema 3.30 com $J = 9$, $G = 6$ e $\rho = 0{,}563$.
Fonte: (BANDEIRA, 2018).

Na FIG. 3.7, é mostrado o comportamento dinâmico de $x_1(t)$ para uma condição inicial $x(0) = [1 \quad 0]^T$. Nota-se que $|d\theta/dt| = |-\omega \sin(\omega t)| \leq \omega = \rho$ e, para $\omega = 1{,}762$, o sistema é instável. De fato, o sistema é estável para valores fixos de $\theta \in [-1, 1]$ e para $\omega = \rho \leq 1{,}761$ para a função particular $\theta(t) = \cos(\omega t)$. O limitante superior $\rho^* = 0{,}563 < 1{,}762$ é válido para qualquer dependência paramétrica em $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. Na FIG. 3.8, é ilustrada a reconstrução

de $P(\theta)$ utilizando (3.18) e (3.17) para $J = 9$, $G = 6$, $\theta \in [-1\,,1]$ e $\rho = 0{,}563$ estimado pelo algoritmo do Teorema 3.2.

3.1.4.3 EXEMPLO 3

Considere o seguinte modelo LPV de (TROFINO NETO; DE SOUZA, 2001):

$$\mathbf{A}(\theta(t)) = \begin{bmatrix} 8 - 108\theta(t) & -9 + 9\theta(t) \\ 120 - 120\theta(t) & -18 + 17\theta(t) \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

em que $\theta(t) \in [0{,}1)$ e $|\dot{\theta}(t)| \leq \rho$. O problema é determinar a taxa de variação ρ máxima, ρ^*, tal que a origem seja assintoticamente estável. O valor máximo obtido em (TROFINO NETO; DE SOUZA, 2001) e em (DE ARAÚJO et al., 2015), é $\rho^* = 66{,}81$ e $\rho^* = 252{,}49$ (para $J = 12$ e $G = 10$), respectivamente.

Na FIG. 3.9, são apresentadas estimativas de ρ^* obtidas pelo uso do algoritmo do Teorema 3.2 para diferentes pares de resolução $\{J,G\}$. Conforme o nível J aumenta, mais informação sobre o sistema é capturada, resultando em uma estimativa menos conservadora de ρ^*. Adicionalmente, aumentando o nível de resolução G, maior grau de liberdade é provido para $\mathbf{P}(\theta)$, e melhores resultados são obtidos. Para $J = 12$ e $G = 7$, o algoritmo do Teorema 3.2 obteve $\rho^* = 388{,}60$, portanto, muito menos conservador do que os resultados anteriores, pois o conservadorismo tende a decrescer conforme os níveis de resolução J e G aumentam. De fato, aumentar a resolução J corresponde a obter mais informação sobre o sistema, enquanto que aumentar a resolução G corresponde a prover mais graus de liberdade para busca da FL.

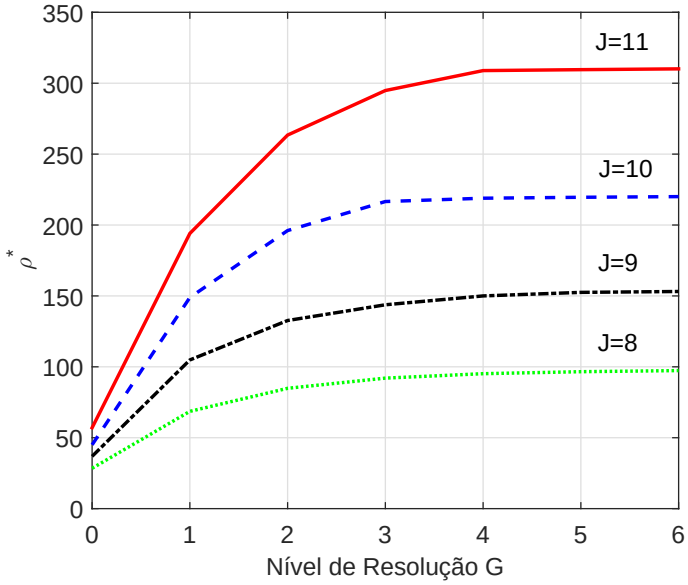


FIG. 3.9: Estimativas de ρ^* para o Exemplo 3 e diferentes níveis de resolução $\{J,G\}$. Fonte: (BANDEIRA, 2018).

A base teórica para as caracterizações PLMI introduzidas por de Araújo et al. (2015) e aquelas apresentadas em (BANDEIRA, 2018) e (BANDEIRA et al., 2018) e discutidas neste artigo são similares. Contudo, quando o foco está na implementação computacional, essas técnicas apresentam diferenças significativas, principalmente quando PDLF são consideradas. Esses últimos resultados permitem uma abordagem sistemática e numericamente tratável para aplicar a sistemas com qualquer tipo de dependência paramétrica, enquanto que os anteriores requerem análise algébrica particular para cada classe de dependência paramétrica das matrizes de estado. Além disso, múltiplos parâmetros podem ser tratados, mas da mesma forma que para a maioria das técnicas de análise de estabilidade de sistemas LPV, a carga computacional pode se tornar proibitiva com o aumento do número de parâmetros. Entretanto, esta dificuldade pode ser superada considerando níveis de truncamento Haar baixos, o que resulta em um maior conservadorismo, pois o método obtém soluções que garantem a estabilidade para qualquer nível de truncamento e, por conseguinte, de conservadorismo.

Finalmente, extensões deste método para análise e síntese de desempenho robusto são objetos da próxima seção e próximo capítulo, respectivamente.

3.2 ANÁLISE DE DESEMPENHO ROBUSTO H_∞ VIA TH

Considere a representação em espaço de estados de um sistema LPV, com dependência paramétrica geral, múltiplas entradas e saídas, representado por $\mathcal{M}(\theta(t),t)$ em (2.34), em que os elementos das matrizes $\mathbf{A}(\theta(t))$, $\mathbf{B}(\theta(t))$, $\mathbf{C}(\theta(t))$ e $\mathbf{D}(\theta(t))$ são funções do parâmetro $\theta(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ considerado escalar também neste capítulo. Admite-se que tanto o parâmetro quanto a sua taxa de variação evoluem em domínios compactos, ou seja, $\theta(t) \in \Theta$ e $\dot{\theta}(t) \in \Theta_d$, respectivamente.

Para ficar mais clara a apresentação, além de ser considerado o caso escalar $\theta \in \Theta$, considera-se também o caso normalizado $\Theta = [0\,,1)$, sem perda de generalidade, ou seja, os resultados podem ser estendidos para o caso em que o parâmetro é multidimensional (MALLAT, 2009) evoluindo em intervalos gerais.

Na Seção 2.3.3.1, foi visto que o ganho (ou norma) $\mathcal{L}_2$ induzida de um sistema LPV (2.34) é a extensão para sistemas LPV da norma H_∞ de sistemas LTI e pode ser representado pelo menor η que satisfaça a (2.64). Além disso, para calcular o ganho $\mathcal{L}_2$ é utilizado o conceito de sistemas dissipativos[4]. Essas PLMI do Corolário 2.1, simplificadas pelo complemento de Schur, são aqui replicadas para facilitar a visualização e comparação com a nova caracterização LMI do Teorema 3.3, a seguir que resolve o problema de dimensionalidade infinita original, via gradeamento paramétrico TH e condições suficientes:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \succ 0, \tag{3.32}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) & -\eta\mathbf{I} & \mathbf{D}^T(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) & -\eta\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.33}$$

3.2.1 DESEMPENHO H_∞ COM FL INDEPENDENTE DO PARÂMETRO

Considere as matrizes $\mathbf{A}\left(\theta(t)\right)$, $\mathbf{B}\left(\theta(t)\right)$, $\mathbf{C}\left(\theta(t)\right)$ e $\mathbf{D}\left(\theta(t)\right)$ cujos elementos são funções de $\theta(t)$, pertencentes ao $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, espaço de estados do sistema LPV da EQ. 2.34, com dependência paramétrica geral, múltiplas entradas e saídas, parâmetro escalar e com taxa de variação em domínios compactos, $\theta(t) \in \Theta$ e $\dot{\theta}(t) \in \Theta_d$. Dado um nível de truncamento J, aplica-se o algoritmo da Seção 3.1.1 para obter os conjuntos de matrizes truncadas

[4] É utilizado o conceito de sistemas dissipativos (SCHERER et al., 1997; SCHERER; WEILAND, 2000), apresentado na Seção 2.3.3.

$\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ e os limites superiores correspondentes, $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$ e $\|\tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, calculados $\forall \theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$.

O seguinte teorema apresenta um número finito de condições suficientes para a existência de uma FL independente do parâmetro tal que o sistema LPV da EQ. 2.42 tenha ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$.

Teorema 3.3. *(BANDEIRA, 2018) O sistema LPV, controlável, tem ganho $\mathcal{L}_2 \leq \eta$ se existirem $\gamma \in \mathbb{R}_+$ e $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$ tais que o seguinte problema de minimização de $\eta \in \mathbb{R}_+$ tenha solução, $\forall \theta_i \in \Theta_J \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \Theta$:*

$$\min_{(\gamma,\mathbf{P})} \quad \eta, \quad \textit{sujeito a}$$

$$\mathbf{P} \succ \mathbf{0}, \tag{3.34}$$

$$\gamma \geq 1, \tag{3.35}$$

$$\mathbf{P} - \gamma \mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{3.36}$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta_i) + 2\gamma \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p} \prec 0. \tag{3.37}$$

em que

$$\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)\right) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{C}^T_{\Sigma_J}(\theta_i) \\ \mathbf{B}^T_{\Sigma_J}(\theta_i)\mathbf{P} & -\eta \mathbf{I}_m & \mathbf{D}^T_{\Sigma_J}(\theta_i) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Prova: Ver (BANDEIRA, 2018). □

3.2.2 DESEMPENHO H_∞ COM FL DEPENDENTE DO PARÂMETRO

Suponha agora $\forall t$ $\theta(t) \in \Theta$ e $|\dot{\theta}(t)| \leq \rho \in \mathbb{R}_+$. Dado um nível de truncamento J, aplica-se o algoritmo da Seção 3.1.1 para obter os conjuntos de matrizes truncadas e os limites superiores correspondentes dos resíduos das matrizes de estados do sistema LPV, como na seção anterior.

Considere também $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ dado em (3.22), sob a condição (3.18), com o conjunto correspondente $\tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)$, cujos elementos são dados por (3.24), e $\mathbf{Q}(\theta_i)$ em (3.23). Então o teorema a seguir estabelece um número finito de condições suficientes para a existência de $\mathbf{P}(\theta)$ tal que o ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$:

Teorema 3.4. *(BANDEIRA, 2018) Um sistema LPV* (2.34)*, controlável, tem ganho* $\mathcal{L}_2 \leq \eta$ *se existirem matrizes* $\hat{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$, $0 \leq h \leq 2^{G+1} - 1$, *e escalares* $\gamma_{J_i}, \gamma_{\mathcal{E}_i} \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq 2^{J+1}$, *tais que o seguinte problema de minimização* $\eta \in \mathbb{R}_+$ *tenha solução,* $\forall \theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i} \subset \Theta$*:*

$$\min_{(\gamma_{\mathcal{E}_i}, \gamma_{J_i}, \hat{\mathbf{Q}}_\mathbf{0}, \mathbf{Q_h})} \quad \eta, \ \textit{sujeito a}$$

$$\gamma_{J_i} \geq 1 \tag{3.38}$$

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n \succ 0, \tag{3.39}$$

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{J_i}\mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{3.40}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n & \tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.41}$$

$$\mathbb{Q}(\theta_i) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)) + 2\gamma_{J_i}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)|| + 2\gamma_{\mathcal{E}_i}\left(||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)|| + ||\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i)||\right) \prec 0. \tag{3.42}$$

onde

$$\mathbb{Q}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \pm\rho\mathbf{Q}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)=\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)=\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Prova: Ver (BANDEIRA, 2018). □

3.2.3 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS - EXEMPLO 4

Considere o seguinte modelo apresentado em (DE OLIVEIRA et al., 2002):

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} -1 - 1{,}3\theta & 0{,}5 - 20\theta \\ -1 + 2\theta & -2 - 10\theta \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

$$\mathbf{B}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 + 2{,}2\theta & -4 + 0{,}5\theta \\ -1 - 6\theta & -1 - 5\theta \end{bmatrix}, \tag{3.44}$$

$$\mathbf{C}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.45}$$

em que $\theta \in [0, 1]$ e $\dot{\theta} \in [-10, 10]$. de Oliveira et al. (2002), em sua técnica, obteve os valores de η utilizando as seguintes noções de estabilidade: quadrática (Q), afim-quadrática (AQ) e bi-quadrática (BQ), estes representados na FIG. 3.12. Este exemplo é utilizado aqui para aprofundar os testes das técnicas de Bandeira (2018) para a análise de desempenho LPV H_∞, uma vez que naquela tese um foco maior foi dado para a análise de desempenho LPV H_2.

Aplicando o Teorema 3.3, para diferentes níveis de truncamento J, e otimizando os valores de η , obtêm-se os resultados apresentados na TAB. 3.1. Verifica-se que, conforme J aumenta, o valor de η tende a 7,5848, o mesmo valor obtido por de Oliveira et al. (2002) para $\mathbf{P}$ independente de θ (curva Q da FIG. 3.12). Calculando também a norma H_∞ para valores fixos do parâmetro, ponto a ponto, do intervalo $\theta = [0, 1]$, encontra-se o valor máximo de $\eta = 5{,}5798$, conforme FIG. 3.10, sendo assim menor que o valor de $\eta = 7{,}5848$ obtido para uma FL independente do parâmetro, como era de se esperar. Na TAB.

3.1, também são apresentadas as estimativas de η para as condições necessárias obtidas simplesmente testando as PLMI (2.64) do Corolário 2.1, para $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \succ \mathbf{0}$ constante, $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^{\Theta}$, sendo este o procedimento adotado pelo método LPV clássico de gradeamento do domínio paramétrico. Observa-se, pela reprodução dos resultados da TAB. 3.1 na FIG. 3.11, que estes testes resultam em limitantes inferiores (estimativas otimistas, não garantidas, para o limite superior da norma H_∞) para os valores de η fornecidos para as condições suficientes do Teorema 3.3 (estimativas pessimistas para o limite superior da norma H_∞, cujo conservadorismo diminui assintoticamente).

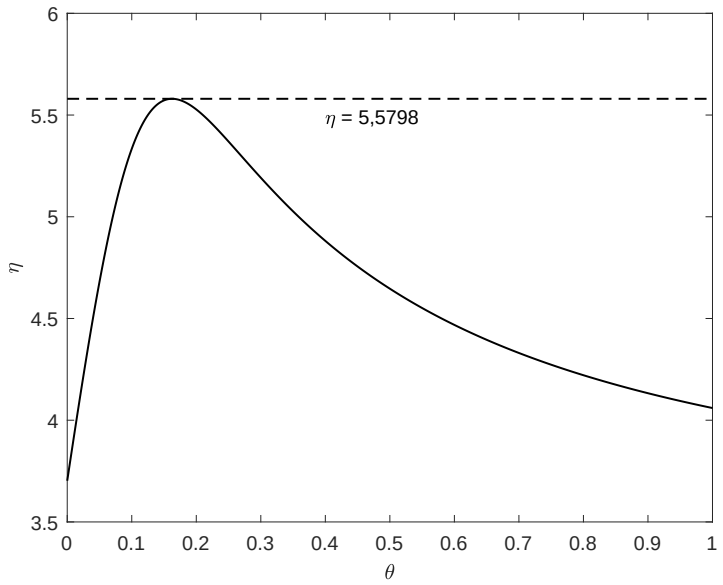


FIG. 3.10: Norma H_∞ do sistema do Exemplo 4 obtida para valores fixos de θ.

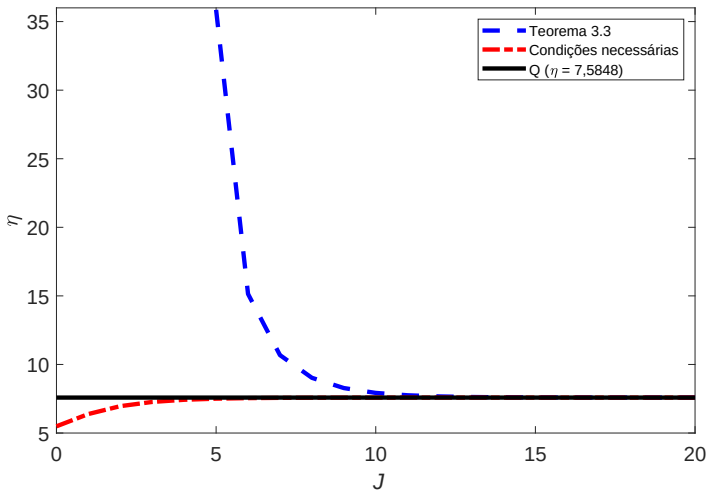


FIG. 3.11: Valores de η, para o Exemplo 4, com FL independente do parâmetro.

TAB. 3.1: Valores de η para o Exemplo 4 com FL independente do parâmetro.

J	η - Teorema 3.3	η - Cond. Necessárias
0	——	5,4904
1	——	6,3859
2	——	6,9601
3	——	7,2672
4	——	7,4249
5	35,8566	7,5046
6	15,1402	7,5447
7	10,6807	7,5648
8	9,0264	7,5748
9	8,2790	7,5799
10	7,9251	7,5824
11	7,7532	7,5837
12	7,6684	7,5843
13	7,6264	7,5846
14	7,6055	7,5848
15	7,5950	7,5848
16	7,5898	7,5848
17	7,5872	7,5848
18	7,5859	7,5848
19	7,5852	7,5848
20	7,5849	7,5848

Aplicando o algoritmo do Teorema 3.4, para FL com $\mathbf{P}(\theta)$ suportando uma dependência geral ($\mathcal{L}_2Q$), para $J = 13$, $G = 0,1,2,3,4,5$, com $\rho \in [0,\ 10]$, e também para $J = 15, G = 5$, comparam-se com os gráficos de estabilidade quadrática (Q), afim-quadrática (AQ) e bi-quadrática (BQ) de de Oliveira et al. (2002). Tem-se os resultados representados na FIG. 3.12, na qual se pode aferir que quanto maior o valor de J, menos conservadores são os resultados. Como era de se esperar, os resultados obtidos pelo método $\mathcal{L}_2Q$ são menos conservadores que os apresentados por (DE OLIVEIRA et al., 2002). Neste caso, $\mathbf{P}(\theta)$ possui uma dependência paramétrica mais geral e menos restritiva, provendo maior grau de liberdade na busca de uma FL viável. Observa-se também que, a medida que G aumenta, as curvas η x ρ tendem a se aproximar entre si, indicando a proximidade de uma saturação em G e da utilização da liberdade máxima oferecida pelo espaço $\mathcal{L}_2$ para a busca de uma FL dependente do parâmetro. Observa-se também que todas as curvas η x ρ obtidas neste trabalho e naquele de de Oliveira et al. (2002) têm, como limite inferior, o valor máximo da norma H_∞ do sistema para todos os pontos fixos do domínio paramétrico e, como limite superior, o valor obtido para $\mathbf{P}$ constante que

considera ilimitada a taxa de variação paramétrica, ou seja $\eta(\rho) \in [5{,}5798,\ \ 7{,}5848]$. Esta é uma propriedade conhecida dos sistemas LPV.

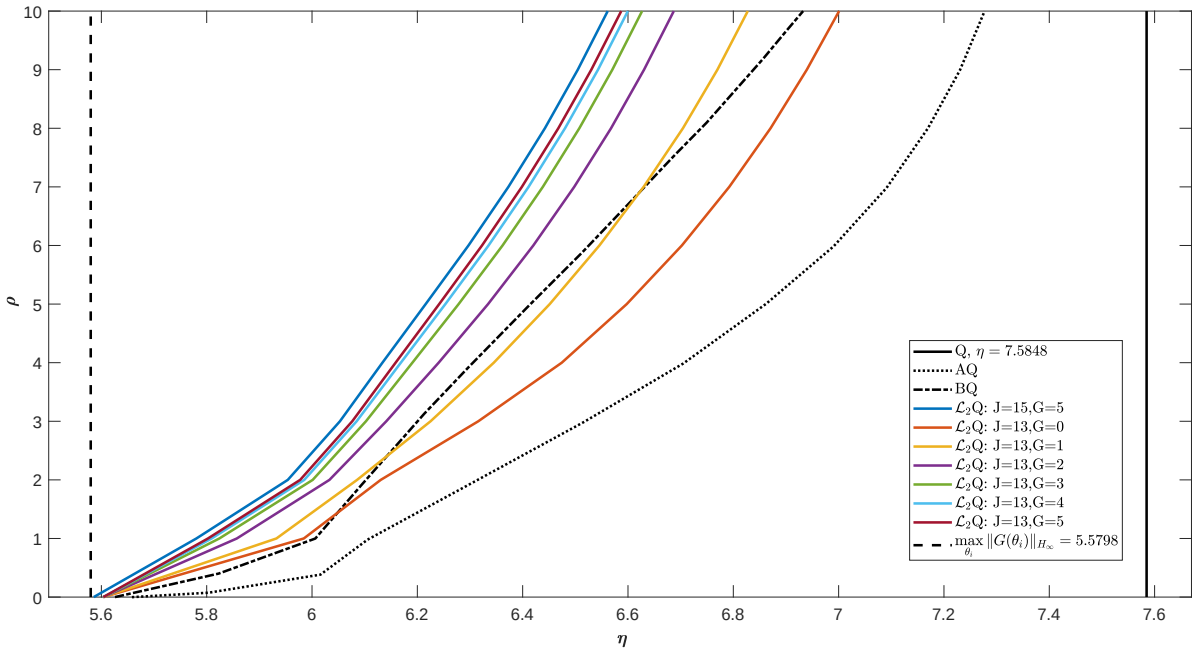


FIG. 3.12: Valores de η obtidos pelo uso do Teorema 3.4, para o Exemplo 4, com $J = 13$ e diferentes valores de G, ρ e $J = 15$, comparados com os resultados obtidos por (DE OLIVEIRA et al., 2002).

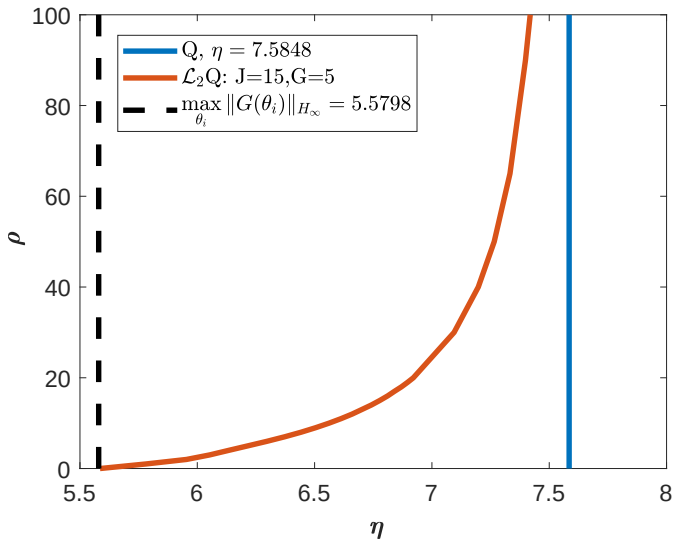


FIG. 3.13: Valores de η obtidos pelo Teorema 3.4 para o Exemplo 4, com $J = 15$, $G = 5$ e diferentes valores de ρ.

Na FIG. 3.13, observa-se somente a curva para $J = 15$ e $G = 5$ para valores de $\rho \in [0,\ 100]$, evidenciando uma maior proximidade de η, para valores maiores de ρ, do valor $\eta = 7{,}5848$, referente à PILF ou $\mathbf{P}$ constante.

A FIG. 3.14 mostra a reconstrução da matriz $P(\theta)$ para $J = 15$, $G = 5$ e $\rho = 8$, para o intervalo de estabilidade, $\theta \in [0,\ 1]$, obtido pelo uso do algoritmo do Teorema 3.4. Além de ser positiva definida, observa-se que a matriz de Lyapunov obtida é praticamente contínua em todo intervalo paramétrico em que o sistema é estável, para o nível de resolução Haar utilizado.

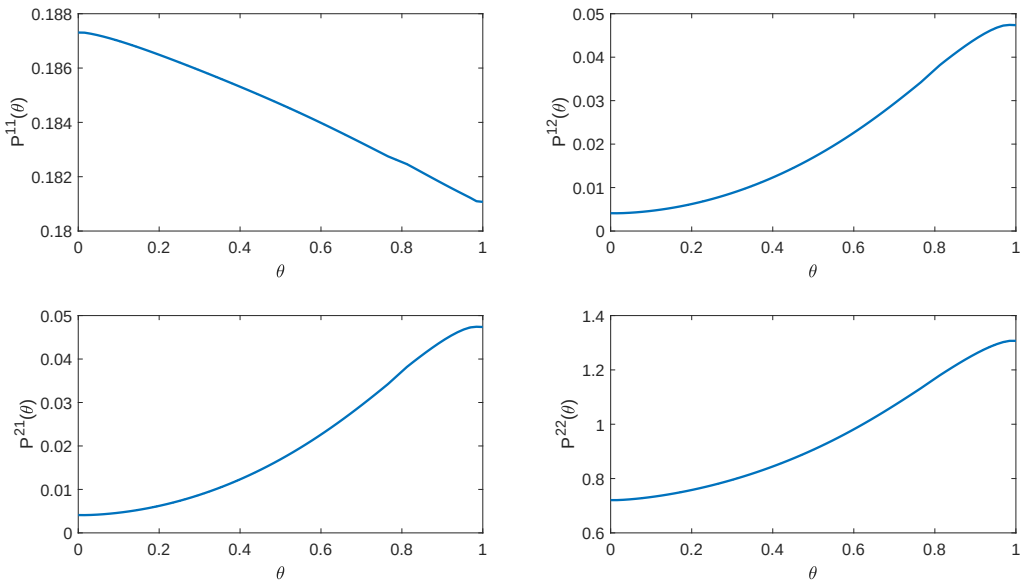


FIG. 3.14: $\mathbf{P}(\theta)$ obtido para $J = 15$, $G = 5$ e $\rho = 8$, para o Exemplo 4.

3.3 CONCLUSÃO

Neste capítulo são apresentados, de forma resumida, os resultados obtidos pelo uso da TH na análise LPV de estabilidade e desempenho robusto H_∞ por Bandeira (2018) e Bandeira et al. (2018). Os algoritmos de análise de desempenho são testados em um exemplo com dependência paramétrica afim, com a finalidade de validá-los e comparar o seu desempenho com técnicas de análise de desempenho bi-quadrática e afim-quadrática encontrados na literatura. O exemplo foi muito útil para mostrar que os algoritmos desenvolvidos naqueles trabalhos são válidos e corretos, embora o método seja capaz de tratar exemplos com dependências paramétricas muito mais gerais.

No próximo capítulo são introduzidas novas caracterizações LMI para a síntese de controle LPV por realimentação de estados, como resultado da extensão dos métodos apresentados neste capítulo. Além disso, as caracterizações LMI dos Teoremas 3.3 e 3.4 são reavaliadas com o objetivo de simplificação e diminuição do conservadorismo.

4 NOVAS CARACTERIZAÇÕES LMI PARA ANÁLISE E SÍNTESE DE CONTROLE LPV COM DESEMPENHO $\mathcal{L}_2$ GARANTIDO

Neste capítulo, são introduzidas novas caracterizações e condições suficientes para análise de desempenho robusto H_∞ de sistemas LPV utilizando a TH. Uma formulação mais adequada e ligeiramente menos conservadora do que as apresentadas nos Teoremas 3.3 e 3.4 das Seções 3.2.1 e 3.2.2, respectivamente, é desenvolvida e validada numericamente. Esses novos algoritmos são objetos dos Teoremas 4.1 e 4.2 apresentados, respectivamente, nas Seções 4.1.1 e 4.1.2.

Os resultados dos Teoremas 3.3 e 3.4 são então estendidos para a síntese de controle LPV por realimentação de estados com desempenho $\mathcal{L}_2$ garantido via TH e demonstrados nos Teoremas 4.3 e 4.4, respectivamente, nas Seções 4.2.1 e 4.2.2. Exemplos numéricos ilustram e validam os resultados de síntese.

4.1 REFORMULAÇÃO DA ANÁLISE DE DESEMPENHO H_∞ VIA TH

4.1.1 ANÁLISE COM FL INDEPENDENTE DO PARÂMETRO

Considere o sistema de PLMI (3.32) - (3.33) da Seção 3.2. O seguinte teorema, analogamente ao Teorema 3.3, resolve o problema de dimensão infinita e com infinitas restrições daquele sistema de PLMI utilizando PILF. Escrevendo a matriz de resíduos máximos $\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)$, em (3.37), como a soma de duas matrizes, $\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) + \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)$, é possível eliminar a restrição $\gamma \geq 1$ em (3.35).

Teorema 4.1. *O sistema LPV* (2.34)*, supostamente controlável, tem ganho* $\mathcal{L}_2 \leq \eta$ *se existirem* $\gamma \in \mathbb{R}_+$ *e* $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$ *tal que o seguinte problema de otimização do nível de desempenho* $\eta \in \mathbb{R}_+$ *tenha solução,* $\forall \theta_i \in \Theta_J \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \Theta$*:*

$$\min_{(\gamma,\mathbf{P})} \quad \eta, \text{ sujeito a}$$

$$\mathbf{P} \succ \mathbf{0}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{P} - \gamma \mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{4.2}$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta_i) + 2\gamma \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p} + \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p} \prec 0. \tag{4.3}$$

em que

$$\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}\left(\mathbf{PA}_{\Sigma_J}(\theta_i)\right) & \mathbf{PB}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{C}^T_{\Sigma_J}(\theta_i) \\ \mathbf{B}^T_{\Sigma_J}(\theta_i)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}^T_{\Sigma_J}(\theta_i) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Prova: Conforme o corolário 2.1 um sistema LPV (2.34), controlável, tem ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$ se, e somente se, existir $\eta \in \mathbb{R}_+$ tal que o conjunto de PLMI (3.32) e (3.33) seja satisfeito.

As matrizes $\mathbf{A}(\theta)$, $\mathbf{B}(\theta)$, $\mathbf{C}(\theta)$ e $\mathbf{D}(\theta)$ em (3.33), são substituídas por suas expansões de Haar truncadas e respectivos resíduos resultando em:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}\left(\mathbf{PA}_{\Sigma_J}(\theta)\right) + \mathcal{S}\left(\mathbf{PA}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\right) & \mathbf{PB}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{PB}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{C}^T_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{C}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) \\ \mathbf{B}^T_{\Sigma_J}(\theta)\mathbf{P} + \mathbf{B}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I_m} & \mathbf{D}^T_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{D}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{C}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{D}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.4)$$

Separando o conjunto de PLMI (4.4) em duas partes, a primeira com as expansões truncadas e a segunda com os resíduos, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}\left(\mathbf{PA}_{\Sigma_J}(\theta)\right) & \mathbf{PB}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{C}^T_{\Sigma_J}(\theta) \\ \mathbf{B}^T_{\Sigma_J}(\theta)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I_m} & \mathbf{D}^T_{\Sigma_J}(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{S}\left(\mathbf{PA}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\right) & \mathbf{PB}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{C}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) \\ \mathbf{B}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.5)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbb{P}\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) + \mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{P} + \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta) \prec 0. \quad (4.6)$$

em que

$$\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)\right) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{C}^T_{\Sigma_J}(\theta) \\ \mathbf{B}^T_{\Sigma_J}(\theta)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}^T_{\Sigma_J}(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{B}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^{\mathbf{n}}$, a restrição (4.2) implica que $||\mathbf{P}|| \leq \gamma$. Então, $\forall\ \theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) + \mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{P} &\preceq \|\mathbb{P}\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) + \mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{P}\|\mathbf{I}_{n+m+p} \\ &\preceq 2\|\mathbb{P}\|\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} \preceq 2\gamma\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como os elementos de $\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta)$ são, por construção, constantes por partes, então $\forall\theta \in \Theta_{J_i}$ e $\forall\theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$, para cada um dos 2^{J+1} intervalos as relações a seguir são verdadeiras:

$$\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta) = \mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta_i), \text{ com } \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\| \preceq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)\| \text{ e } \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\| \preceq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)\| \tag{4.8}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbb{P}\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) + \mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{P} + \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta) \overset{(4.7)-(4.8)}{\preceq} \\ &\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta_i) + 2\gamma\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)\|\mathbf{I}_{n+m+p} + \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)\|\mathbf{I}_{n+m+p} \prec 0.. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Desta forma, o conjunto de desigualdades (4.9) implica que o conjunto de PLMI (4.3) é uma condição suficiente para que o ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$, no caso de uma variável de Lyapunov independente do parâmetro $\mathbf{P}$. □

4.1.2 ANÁLISE COM FL DEPENDENTE DO PARÂMETRO

Seguindo o mesmo raciocínio da seção anterior, é apresentada uma nova caracterização do Teorema 3.4, em que se elimina a restrição $\gamma_{J_i} \geq 1$ em (3.38).

Teorema 4.2. *O sistema LPV* (2.34)*, suposto controlável, tem ganho* $\mathcal{L}_2 \leq \eta$ *se existirem matrizes* $\hat{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$, $0 \leq h \leq 2^{G+1} - 1$, *e escalares* $\gamma_{J_i}, \gamma_{\mathcal{E}_i} \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq 2^{J+1}$, *tal que o seguinte problema de otimização do nível de desempenho* $\eta \in \mathbb{R}_+$ *tenha solução,* $\forall \theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i} \subset \Theta$*:*

$$\min_{(\gamma_{\mathcal{E}_i}, \gamma_{J_i}, \hat{\mathbf{Q}}_0, \mathbf{Q_h})} \quad \eta, \quad \textit{tal que}$$

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{\mathcal{E}_i} \mathbf{I}_n \succ 0, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{J_i} \mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{4.11}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\mathcal{E}_i} \mathbf{I}_n & \mathbf{P}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) \\ \mathbf{P}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \gamma_{\mathcal{E}_i} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}_{\pm}(\theta_i) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)) + 2\gamma_{J_i} ||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)|| \mathbf{I}_{n+m+p} + \\ &2\gamma_{\mathcal{E}_i} \left(||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)|| + ||\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)|| \right) \mathbf{I}_{n+m+p} + ||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)|| \mathbf{I}_{n+m+p} \prec 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

em que

$$\mathbb{Q}_{\pm}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \pm\rho \mathbf{Q}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\eta \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta \mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Prova: Conforme o corolário 2.1 para um sistema LPV (2.34) controlável, tem-se que o ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$ se, e somente se, existirem $\eta \in \mathbb{R}_+$ e $\mathbf{P}(\theta) \in \mathbb{S}^n$ tal que o conjunto de PLMIs (3.32) e (3.33) seja satisfeito.

Como $\gamma_{\mathcal{E}_i} \in \mathbb{R}_+$ e $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) \in \mathbb{S}^n$ então (4.10) implica em $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) \succ 0$ e (4.11) implica em $||\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)|| \leq \gamma_{J_i}$. Além disso, (4.12) implica em $||\tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)|| \leq \gamma_{\mathcal{E}_i}$ e

$$-\gamma_{\mathcal{E}_i} \preceq \mathbf{P}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) \preceq \gamma_{\mathcal{E}_i}. \tag{4.14}$$

Ambos $\mathbf{P}(\theta)$ e $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta)$ em (3.17) são, por construção, afim por partes e constante por partes, respectivamente, então $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) = \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ e $\mathbf{P}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) = \mathbf{P}(\theta) - \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\forall \theta \in \Theta_{J_i}$. A partir desta igualdade e das condições (4.10) e (4.14), tem-se que:

$$0 \prec \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n \preceq \mathbf{P}(\theta) \preceq \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) + \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n.$$

Portanto, $\mathbf{P}(\theta) \succ 0$, $\forall \theta \in \Theta$, que corresponde a condição (3.32).

Uma vez que a taxa de variação $\dot{\theta}$ é linear em (3.33), basta checar apenas os pontos extremos $\pm\rho$ do conjunto Θ_d, para todos os valores admissíveis de θ. Analogamente ao Teorema 4.1, as matrizes de estados $\mathbf{A}(\theta)$, $\mathbf{B}(\theta)$, $\mathbf{C}(\theta)$, $\mathbf{D}(\theta)$ do sistema LPV (2.34) e a matriz de Lyapunov candidata $\mathbf{P}(\theta)$, são substituídas em (3.33) por suas expansões de Haar truncadas e respectivos resíduos, resultando em:

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}_\pm(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta)\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta)\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)) + \\ &\mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)) + (\mathbb{P}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)) \prec 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

em que

$$\mathbb{Q}_\pm(\theta) = \begin{bmatrix} \pm\rho\mathbf{Q}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{B}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Os três últimos termos em (4.15) podem ser substituídos por seus limites superiores

$$\mathcal{S}(\mathbb{P}_{(.)}(\theta)\mathbb{M}_{(.)}(\theta)) \preceq 2\|\mathbb{P}_{(.)}(\theta)\|\|\mathbb{M}_{(.)}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p}. \tag{4.17}$$

Como $\mathbf{Q}(\theta)$ e $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta)$ são constantes por partes, $\forall\theta \in \Theta_{J_i}$ e $\forall\theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$, as seguintes relações são verdadeiras para cada um dos 2^{J+1} intervalos, i.e., para $i = 1, \ldots, 2^{J+1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\theta) &= \mathbf{Q}(\theta_{\mathbf{i}}), && (4.18)\\
\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta) &= \mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta_i), \text{ com } \|\mathbb{P}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\| \preceq \|\tilde{\mathbb{P}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i)\|, && (4.19)\\
\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta) &= \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i), \text{ com } \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\| \preceq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)\|, && (4.20)\\
\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\| &\preceq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)\|, && (4.21)\\
2\|\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\overset{(4.11)(4.19)(4.20)}{\preceq} 2\gamma_{J_i}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}, && (4.22)\\
2\|\mathbb{P}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\overset{(4.12)(4.19)(4.20)}{\preceq} 2\gamma_{\mathcal{E}_i}||\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}, && (4.23)\\
2\|\mathbb{P}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\overset{(4.12)(4.19)(4.20)}{\preceq} 2\gamma_{\mathcal{E}_i}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}. && (4.24)
\end{aligned}$$

Logo, utilizando as relações (4.22), (4.23) e (4.24) pode-se reescrever (3.33) como (4.13), $\forall\theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$. □

Exemplo 4.1. *Considere o Exemplo 4 da Seção* 3.2.3. *Um nova tabela e novos gráficos foram gerados considerando a reformulação dos Teoremas* 3.3 *e* 3.4, *apresentados nesta seção. A TAB.* 4.1 *e a FIG.* 4.1 *comparam os valores de* η *obtidos pelo Teorema* 3.3 *e Teorema* 4.1. *Pela análise dos dados, principalmente daqueles da tabela, pode-se verificar*

que, quanto maior o valor de J, menor é a diferença encontrada pelos uso dos dois teoremas. A FIG. 4.2 *replica os dados da FIG.* 3.12 *e mostra uma diferença muito pequena entre os valores de η encontrados pelo uso dos Teoremas* 3.4 *e* 4.2*. Percebe-se então que o novo teorema é um pouco menos conservador, porém com um número muito menor de restrições LMI, sendo assim computacionalmente mais vantajoso.*

TAB. 4.1: Valores de η encontrados pelos algoritmos dos Teoremas 4.1 e 3.3, para o Exemplo 3.2.3 com PILF.

J	η - Teorema 4.1	η - Teorema 3.3
5	26,2483	35,8566
6	12,7782	15,1402
7	9,7900	10,6807
8	8,6264	9,0264
9	8,0945	8,2790
10	7,8374	7,9251
11	7,7106	7,7532
12	7,6475	7,6684
13	7,6161	7,6264
14	7,6004	7,6055
15	7,5925	7,5950
16	7,5886	7,5898
17	7,5866	7,5872
18	7,5856	7,5859
19	7,5851	7,5852
20	7,5849	7,5849

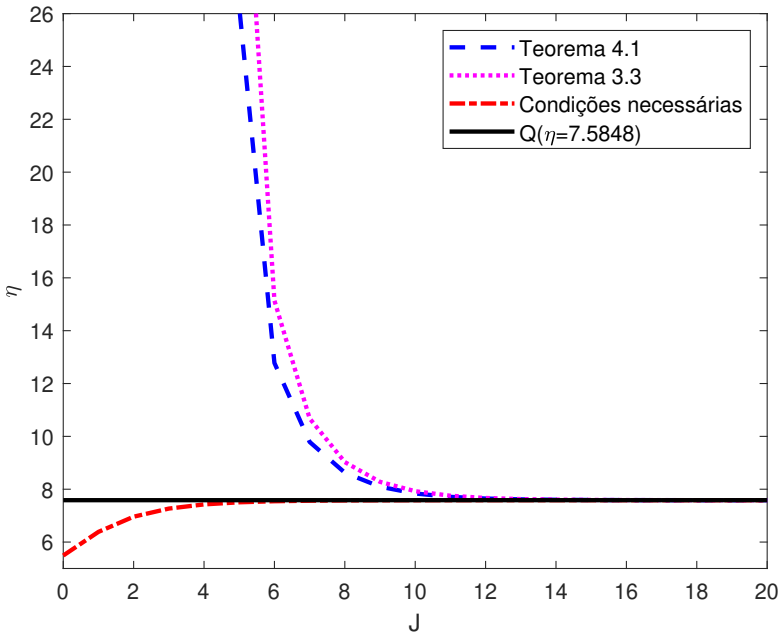


FIG. 4.1: Comparação gráfica dos dados numéricos da TAB. 4.1.

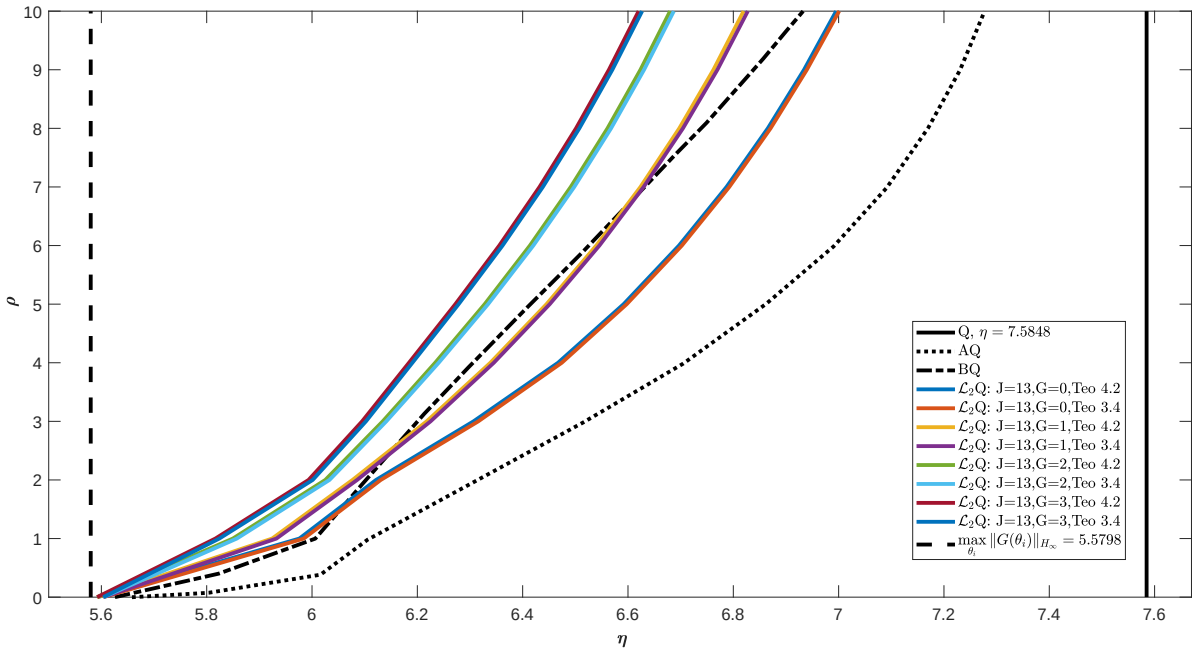


FIG. 4.2: Valores de η obtidos pelo Teorema 4.2 para o Exemplo 3.2.3 com J=13 com diferentes valores de G e ρ, comparando com os apresentados no Teorema 3.4.

4.2 SÍNTESE DE CONTROLE LPV POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS COM DESEMPENHO $\mathcal{L}_2$ GARANTIDO

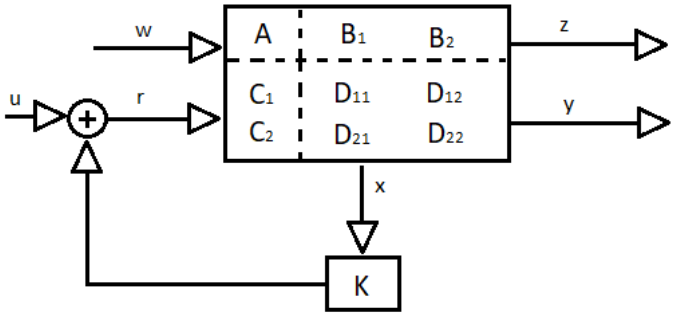


FIG. 4.3: Diagrama de blocos para síntese de controle $\mathcal{L}_2$-LPV.

Considere o diagrama de blocos da FIG. 4.3. Tem-se então o seguinte modelo de estados para o sistema com realimentação LPV de estados:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1(\theta(t))\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{r}(t),\\
\mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}(\theta(t))\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}(\theta(t))\mathbf{r}(t),\\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}(\theta(t))\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22}(\theta(t))\mathbf{r}(t),\\
\mathbf{r}(t) &= \mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{A}(\theta(t)) + \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}(\theta(t))]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1(\theta(t))\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{u}(t),\\
\mathbf{z}(t) &= [\mathbf{C}_1(\theta(t)) + \mathbf{D}_{12}(\theta(t))\mathbf{K}(\theta(t))]\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}(\theta(t))\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}(\theta(t))\mathbf{u}(t),\\
\mathbf{y}(t) &= [\mathbf{C}_2(\theta(t)) + \mathbf{D}_{22}(\theta(t))\mathbf{K}(\theta(t))]\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}(\theta(t))\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22}(\theta(t))\mathbf{u}(t).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Neste sistema, o canal $(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ é o canal de desempenho, ou seja, o canal para o qual se deseja minimizar o ganho $\mathcal{L}_2$.

Utilizando a seguinte Transformação de Congruência na PLMI encontrada no Corolário (2.1) e simplificada pelo complemento de Schur em 2.64 (replicada em (3.32) - (3.32)), substituindo os estados em (4.26) e considerando as dependências matriciais em θ omitidas

por simplicidade, tem-se:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{I} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{P}}+(\mathbf{A}+\mathbf{B}_2\mathbf{K})^T\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{B}_2\mathbf{K}) & \mathbf{P}\mathbf{B}_1 & (\mathbf{C}_1+\mathbf{D}_{12}\mathbf{K})^T \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ (\mathbf{C}_1+\mathbf{D}_{12}\mathbf{K}) & \mathbf{D}_{11} & -\eta\mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}+\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B}_2\mathbf{K})^T+(\mathbf{A}+\mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{C}_1+\mathbf{D}_{12}\mathbf{K})^T \\ \mathbf{B}_1^T & -\eta\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ (\mathbf{C}_1+\mathbf{D}_{12}\mathbf{K})\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{D}_{11} & -\eta\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0.$$

Considerando $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\theta})$, tem-se que

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \succ 0 \Longrightarrow \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}^T(\boldsymbol{\theta}) \succ 0, \tag{4.27}$$

e pela derivada de matrizes,

$$\dot{\mathbf{P}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{P}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \dot{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}), \tag{4.28}$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix}-\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{X}(\mathbf{A}+\mathbf{B}_2\mathbf{K})^T+(\mathbf{A}+\mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{X} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{X}(\mathbf{C}_1+\mathbf{D}_{12}\mathbf{K})^T \\ \mathbf{B}_1^T & -\eta\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ (\mathbf{C}_1+\mathbf{D}_{12}K)\mathbf{X} & \mathbf{D}_{11} & -\eta\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \tag{4.29}$$

Note que a PLMI acima é bilinear, pois apresenta multiplicações de duas variáveis $\mathbf{X}$ e $\mathbf{K}$. Assim, faz-se a mudança de variável clássica $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) \Rightarrow \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{X}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ na inequação (4.29), linearizando e tornando convexo o problema:

$$\begin{bmatrix}-\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{X}\mathbf{A}^T+\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T+\mathbf{B}_2\mathbf{Y} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{X}\mathbf{C}_1+\mathbf{Y}^T\mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{B}_1^T & -\eta\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1\mathbf{X}+\mathbf{D}_{12}\mathbf{Y} & \mathbf{D}_{11} & -\eta\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \tag{4.30}$$

4.2.1 SÍNTESE COM FL INDEPENDENTE DO PARÂMETRO

Considere o sistema LPV em (4.26), com dependência paramétrica geral, múltiplas entradas e saídas, cujos elementos das matrizes em espaço de estados $\mathbf{A}(\theta(t))$, $\mathbf{B}_1(\theta(t))$, $\mathbf{B}_2(\theta(t))$, $\mathbf{C}_1(\theta(t))$, $\mathbf{D}_{12}(\theta(t))$ e $\mathbf{D}_{11}(\theta(t))$, são funções de $\theta(t)$, pertencentes ao $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. O parâmetro escalar e sua taxa de variação supostamente evoluem em domínios compactos, $\theta(t) \in \Theta$ e $\dot{\theta}(t) \in \Theta_d$. Dado um nível de truncamento J, aplica-se o algoritmo da Seção 3.1.1 para obter os conjuntos de matrizes truncadas $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{B}_{1\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{C}_{1\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{D}_{11\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta_i)$ e os limites superiores correspondentes, $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{B}}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{B}}_{2\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{C}}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{D}}_{11\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$ e $\|\tilde{\mathbf{D}}_{12\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|$, calculados $\forall \theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$.

O seguinte teorema apresenta um número finito de condições suficientes para a existência de uma PILF tal que o sistema LPV em (4.26) tenha um mínimo ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$.

Teorema 4.3. *O sistema de controle LPV por realimentação de estados em* (4.26)*, tem desempenho $\mathcal{L}_2 < \eta$ se, e somente se, existirem γ, $\gamma_{Y_\mathcal{E}}$ e $\gamma_{Y_J} \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $\hat{\mathbf{Q}}_{Y_0} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{Q}_{Y_h} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $0 \leq h \leq 2^{G+1}-1$, tal que o seguinte problema de otimização do nível de desempenho $\eta \in \mathbb{R}_+$ tenha solução, $\forall \theta_i \in \Theta_J \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \Theta$:*

$$\min_{(\gamma,\gamma_{Y_J},\gamma_{Y_\mathcal{E}},\mathbf{X})} \quad \eta, \quad \textit{sujeito a}$$

$$\mathbf{X} \succ 0, \tag{4.31}$$

$$\mathbf{X} - \gamma \mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{4.32}$$

$$\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{Y_J}\mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{4.33}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{Y_\mathcal{E}}\mathbf{I}_n & \mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) \\ \mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \gamma_{Y_\mathcal{E}}\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i) + \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta_i)\|\mathbf{I}_{n+m+p} + 2\gamma\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)\|\mathbf{I}_{n+m+p} + 2\gamma_{Y_J}\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)\|\mathbf{I}_{n+m+p} \\ &+2\gamma_{Y_\mathcal{E}}(\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)\| + \|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i)\|)\mathbf{I}_{n+m+p} \prec 0. \end{aligned} \tag{4.35}$$

em que

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)\mathbf{X}) + \mathcal{S}(\mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta_i)\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i)) & \mathbf{B}_{1\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{X}\mathbf{C}^T_{1\Sigma_J}(\theta_i) + \mathbf{Y}^T_{\Sigma_J}(\theta_i)\mathbf{D}^T_{12\Sigma_J}(\theta_i) \\ \mathbf{B}^T_{1\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}^T_{11\Sigma_J}(\theta_i) \\ \mathbf{C}_{1\Sigma_J}(\theta_i)\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta_i)\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{D}_{11\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{2\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{12\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}_{11\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Prova: O canal de desempenho do sistema LPV com realimentação de estados em (4.26) tem ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$ se, e somente se, existir $\eta \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ tal que o conjunto de PLMIs (4.27) e (4.30) seja válido.

Analogamente à Seção 3.2 e à PLMI (3.33), as matrizes $\mathbf{A}(\theta(t))$, $\mathbf{B}_1(\theta(t))$, $\mathbf{B}_2(\theta(t))$, $\mathbf{C}_1(\theta(t))$, $\mathbf{D}_{12}(\theta(t))$ e $\mathbf{D}_{11}(\theta(t))$ são substituídas na PLMI (4.30) por suas expansões de Haar truncadas e respectivos resíduos máximos. Logo, separando o conjunto de PLMI em expansões somente truncadas, com resíduos e mistas (resíduos e truncadas), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)\mathbf{X}) + \mathcal{S}(\mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta)) & \mathbf{B}_{1\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{X}\mathbf{C}^T_{1\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{Y}^T_{\Sigma_J}(\theta)\mathbf{D}^T_{12\Sigma_J}(\theta) \\ \mathbf{B}^T_{1\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}^T_{11\Sigma_J}(\theta) \\ \mathbf{C}_{1\Sigma_J}(\theta)\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{11\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbf{X}) + \mathcal{S}(\mathbf{B}_{2\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)) & \mathbf{B}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{X}\mathbf{C}^T_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) + \mathbf{Y}^T_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbf{D}^T_{12\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) \\ \mathbf{B}^T_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{D}^T_{11\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) \\ \mathbf{C}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{D}_{11\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{B}_{2\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)) & \mathbf{0} & \mathbf{Y}^T_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbf{D}^T_{12\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{Y}^T_{\Sigma_J}(\theta)\mathbf{D}^T_{12\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \prec 0$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}&\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)+\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta)+\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\mathbb{X}+\mathbb{X}\mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)+\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta)+\mathbb{Y}^T_{\Sigma_J}(\theta)\mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)+\\&\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)+\mathbb{Y}^T_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)+\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)+\mathbb{Y}^T_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\mathbb{M}^T_{\Sigma_{J_2}}(\theta)\prec 0.\end{aligned} \tag{4.36}$$

em que

$$\mathbb{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta)=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta)&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \mathbb{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)=\begin{bmatrix}\mathcal{S}\left(\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)\mathbf{X}\right)+\mathcal{S}\left(\mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta)\right)&\mathbf{B}_{1\Sigma_J}(\theta)&\mathbf{X}\mathbf{C}^T_{1\Sigma_J}(\theta)+\mathbf{Y}^T_{\Sigma_J}(\theta)\mathbf{D}^T_{12\Sigma_J}(\theta)\\\mathbf{B}^T_{1\Sigma_J}(\theta)&-\eta\mathbf{I}_m&\mathbf{D}^T_{11\Sigma_J}(\theta)\\\mathbf{C}_{1\Sigma_J}(\theta)\mathbf{X}+\mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta)\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta)&\mathbf{D}_{11\Sigma_J}(\theta)&-\eta\mathbf{I}_p\end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta)=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta)&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta)&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{2\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{D}_{12\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{C}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}\quad e\quad \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta)=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{B}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{D}_{11\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)&\mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\mathbf{X}\in\mathbb{S}^n$, a restrição (4.32) implica que $\|\mathbf{X}\|\leq\gamma$, a (4.33) implica em $||\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i)||\leq\gamma_{Y_J}$ e a (4.34) implica em $||\tilde{\mathbf{Y}}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)||\leq\gamma_{Y_\mathcal{E}}$, com γ e $\gamma_{Y_\mathcal{E}}\in\mathbb{R}_+$.

Então, $\forall\ \theta\in\Theta$,

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\mathbb{X}+\mathbb{X}\mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)&\preceq\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\mathbb{X}+\mathbb{X}\mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p}\\&\preceq 2\|\mathbb{X}\|\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p}\preceq 2\gamma\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p}.\end{aligned} \tag{4.37}$$

Como os elementos de $\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta)$ são, por construção, constantes por partes, então $\forall\theta\in$

Θ_{J_i} e $\forall\theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$, para cada um dos 2^{J+1} intervalos, as relações a seguir são verdadeiras:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta) = \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i),\\
&\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta) = \mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i),\ \text{com}\ \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\| \preceq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)\|,\\
&\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\| \preceq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)\|, \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta)\| \preceq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta_i)\|,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$2\|\mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} \preceq 2\gamma_{Y_J}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}, \tag{4.39}$$

$$2\|\mathbb{Y}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} \preceq 2\gamma_{Y_{\mathcal{E}}}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p} \tag{4.40}$$

$$2\|\mathbb{Y}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} \preceq 2\gamma_{Y_{\mathcal{E}}}||\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}. \tag{4.41}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\mathbb{X} + \mathbb{X}\mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbb{Y}^T_{\Sigma_J}(\theta)\mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) +\\
&\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) + \mathbb{Y}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\mathbb{M}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta) + \mathbb{Y}^T_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\mathbb{M}^T_{\Sigma_{J_2}}(\theta) \overset{(4.37)-(4.41)}{\preceq}\\
&\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i) + \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta_i)\| + 2\gamma\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)\| + 2\gamma_{Y_J}\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)\| +\\
&2\gamma_{Y_{\mathcal{E}}}(\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)\| + \|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i)\|) \prec 0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Desta forma, o conjunto de desigualdades (4.31), (4.32) e (4.35) implica que o conjunto de PLMI (4.27) e (4.30) é uma condição suficiente para que o ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$, no caso de uma variável de Lyapunov independente do parâmetro $\mathbf{X}$. □

4.2.2 SÍNTESE COM FL DEPENDENTE DO PARÂMETRO

Suponha agora $\theta(t) \in \Theta$ e $|\dot{\theta}(t)| \leq \rho \in \mathbb{R}_+\ \forall t$. Dado um nível de truncamento J, aplica-se o algoritmo da Seção 3.1.1 para obter os conjuntos de matrizes truncadas e os limites superiores dos espaços de estados do sistema LPV como na seção anterior.

Considere $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ dado na EQ. 3.22, sob a condição EQ. 3.18, com o conjunto correspondente $\tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i)$, cujos elementos são dados pela EQ. 3.24, e $\mathbf{Q}(\theta_i)$ na EQ. 3.23. Como $\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{X}^{-1}(\theta)$, então, sob as mesmas condições existe $\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\mathbf{X}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i)$ e $\mathbf{Q}_X(\theta_i)$. O teorema a seguir estabelece um número finito de condições suficientes para a existência de uma PDLF tal que o sistema LPV da EQ. 4.26 tenha um mínimo ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$.

Teorema 4.4. *O sistema de controle LPV por realimentação de estados da EQ.* 4.26*, tem mínimo ganho* $\mathcal{L}_2 \leq \eta$ *se, e somente se, existirem matrizes* $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{Y} = \mathbf{KX} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{X_0} \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{Q}_{X_h} \in \mathbb{S}^n$, $\hat{\mathbf{Q}}_{Y_0} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{Q}_{Y_h} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $0 \leq h \leq 2^{G+1}-1$, *e escalares* γ_{J_i},$\gamma_{\mathcal{E}_i}$,$\gamma_{Y_{\mathcal{E}}}$ *e*

$\gamma_{Y_J} \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq 2^{J+1}$, *tal que o seguinte problema de otimização do nível de desempenho* $\eta \in \mathbb{R}_+$ *tenha solução* $\forall \theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i} \subset \Theta$*:*

$$\min_{(\gamma_{\mathcal{E}_i}, \gamma_{J_i}, \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{0}}, \mathbf{Q}_{\mathbf{h}})} \quad \eta, \quad \textit{sujeito a}$$

$$\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{Y_J}\mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{4.43}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{Y_{\mathcal{E}}}\mathbf{I}_n & \mathbf{Y}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) \\ \mathbf{Y}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \gamma_{Y_{\mathcal{E}}}\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{4.44}$$

$$\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n \succ 0, \tag{4.45}$$

$$\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{J_i}\mathbf{I}_n \preceq 0, \tag{4.46}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n & \mathbf{X}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) \\ \mathbf{X}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}(\theta_i) + \mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)\mathbb{X}_{\Sigma_J}(\theta_i)) + \mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i)\mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i)) + 2\gamma_{J_i}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p} + \\ &||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p} + 2\gamma_{\mathcal{E}_i}\Big(||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)|| + ||\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)||\Big)\mathbf{I}_{n+m+p} + 2\gamma_{Y_J}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p} + \\ &2\gamma_{Y_{\mathcal{E}}}\left(||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)|| + ||\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i)||\right)\mathbf{I}_{n+m+p} \prec 0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

em que

$$\mathbb{Q}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mp\rho\mathbf{Q}(\theta_i) & \mathbf{B}_{1\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{2\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{12\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{1\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_{1\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}_{11\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{1\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Prova: O canal de desempenho do sistema LPV com realimentação de estados em (4.26) tem ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$ se, e somente se, existir $\eta \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ tal que o conjunto de PLMI (4.27) e (4.30) seja satisfeito. Após, procede-se com as substituições e operações análogas à prova do teorema anterior.

Como $\gamma_{Y_\mathcal{E}}$ e $\gamma_{\mathcal{E}_i} \in \mathbb{R}_+$, a restrição (4.43) implica em $||\mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta_i)|| \leq \gamma_{Y_J}$ e a inequação (4.44) em $||\mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)|| \leq \gamma_{Y_\mathcal{E}}$. Além disso, $\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i) \in \mathbb{S}^n$ então (4.45) implica em $\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i) \succ 0$, (4.46) em $||\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i)|| \leq \gamma_{J_i}$, (4.47) implica em $||\mathbf{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)|| \leq \gamma_{\mathcal{E}_i}$ e

$$-\gamma_{\mathcal{E}_i} \preceq \mathbf{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) \preceq \gamma_{\mathcal{E}_i}. \tag{4.49}$$

Ambos $\mathbf{X}(\theta)$ e $\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta)$ são, por construção, afins por partes e constante por partes, respectivamente, então $\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta) = \mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ e $\mathbf{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) = \mathbf{X}(\theta) - \mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\forall\theta \in \Theta_{J_i}$. A partir desta igualdade e das condições (4.45) e (4.49), tem-se que:

$$0 \prec \mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n \preceq \mathbf{X}(\theta) \preceq \mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta_i) + \gamma_{\mathcal{E}_i}\mathbf{I}_n.$$

Portanto, $\mathbf{X}(\theta) \succ 0$, $\forall\theta \in \Theta$, que corresponde à condição (4.27).

Uma vez que a taxa de variação $\dot{\theta}$ é linear em (4.30), basta checar apenas os pontos extremos $\pm\rho$ do conjunto Θ_d, para todos os valores admissíveis de θ. As matrizes de estados $\mathbf{A}(\theta(t))$, $\mathbf{B}_1(\theta(t))$, $\mathbf{B}_2(\theta(t))$, $\mathbf{C}_1(\theta(t))$, $\mathbf{D}_{12}(\theta(t))$ e $\mathbf{D}_{11}(\theta(t))$ do sistema LPV (4.26) e a matriz de Lyapunov candidata $\mathbf{X}(\theta)$, são substituídas em (4.30) por suas expansões de Haar truncadas e respectivos resíduos, resultando em:

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}_\pm(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta) + \mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)\mathbb{X}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\mathbb{X}_{\Sigma_J}(\theta)) + \\ &\mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)\mathbb{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\mathbb{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta)) + \\ &\mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{J_3}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\mathbb{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)) \prec 0, \end{aligned} \tag{4.50}$$

em que

$$\mathbb{Q}_{\pm}(\theta) = \begin{bmatrix} \pm\rho\mathbf{Q}(\theta) & \mathbf{B}_{1\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}_{\Sigma_J}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbb{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{1\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_{1\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11\Sigma_\mathcal{E}}(\theta) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Os oito últimos termos em (4.50) podem ser substituídos por seus limites superiores

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{M}_{(.)}(\theta)\mathbb{X}_{(.)}(\theta)) &\preceq 2\|\mathbb{M}_{(.)}(\theta)\|\|\mathbb{X}_{(.)}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} \quad \text{e} \\ \mathcal{S}(\mathbb{M}_{(.)}(\theta)\mathbb{Y}_{(.)}(\theta)) &\preceq 2\|\mathbb{M}_{(.)}(\theta)\|\|\mathbb{Y}_{(.)}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Como $\mathbf{Q}(\theta)$ e $\mathbf{X}_{\Sigma_J}(\theta)$ são constantes por partes, $\forall\theta \in \Theta_{J_i}$ e $\forall\theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$, as seguintes relações são verdadeiras para cada um dos 2^{J+1} intervalos, i.e., para $i = 1, \ldots, 2^{J+1}$:

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\theta_i), \tag{4.52}$$

$$\mathbb{X}_{\Sigma_J}(\theta) = \mathbb{X}_{\Sigma_J}(\theta_i), \text{ com } \|\mathbb{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta)\| \preceq \|\mathbb{X}_{\Sigma_\mathcal{E}}(\theta_i)\|, \tag{4.53}$$

$$
\begin{aligned}
2\|\mathbb{X}_{\Sigma_J}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\preceq 2\gamma_{J_i}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}, && (4.54)\\
2\|\mathbb{X}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\preceq 2\gamma_{\mathcal{E}_i}||\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}, && (4.55)\\
2\|\mathbb{X}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\preceq 2\gamma_{\mathcal{E}_i}||\tilde{\mathbf{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_2}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}. && (4.56)\\
2\|\mathbb{Y}_{\Sigma_J}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\preceq 2\gamma_{Y_J}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}, && (4.57)\\
2\|\mathbb{Y}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\preceq 2\gamma_{Y_{\mathcal{E}}}||\mathbb{M}_{\Sigma_{J_2}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}, && (4.58)\\
2\|\mathbb{Y}_{\Sigma_{\mathcal{E}}}(\theta)\|\,\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\preceq 2\gamma_{Y_{\mathcal{E}}}||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_1}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}, && (4.59)\\
\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta)\|\mathbf{I}_{n+m+p} &\preceq ||\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\mathcal{E}_3}}(\theta_i)||\mathbf{I}_{n+m+p}. && (4.60)
\end{aligned}
$$

Logo, considerando as desigualdades (4.54) até (4.60), pode-se reescrever a (4.50) como (4.48), $\forall\theta_i \in \mathcal{D}^{\Theta}_{J_i}$. □

Exemplo 4.2. *Considere o seguinte modelo apresentado em (DE OLIVEIRA et al., 2002):*

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\theta)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{\omega}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}(t)\\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\theta)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{\omega(\theta)}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_u(\theta)\mathbf{u}(t)
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

$$
\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} -4{,}1 - 3\theta & 1 \\ -2\theta & -2 - 3{,}2\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_u(\theta) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{B}_{\omega}(\theta) = \begin{bmatrix} -0{,}03 \\ -0{,}47 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{D}_u(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\omega}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

em que $\theta \in [-4{,}4]$ e $\dot{\theta} \in [-5{,}5]$. de Oliveira et al. (2002), em sua técnica, obtiveram o valor ótimo $\eta = 1{,}980828$ para o caso do parâmetro θ não estar disponível online e $\eta = 1{,}7708326$ para θ disponível online, ou seja, θ poderá ser utilizado na lei de controle, resultando em uma realimentação de estado com dependência paramétrica.

A TAB. 4.2 mostra valores de η para o Exemplo 4.2 obtidos com $J = 10$ e diferentes valores de G e ρ, pelo uso do algoritmo do Teorema 4.4. Observa-se que valores menores de η são obtidos para taxas de variação paramétrica (ρ) menores e G maiores. Verifica-se ainda que esses valores são bem menores do que o obtido por de Oliveira et al. (2002).

Os mínimos autovalores de $\mathbf{X}(\theta)$ são representados na FIG. 4.5, onde se pode verificar

que todos são positivos, ou seja, a positividade $\mathbf{X}(\theta) \succ \mathbf{0}$ *está confirmada, conforme exposto no Teorema* 4.4. *A FIG.* 4.4 *apresenta a reconstrução de* $\mathbf{X}(\theta)$, *a FIG.* 4.6 *os valores de* $\mathbf{Y}(\theta)$ *e a FIG.* 4.7 *do Controlador* $\mathbf{K}(\theta)$, *obtido a partir de* $\mathbf{K}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta)\mathbf{X}^{-1}(\theta)$. *Todos os gráficos foram encontrados para* $J = 15$, $G = 5$ *e* $\rho = 10$.

TAB. 4.2: Valores de η para o Exemplo 4.2 com PDLF e $J = 10$.

G	ρ						
	0	5	10	15	50	1000	10000
0	0,3559	0,4041	0,4519	0,4656	0,4777	0,4777	0,4777
1	0,3499	0,3614	0,3890	0,4088	0,4545	0,4777	0,4777
2	0,3492	0,3558	0,3750	0,3882	0,4412	0,4776	0,4777
3	0,3492	0,3511	0,3633	0,3757	0,4355	0,4775	0,4777
4	0,3490	0,3491	0,3568	0,3690	0,4321	0,4774	0,4777
5	0,3488	0,3488	0,3546	0,3658	0,4299	0,4774	0,4777

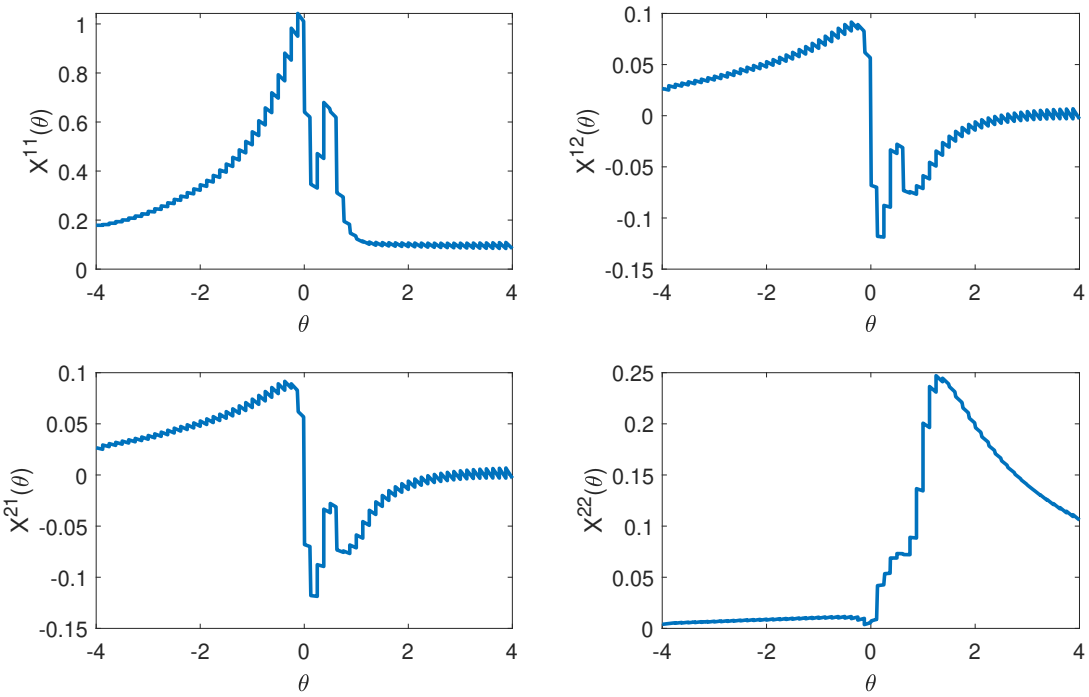
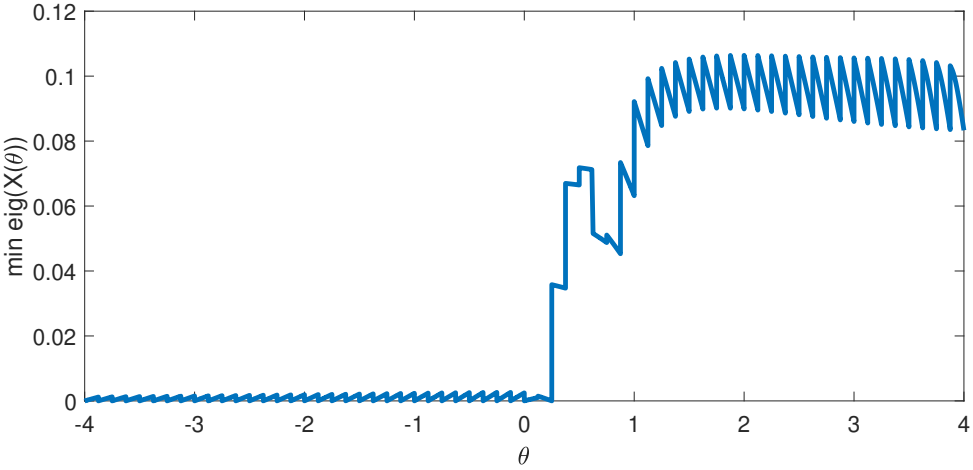
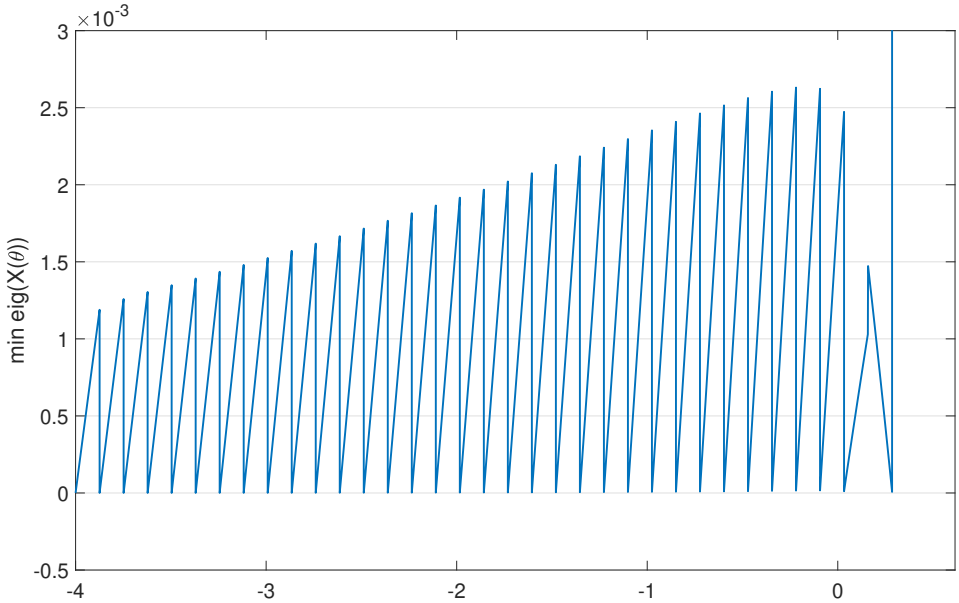


FIG. 4.4: $\mathbf{X}(\theta)$ obtido para $J = 15$, $G = 5$ e $\rho = 10$.



(a) $\theta \in [-4, 4]$



(b) $\theta \in [-4, 0]$

FIG. 4.5: Autovalores mínimos de $\mathbf{X}(\theta)$ obtidos para $J = 15$, $G = 5$ e $\rho = 10$.

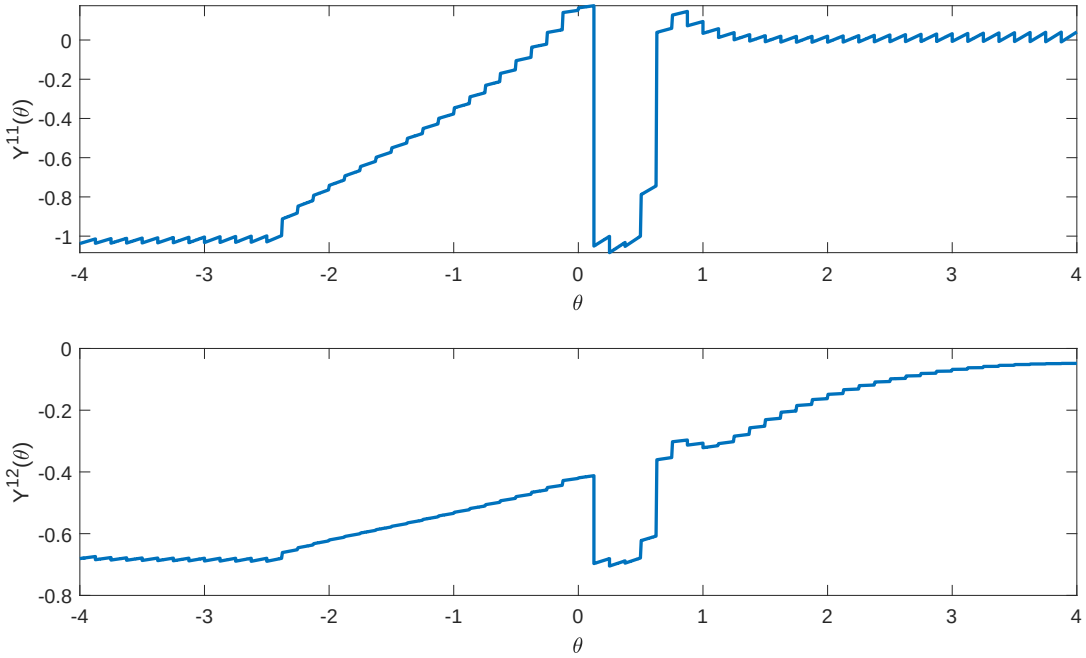


FIG. 4.6: $\mathbf{Y}(\theta)$ obtido para $J = 15$, $G = 5$ e $\rho = 10$.

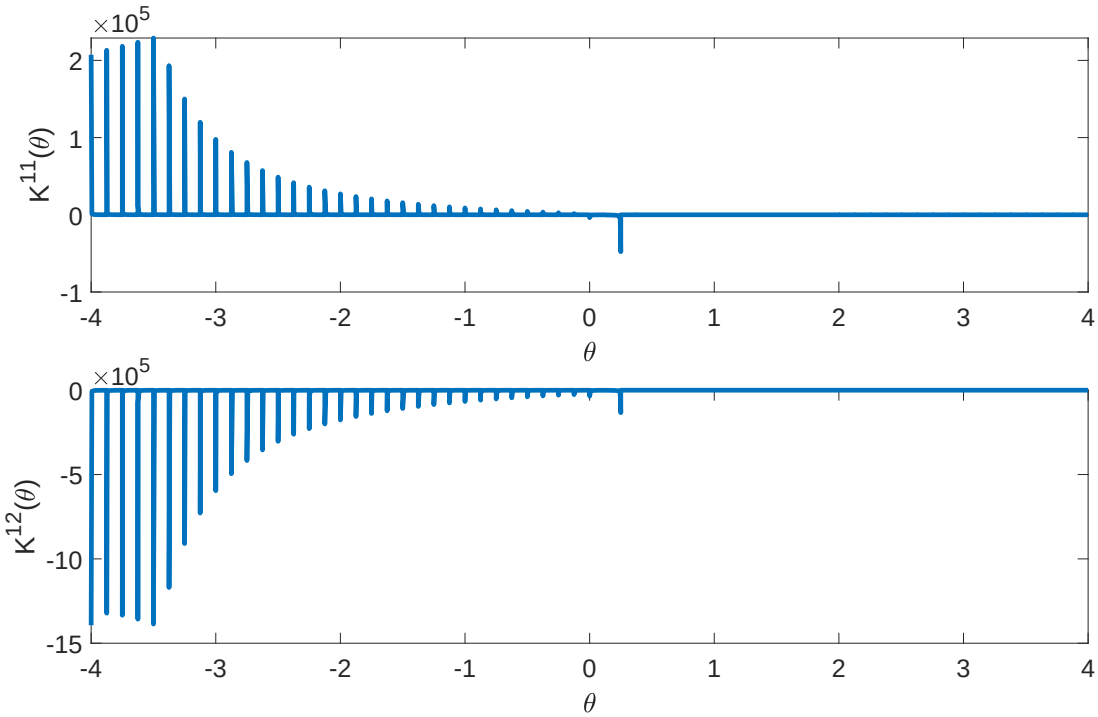


FIG. 4.7: $\mathbf{K}(\theta)$ obtido para $J = 15$, $G = 5$ e $\rho = 10$.

Pela FIG. 4.7, nota-se que os valores de $\mathbf{K}(\theta)$ estão muito altos, devido ao mau con-

dicionamento da matriz $\mathbf{X}(\theta)$, portanto, para obter um melhor resultado foi utilizada a seguinte definição.

Definição 4.1. *(BOYD et al., 1994) Para minimizar o condicionamento (λ), de uma matriz positiva definida* $\mathbf{X}$ *dependente de* θ*, sujeita a uma restrição LMI,* $F(\theta) \succ 0$*, tem-se que*

$$\min \lambda, \ \textit{sujeito a}$$

$$F(\theta) \succ 0$$

$$\mu > 0$$

$$\mu \mathbf{I} \prec \mathbf{X}(\theta) \prec \lambda \mu \mathbf{I}$$

Novos valores obtidos para o Exemplo 4.2, restringindo o condicionamento em $\lambda = 100$, são apresentados pela tabela e figuras a seguir. Observa-se que os valores dos elementos do controlador estão muito menores.

TAB. 4.3: Valores de η para o Exemplo 4.2 com FL dependente do parâmetro e $J = 10$.

G	ρ						
	0	5	10	15	50	1000	10000
0	0,3566	0,4051	0,4529	0,4664	0,4777	0,4777	0,4777
1	0,3501	0,3643	0,3926	0,4121	0,4559	0,4777	0,4777
2	0,3493	0,3584	0,3790	0,3921	0,4434	0,4776	0,4777
3	0,3492	0,3539	0,3674	0,3798	0,4380	0,4775	0,4777
4	0,3491	0,3503	0,3601	0,3728	0,4348	0,4774	0,4777
5	0,3489	0,3492	0,3569	0,3692	0,4326	0,4774	0,4777

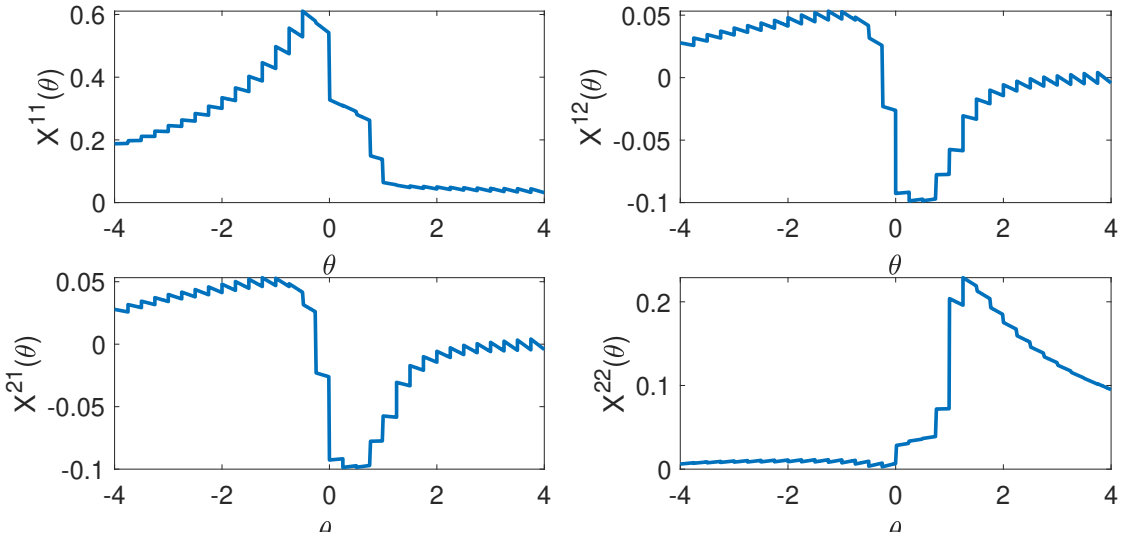


FIG. 4.8: $\mathbf{X}(\theta)$ com $\lambda = 100$, obtido para $J = 10$, $G = 4$ e $\rho = 10$.

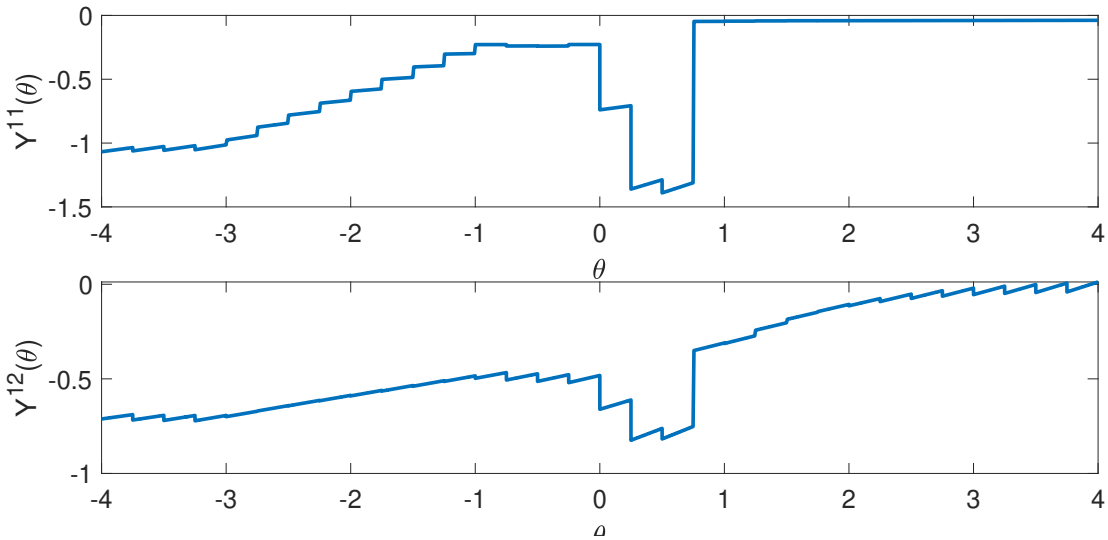


FIG. 4.9: $\mathbf{Y}(\theta)$ com $\lambda = 100$, obtido para $J = 10$, $G = 4$ e $\rho = 10$.

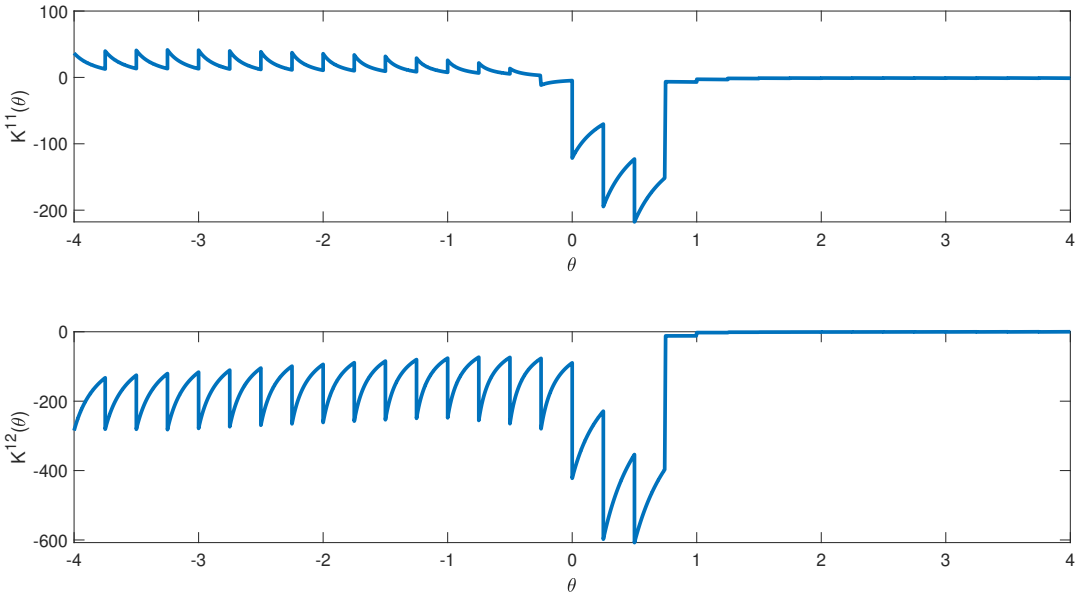


FIG. 4.10: $\mathbf{K}(\theta)$ com $\lambda = 100$, obtido para $J = 10$, $G = 4$ e $\rho = 10$.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

5.1 CONCLUSÕES

O estudo realizado nesta dissertação, sobre análise e síntese de controle LPV, considera modelos LPV possivelmente com dependência geral em parâmetros que evoluem em domínios irregulares. A maior parte das técnicas disponíveis no contexto da estabilidade quadrática de Lyapunov são aplicáveis a modelos com dependências afins (modelos politópicos) ou racionais (modelos LFT) no parâmetro. Essas técnicas são conservadoras no sentido que trajetórias irrealistas podem ser inseridas no modelo de análise ou síntese ao se tratar de sistemas físicos de interesse, que geralmente não apresentam modelos com dependências paramétricas simples. Outra fonte de conservadorismo dessas técnicas é que boa parte delas não permite considerar PDLF (caso das técnicas LPV/LFT) ou suportam somente PDLF afins nos parâmetros, o que pode não prover suficiente grau de liberdade na busca de FL candidatas.

Contrariamente aos métodos LPV clássicos de gradeamento do domínio paramétrico, que falham na garantia de estabilidade e desempenho por se basearem em condições somente necessárias devido à característica inerente ao paradigma de Lyapunov de dimensionalidade infinita e presença de infinitas restrições, as técnicas de discretização do domínio paramétrico via TH, objetos deste estudo, garantem a estabilidade e o desempenho, pois se baseiam em condições suficientes. Essas condições são obtidas visto que os resíduos do truncamento da expansão Haar das matrizes de estado e de Lyapunov não são negligenciados, mas substituídos nas PLMI por seus limitantes superiores. Um conservadorismo suplementar regulável pelos níveis de truncamento da TH adotados é o preço a ser pago neste caso. Contudo, mostrou-se nesta pesquisa que, mesmo para níveis de truncamento baixos, os novos métodos baseados em expansões de Haar são muito menos conservadores por permitirem o uso de FL assintoticamente $\mathcal{L}_2$-quadráticas, que provêm um grau de liberdade muito maior na busca de soluções viáveis. Enfim, o uso da TH se mostra uma alternativa matematicamente elegante para a definição de uma base para o espaço das funções de dependência paramétrica da matriz de Lyapunov.

Uma contribuição específica desta dissertação, apresentada na Seção 3.2.3, se refere aos resultados obtidos pelo uso da TH na análise LPV de desempenho robusto H_∞ introduzi-

dos recentemente por Bandeira (2018). Esses algoritmos são testados em um exemplo com dependência paramétrica afim, com a finalidade de validá-los e comparar o seu desempenho com técnicas de análise de desempenho bi-quadrática e afim-quadrática encontrados na literatura. O exemplo foi muito útil para melhor validar os algoritmos desenvolvidos e não muito explorados numericamente naquela tese, embora o método seja capaz de tratar exemplos com dependências paramétricas muito mais gerais.

As principais contribuições deste trabalho estão apresentadas no Capítulo 4, onde primeiramente são introduzidas novas caracterizações e condições suficientes para análise de desempenho robusto H_∞ de sistemas LPV utilizando a TH. Uma formulação menos complexa e ligeiramente menos conservadora em regime assintótico do que as desenvolvidas por Bandeira (2018) é apresentada e validada numericamente. Esses novos algoritmos são objetos dos Teoremas 4.1 e 4.2 apresentados, respectivamente, nas Seções 4.1.1 e 4.1.2. Esses novos resultados são então estendidos para a síntese de controle LPV por realimentação de estados com desempenho $\mathcal{L}_2$ garantido via TH e demonstrados nos Teoremas 4.3 e 4.4, respectivamente, nas Seções 4.2.1 e 4.2.2. Exemplos numéricos ilustram e validam os resultados de síntese.

A maior dificuldade inerente aos métodos aqui tratados, sem dúvida, é o elevado custo computacional. Múltiplos parâmetros podem ser tratados, mas da mesma forma que para a maioria das técnicas de análise e síntese de controle LPV, conforme o número de parâmetros aumenta, a carga computacional pode se tornar proibitiva. Entretanto, essa dificuldade pode ser superada considerando níveis de truncamento Haar baixos, o que resulta em um maior conservadorismo, pois o método obtém soluções que garantem a estabilidade e o desempenho para qualquer nível de truncamento e, por conseguinte, de conservadorismo.

5.2 PERSPECTIVAS

Com base na experiência obtida neste trabalho, sugere-se para trabalhos futuros:

- Estudar formas de paralelizar o algoritmo computacional apresentado, visando diminuir o tempo de processamento e tornando numericamente viável o tratamento dos casos multiparâmetros, que tendem a elevar enormemente o número de variáveis e de restrições envolvidas nos problemas de análise e síntese de controle.

- Estender o método de análise de estabilidade e desempenho e de síntese para FL

com dependências mais gerais nos estados do sistema.

- Estender os resultados obtidos de síntese de controle por realimentação de estados para a síntese de controle por realimentação de saída.

- Aplicar as técnicas desenvolvidas em modelos de sistemas reais, de dinâmicas mais complexas e de ordens mais elevadas, principalmente na área da defesa antiaérea (mísseis), bem como em outras áreas de sistemas aeronáuticos.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSEN, E. D.; ANDERSEN, K. D. **High Performance Optimization**, volume 33, chapter The Mosek Interior Point Optimizer for Linear Programming: An Implementation of the Homogeneous Algorithm, págs. 197–232. Springer, Boston, MA, 2000.

APKARIAN, P.; ADAMS, R. **Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems**. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6:21–32, Jan 1998.

BANDEIRA, P. T.; PELLANDA, P. C. ; DE ARAÚJO, L. O. **New Haar-based algorithms for stability analysis of LPV systems**. *IEEE Control Systems Letters*, 2 (4):605–610, Oct 2018.

BANDEIRA, P. T. **Análise de Estabilidade e de Desempenho Robusto de Sistemas Lineares Variantes no Tempo com Dependência Paramétrica Geral Via Transformada Wavelet Haar**. Tese de Doutorado, Instituto Militar de Engenharia, 2018.

BARMISH, B. R.; DEMARCO, C. L. **A new method for improvement of robustness bounds for linear state equations**. *In Proc. Conference Information Science and Systems*, 1986.

BLANCHINI, F.; MIANI, S. **A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain linear systems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (3):641–647, March 1999.

BLIMAN, P.-A. **A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters**. *SIAM journal of Control and Optimization*, 42:2016–2042, Jun 2003.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E. ; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA., June 1994.

BURRUS, C. S.; GOPINATH, R. A. ; GUO, H. **Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms**. Prentice Hall, 1998.

CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A. ; VICINO, A. **Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous lyapunov functions**. *Automatica*, 43(2):309 – 316, 2007.

CHESI, G. **Sufficient and necessary conditions for robust stability of ratrational time-varying uncertian systems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(6): 1546–1551, June 2013.

DE ARAÚJO, L. O. **Modelagem e Análise de Estabilidade de Sistemas Não Estacionários Utilizando Transformada Wavelets**. Tese de Doutorado, Instituto Militar de Engenharia, 2013.

DE ARAÚJO, L. O.; PELLANDA, P. C.; GALDINO, J. F. ; SIMOES, A. M. **Haar-based stability analysis of LPV systems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60 (1):192–198, 2015.

DE OLIVEIRA, J.; TROFINO NETO, A. ; DE SOUZA, C. E. **Análise e síntese H_∞ para sistemas LPV**. *Revista Controle & Automação*, 13(1):6–12, Feb, March, April 2002.

DONOHO, D. L. **Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation**. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1 (1):100–115, 1993.

FERON, E.; APKARIAN, P. ; GAHINET, P. **Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041–1046, July 1996.

GABOR, D. **Theory of communication. part 1: The analysis of information**. *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering*, 93(26):429–441, November 1946a.

GABOR, D. **Theory of communication. part 2: The analysis of hearing**. *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering*, 93(26):442–445, November 1946b.

GABOR, D. **Theory of communication. part 3: Frequency compression and expansion**. *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering*, 93(26):445–457, November 1946c.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. ; CHILALI, M. **Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty**. *IEEE Transactions on Automatic Control,*, 41(3):436–442, March 1996.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. **Robust stability of time varying polytopic systems**. *Systems & Control Letters*, 55(1):81–85, 2006.

HAAR, A. **Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme**. *Mathematische Annalen*, 69(3):331–371, September 1910.

HADDAD, W. M.; BERNSTEIN, D. S. **Parameter-dependent Lyapunov functions, constant real parameter uncertainty, and the Popov criterion in robust analysis and synthesis. 1**. Em ***[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control***, págs. 2274–2279 vol.3, Dec 1991.

KAPILA, V.; HADDAD, W. M.; ERWIN, R. S. ; BERNSTEIN, D. S. **Robust controller synthesis via shifted parameter-dependent quadratic cost bounds**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(7):1003–1007, July 1998.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems; 3rd ed.** Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

LOVERA, M.; BERGAMASCO, M. ; CASELLA, F. **Robust Control and Linear Parameter Varying Approaches: Application to Vehicle Dynamics**, chapter LPV Modelling And Identification: An Overview, págs. 3–24. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.

MALLAT, S. **A Wavelet Tour of Signal Processing**. Elsevier, 2009.

MARCOS, A.; BALAS, G. J. **Development of linear-parameter-varying models for aircraft**. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 27(2):218–228, 2004.

OLIVEIRA, R. C. L.; PERES, P. L. D. **Parameterdependent lmis in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via lmi relaxations**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7):1334–1340, 2007.

PELLANDA, P. C.; APKARIAN, P. **Synthesis of controllers for modal shaping in linear parameter-varying systems via the implicit model following formulation**. **Em *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.***, volume 6, págs. 5161–5166 vol.6, June 2003.

PELLANDA, P.; SIMÕES, A.; APKARIAN, P. ; ALAZARD, D. **Synthesis of missile gain-scheduled autopilots using an H_∞-LPV technique with piecewise continuously dierentiable parameter-dependent Lyapunov functions**. *Nonlinear Studies*, 11(2):243–276, 2004.

PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. **A converse theorem for exponential stability using piecewise quadratic** Lyapunov **functions**. *Technical Report CTH/RT/I-97/008, Control Engineering Lab, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden*, 1997.

ROSENBROOK, H. H. **The stability of linear time-dependent control systems**. *Journal of Electronics and Control*, 15(1):73–80, 1963.

RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. **Survey paper research on gain scheduling**. *Automatica*, 36:1401–1425, 2000.

SCHERER, C.; GAHINET, P. ; CHILALI, M. **Multiobjective output-feedback control via LMI optimization**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7), July 1997.

SCHERER, C.; WEILAND, S. **Linear matrix inequalities in control**. Lecture notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands, 2000.

SCHERER, C. W. **LPV control and full block multipliers**. *Automatica*, 37:361–375, March 2001.

SHAMMA, J. S. **Analysis and Design of Gain Scheduled Control Systems**. Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, 1988.

SHAMMA, J. S. **Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications**, chapter An Overview of LPV Systems, págs. 3–26. Springer US, Boston, MA, 2012.

SHAMMA, J. S.; ATHANS, M. **Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants**. *Automatica*, 27(3):559–564, May 1991.

SIMÕES, A. M. **Controle linear a parâmetros variáveis de sistemas não-lineares**. Dissertação, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.

TROFINO NETO, A. **Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach**. Em ***Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control***, volume 3, págs. 2341–2346, Dec 1999.

TROFINO NETO, A.; DE SOUZA, C. E. **Bi-quadratic stability of uncertain linear systems**. Em ***Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control***, volume 5, págs. 5016–5021, Dec 1999.

TROFINO NETO, A.; DE SOUZA, C. E. **Biquadratic stability of uncertain linear systems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1303–1307, Aug 2001.

TÓTH, R.; VAN DEN HOF, P. M. J.; LUDLAGE, J. H. A. ; HEUBERGER, P. S. C. **Identification of nonlinear process models in an LPV framework**. Em ***Proceedings of the 9th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS 2010)***, págs. 869–874, julho 2010.

VIDAKOVIC, B. **Statistical Modeling by Wavelets**. John Wiley & Sons, Inc., 1999.

VIDYASAGAR, M. **Nonlinear Systems Analysis**. Prentice Hall, 1978.

WANG, F.; BALAKRISHNAN, V. **Improved stability analysis and gain-scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):39–50, 2002.

WILLEMS, J. C. **Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):621–634, December 1971.

WU, F.; YANG, X.; PACKARD, A. ; BECKER, G. **Induced $\mathcal{L}_2$-norm control for LPV system with bounded parameter variations rates**. *Int J. Robust and Nonlinear Control*, 6:983–998, 1996.

YU, J.; SIDERIS, A. **H_∞ control with parametric Lyapunov functions**. *Systems & Control Letters*, 30(2-3):57–69, 1997.

7 APÊNDICES

7.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.1