A DETERMINAÇÃO DE UM NÚMERO PRIMO

FERNANDO Carvalho Ramos[17]

INTRODUÇÃO

Ao questionarmos os alunos de uma determinada série, seja de uma das séries finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio, sempre ocorrem dúvidas sobre a correta definição de um número primo, a confirmação se um número é ou não é primo e o por quê do número um não ser primo.

Os gregos, ao estabelecerem leis úteis e curiosas, criaram o importante conceito e o nome de número primo: "número natural que não admite outros divisores além de si mesmo e naturalmente a unidade."

Naquela época, os primeiros números primos seriam: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... e eram tidos como esquisitões, já que os números não formam uma seqüência ordenada como uma progressão geométrica ou uma progressão aritmética, não há sequer uma lei de formação, como por exemplo os números da sequência de Fibonacci[18].

Os poucos exemplos listados mostram que os números primos se repetem desordenadamente e não possuem uma lei que os determine.

DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Muitas dúvidas ficam na cabeça dos alunos com relação aos números primos, isso se reflete na sequência de seus estudos, visíveis quando se propõem a resolver exercícios que envolvam fatoração nos diversos assuntos que os acompanham ao longo da trajetória de estudantes do Ensino Básico.

Qual é a definição de um número primo?

O número 1 é primo?

---

[17] Mestre em Ensino de Matemática, Professor de Matemática no Colégio Militar de Belo Horizonte. E-mail: fercarramos@globo.com.

[18] Os números da seqüência de Fibonacci são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

O que é o Crivo de Eratóstenes?

Como definir se um número natural é primo ou não?

Quantos números primos existem?

Será que há um limite?

Será que existe um número natural primo que seja o último número primo?

Como obter um número primo?

Há outras aplicações para os números primos?

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Qual é a definição de um número primo?

A primeira abordagem deve ser feita por meio da verificação do conhecimento adquirido pelos alunos independentemente da série em que estejam para que haja o debate e somente após isso, relembrar o correto conceito de números primos.

Um número natural é primo se ele possui apenas **dois** divisores positivos e distintos.

Um número natural é primo se ele é **maior do que 1** e é divisível apenas por si próprio e por 1.

Segundo Ávila (1991), número primo é todo número natural, maior **do que 1**, que é divisível somente por si mesmo e pela unidade.

O número 1 é primo?

Alguns alunos sempre erram alguns exercícios e problemas envolvendo números primos, por exemplo: problemas de contagem em Análise Combinatória, porque não assimilaram o conceito correto de números primos e consideram o 1 como número primo.

Segundo NERY (2001), o número 1 não é considerado número primo e isso é explicado pelo Teorema Fundamental da Aritmética: "todo número natural maior do que 1 pode ser expresso de maneira **única,** a menos da ordem, como produto de números primos". Se o número 1 (um) fosse considerado como primo, não haveria a unicidade acima (por exemplo: 6 = 2 x 3 ou 6 = 1 x 2 x 3 ou 6 = 1 x 1 x 2 x 3, etc) e isso traria vários inconvenientes técnicos no desenvolvimento da

Teoria dos Números.

O que é o Crivo de Eratóstenes?

Eratóstenes[19] estabeleceu uma forma mecânica de destacar os números primos. Primeiro, definimos uma quantidade qualquer[20] de números naturais.

O número 1 é desprezado, já foi considerado um número primo, é um número de natureza diferente, não é legitimamente um número primo.

A atividade começa pelo número 2. É o único número par que é primo e por isso devemos riscar todos os números da seqüência que são múltiplos de 2 (circula o número 2, pula um e risca o próximo, pula um e risca o próximo, e assim sucessivamente).

Sobram os números ímpares: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

O número 3 é primo, devemos riscar todos os números não riscados que são múltiplos de 3 (circula o número 3, pula dois e risca o próximo, caso ainda não tenha sido riscado, pula dois e risca o próximo, caso ainda não tenha sido riscado, e assim sucessivamente).

O próximo número é o 5. O número 5 é primo, devemos riscar todos os números não riscados que são múltiplos de 5 (circula o 5 e risca todos os números terminados em 0 ou em 5 e que ainda não tenham sido riscados).

E assim por diante, circulamos o 7 e eliminamos seus múltiplos, circulamos o 11 e eliminamos seus múltiplos, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Esse processo foi denominado como "CRIVO DE ERATÓSTENES", é um processo altamente moroso e pouco recomendável para uma grande quantidade de números. O Crivo de Eratóstenes é apresentado nos livros didáticos de diversas formas, de 1 a 30, de 1 a 50, de 1 a 100, entre outras. Alguns estudiosos afirmam que ele considerava o nº 1 como primo.

---

[19] Eratóstenes de Cirene (cidade grega, atual Líbia) foi matemático, astrônomo e geógrafo, viveu na Grécia há mais de 2000 anos (276-194 a.C.).

[20] A quantidade depende do interesse e da necessidade de cada exercício ou do problema que se pretende solucionar.

Modelo mais utilizado de 1 até 100 com os números primos destacados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Só existe um par de números primos que são consecutivos: 2 e 3.

Há também os números primos gêmeos, isto é, pares de números primos do tipo "p" e "p + 2" cuja suspeita é de que existam infinitos pares. Exemplos: 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, 29 e 31, 41 e 43, etc.

Analisando as vinte e três coleções de livros didáticos indicados para as séries finais do Ensino Fundamental pelo Ministério da Educação em 2003 através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) encontramos seguintes Crivos de Eratóstenes.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98	99	100	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ao observarmos o Crivo de Eratóstenes e tentarmos estabelecer o período de distribuição dos números primos, verificaremos que não há, às vezes eles aparecem próximos uns dos outros, às vezes afastados, ora menos, ora mais afastados. Legendre[21] se ocupou dessa questão e por volta de 1800 formulou uma conjectura que revela certa ordem.

Sabendo que $\pi(x)$ representa o número de números primos até o valor de x. Por exemplo: $\pi(8) = 4$ -> {2, 3, 5, 7}; $\pi(11) = 5$ -> {2, 3, 5, 7, 11}. Segundo Legendre, $\pi(x)$ é aproximadamente x / ln (x), com isso, os números primos vão ficando cada vez mais raros, à medida que avançamos na seqüência dos números naturais.

Segundo GUEDES[22] (1989), podemos obter números primos baseados fundamentalmente em dois fatos:

a) Sejam a e b números primos entre si, se fizermos p = a + b ou p = a – b, teremos de qualquer forma os números ab e p primos entre si.

b) Sendo p e q números primos consecutivos, p < q, se $n \in N$ e $n < q^2$, então ou n é um número composto de fatores primos dentre os quais figura um número primo positivo menor ou igual a p ou n é um número primo.

Exemplos: Seja 2, 3, 5 7, 11. Manejando com os números 2, 3, 5 e 7 convenientemente, todos os números obtidos inferiores a $11^2 = 121$, serão primos.

$2 \times 3 + 5 = 11 < 7^2$ -> 11 é primo.

$3 \times 5 - 2 = 13 < 7^2$ -> 13 é primo.

$3 \times 5 + 2 = 17 < 7^2$ -> 17 é primo.

Os estudos de Fermat[23] indicavam que os números da forma $2^{2^n} + 1$ representavam os números primos, porém Euler[24] provou que $2^{32} + 1 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641x6.700417$ é um número composto

---

21 Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês.

22 Eric Guedes descobriu o processo para obter números primos quando ainda cursava a 7ª série do 1º grau do Colégio Figueiredo Costa em Niterói, RJ.

23 Pierre de Fermat (1601-1665), francês "Príncipe de Amadores" por não ser matemático de profissão.

24 Leonhard Euler (1707-1783), suíço, dominou todas as áreas da Matemática.

Como definir se um número natural é primo ou não?

Para saber se um número natural é primo, deve-se dividi-lo sucessivamente pelos números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...) e comparar os resultados. Se encontrar o resto igual a zero, o número não é primo e se encontrar somente restos diferentes de zero, o número será primo. Neste caso, precisa-se fazer as divisões até obter um quociente menor ou igual ao divisor.

Por exemplo:

1 91

91 não é divisível por 2, porque não é par.
91 não é divisível por 3, porque a soma dos algarismos (9 + 1 = 10) não é divisível por 3.
91 não é divisível por 5, porque não termina em 0 ou 5.

$\begin{array}{r|l} 91 & \underline{7} \\ 0 & 13 \end{array}$, portanto 91 não é primo, é um número composto.

Possui os seguintes divisores, D(91) = {1, 7, 13, 91}

2 97

97 não é divisível por 2, porque não é par.
97 não é divisível por 3, porque a soma dos algarismos (9 + 7 = 16) não é divisível por 3.
97 não é divisível por 5, porque não termina em 0 ou 5.

$\begin{array}{r|l} 97 & \underline{7} \\ 6 & 13 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 97 & \underline{11} \\ 9 & 8 \end{array} \quad \rightarrow 8 < 11$

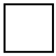
97 é um número primo.

Outra maneira de verificarmos se um número natural é primo ou não, é relacionar cada número natural com a quantidade de quadrados (ou cubos) e colocar esses quadrados (ou cubos) justapostos para formarem retângulos, os números primos são os únicos que só possuem duas formas de representação. Essa atividade será facilitada com o uso do material dourado criado por Montessori[25]

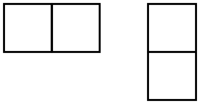
Por exemplo:

[25] Maria Montessori (1870 – 1952), médica pediatra italiana.

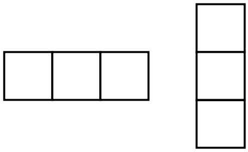
O número 1 (um) só possui uma forma de representação, não é considerado número primo.



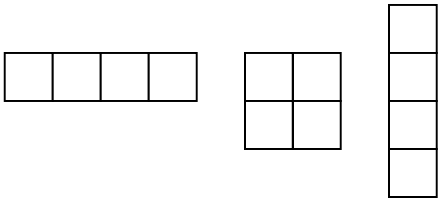
O número 2 (dois) possui duas formas de representação, é um numero primo.



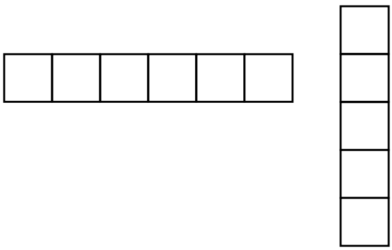
O número 3 (três) possui duas formas de representação, é um número primo.



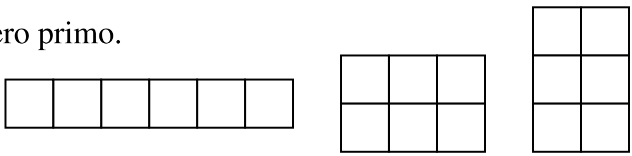
O número 4 (quatro) possui três formas de representação, não é um número primo.

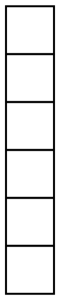


O número 5 (cinco) possui duas formas de representação, é um número primo.



O número 6 (seis) possui quatro formas de representação, não é um número primo.





E assim, sucessivamente.

Quantos números primos existem?

Será que há um limite?

Será que existe um número natural primo que seja o último número primo?

As três perguntas anteriores se complementam e as respostas foram dadas por Euclides:
Consideremos que existam "n" números primos. Eles seriam pela ordem P_1, P_2, P_3, P_4, ... , P_n. Tomemos portanto o produto P_1x P_2 x P_3 x P_4 x ... x P_n e, finalmente, adicionamos 1 unidade ao produto. Forma-se assim o número Z = P_1x P_2 x P_3 x P_4 x ... x P_n + 1.

Este número não é divisível, como vemos, por nenhum dos números primos até então conhecidos (P_1, P_2, P_3, P_4, ... , P_n), pois sempre terá que sobrar o resto 1, já que a primeira das duas parcelas não deixa resto. Se dividirmos por P_4, por exemplo, obteremos:

$$\begin{array}{l|l} Z & P_4 \\ \hline 1 & P_1 x P_2 x P_3 x P_5 x \ldots x P_n \end{array}$$

Com isso, o número Z ou é primo ou existe ao menos um novo número primo P_p, e P_p será maior do que P_n. Portanto, sempre existe um número primo maior do que P_n.

Exemplos:

2 x 3 + 1 = 7, 7 é primo.

2 x 3 x 5 x 7 + 1 = 211, 211 é primo.

2 x 3 x 5 + 1 = 31, 31 é primo.

2 x 3 x 5 x 7 x 11 + 1 = 2311, 2311 é primo.

São todos primos, contudo, 2 x 3 x 5 x 7 x 11 x 13 +1 = 30031 = 59 x 509, 59 e 509 são números primos.

Concluímos que existem infinitos números primos, não há um limite, não existe, portanto, um número primo máximo.

Como obter um número primo?

Mersenne[26] passou anos e anos estudando os números primos e isto é comprovado pelas inúmeras cartas que escrevia aos matemáticos de sua época, os números primos da forma $2^n - 1$, com n primo são conhecidos como números de Mersenne (M_n).

Os números de Mersenne possuem uma exceção. $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, ou seja M_{11} é um número composto, apesar de 11 ser primo.

Descoberta dos números de Mersenne ao longo dos anos:

n	2^n - 1	Ano	n	2^n - 1	Ano
2	3		4 253	1 281 dígitos	1961
5	31		11 213	3 376 dígitos	1963
13	8191	1461	44 497	13 395 dígitos	1979
17	131071	1568	1 398 269	420 921 dígitos	1996
31	10 dígitos	1772	3 021 377	909 526 dígitos	1998
61	19 dígitos	1883	6 972 593	2 098 960 dígitos	1999
127	39 dígitos	1876	13 466 917	4 053 946 dígitos	2001
521	157 dígitos	1952	32 582 657	9 808 358 dígitos	2006

A Eletronic Frontier Foundation oferece 100 mil dólares a quem descobrir o primeiro número primo com mais de 10 milhões de algarismos (dígitos).

Mais informações no site:

www.uol.com.br/info/aberto/download/2090.shl

[26] Marin Pere Mersenne (1588 – 1648), matemático francês, teólogo e filósofo. Estudioso da Teoria dos Números.

Há outras aplicações para os números primos?

As pesquisas com números primos, que já foram uma mera curiosidade, têm ganhado importância ainda maior por causa das suas aplicações na criptografia[27].

Os números primos são utilizados na criptografia para cifrar mensagens utilizando uma chave pública formada pelo produto de dois números primos e para decodificar a mensagem conhecendo o produto, mas isso não é suficiente pois cada fator possui mais de 150 algarismos. O método é eficiente pela incapacidade de se determinar os fatores sem uma tecnologia adequada.

A Conjectura de Goldbach, considerado um dos mais difíceis enigmas da Matemática moderna (juntamente com o Teorema de Fermat, recentemente demonstrado, e a Hipótese de Riemann), foi enunciada numa carta que o prussiano Christian Goldbach (1690-1764) escreveu em 1742 para Leonhard Euler (1707-1783), famoso matemático suíço, e diz que todo número inteiro par maior que 2 pode ser representado como a soma de dois números primos. Infelizmente, a demonstração, se é que ela existe, não fazia parte da carta e até hoje ninguém conseguiu demonstrá-la. Por exemplo: $36 = 13 + 23$ ou $36 = 17 + 19$ ou $36 = 7 + 29$

PERSPECTIVAS FUTURAS

O que acontece nas salas de aula do Ensino Básico é que muitos alunos não assimilaram o conceito correto de números primos, na maioria das vezes consideram o 1 como número primo e têm enormes dificuldades em fatorar os números naturais e identificar se um número natural é primo ou não.

Os livros didáticos poderiam abordar o tema com maiores detalhes e explicações. Das vinte e três coleções de livros didáticos de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental, relacionados

[27] Palavra grega, cryptos significa secreto, oculto.

pelo Ministério da Educação no Guia do livro didático do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2003, somente dez coleções abordavam o Crivo de Eratóstenes nos livros de 5ª série e somente uma abordava novamente o tema na 7ª do Ensino Fundamental.

Todos os livros didáticos poderiam em determinados assuntos, abordar novamente alguns conceitos que são básicos para o prosseguimento do conteúdo e números primos é um exemplo disso.

A solução está na valorização do professor para que ele tenha condições de se aperfeiçoar constantemente, com isso ele conseguirá enriquecer e aprimorar sua prática pedagógica.

CONCLUSÃO

O estudo sobre números primos é fascinante, a definição, a quantidade infinita de números primos, o Crivo de Eratóstenes, as aplicações e a quantidade de matemáticos que ao longo da História, estudaram os números primos e a Teoria dos Números, deixa-nos com enorme motivação para aprofundarmos nosso conhecimento.

A justificativa do porque o número 1 não ser primo é de fácil entendimento e muitos alunos ignoram essa informação, os livros didáticos precisam ser aprimorados.

O uso dos computadores e a busca pela descoberta de mais e mais números primos com a maior quantidade de dígitos possíveis, é uma informação que os livros didáticos não trazem, o assunto é de relevância incomensurável na criptografia e a maioria dos alunos não sabem disso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo. A distribuição dos números primos. IN: Revista do Professor de Matemática (RPM), nº 19. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991. p. 19-26.

DOXIADIS, Apostolos. Tio Petros e a Conjectura de Goldach. Um romance sobre os desafios da Matemática. Trad.: Cristiane Gomes de Riba. São Paulo: Ed. 34, 2001. 168 p.

FREIRE, Benedito Tadeu V.. Números primos. Os argumentos de

Euclides e aplicações. IN: RPM, nº 11. São Paulo: SBM, 1987. p. 5-8.
GIRODO, Cristovom A.. Um primo de 4 milhões de dígitos. IN: RPM, nº 48. São Paulo: SBM, 2002. p. 21.
GUEDES, Eric Bastos Campos. Uma construção de primos. IN: RPM, nº 15. São Paulo: SBM, 1989. p. 39-41.
KARLSON, Paul. A magia dos números. Trad.: Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Porto Alegre: Editora Globo, 1961.
NERY, Chico, POSSANI, Cláudio. Os primos esquecidos. IN: RPM, nº 47. São Paulo: SBM, 2001. p. 16-20.
________________________. Soluções dos problemas de “Os primos esquecidos”. IN: RPM, nº 48. São Paulo: SBM, 2002. p. 27-30.
OLIVERO, Mário. História da Matemática através de problemas. Rio de Janeiro: UFF/CEP, 2006. 160 p. – Curso de Instrumentação para o Ensino de Matemática.
RAMOS, Fernando Carvalho. Recursos didáticos para o ensino da matemática: ensino fundamental, ensino médio e ensino superior. Santa Maria: Ed. do Autor, 2002. 80 p.
_________________. O livro e os recursos didáticos no ensino de matemática. Santa Maria, 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria (UNIFRA).